

ISAAC NEWTON

**PRINCIPIILE
MATEMATICE
ALE
FILOZOFIEI
NATURALE**

Isaac Newton

PRINCIPIILE
MATEMATICE
ALE FILOZOFIEI NATURALE

Traducere și adnotări
de PROF. VICTOR MARIAN

Text revizuit
de PROF. VICTOR VÂLCOVICI

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

1956

Prefața traducătorului

Volumul de față este prima traducere în limba română a celebrei opere a lui Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica* care reprezintă o piatră fundamentală în istoria gândirii omenеști.

Textul original după care s-a făcut traducerea este acela al ediției a III-a a *Principiilor* din 1726. Motivul care a determinat această alegere este faptul că ediția menționată este cea mai completă și apărută cea din urmă în timpul cît trăia încă Newton, avînd și aprobarea lui.

Traducerea a fost pregătită în vederea comemorării a 300 de ani de la nașterea lui Newton și era plănuită să apară în colecția *Gazetei Matematice*, unde se tipăriseră în traducere și *Elementele* lui *E u c l i d*. Din motive independente de voința traducătorului apariția nu a putut fi realizată de cît în prezent, datorită Academiei Republicii Populare Romîne.

Traducerea s-a ținut cît mai aproape de text chiar atunci cînd acesta implica unele dificultăți de exprimare. Chiar figurile au fost păstrate sub forma lor originală, deși uneori ele ar fi putut fi simplificate; din aceleași motive ele nu au fost numerotate. Această atitudine inspirată de respectul față de o operă atît de valoroasă se justifică prin aceea că lucrarea nu este un manual didactic, care să servească începătorului pentru a se iniția în disciplina mecanicii. Cartea se adresează acelor care doresc să aprofundeze principiile mecanicii newtoniene.

Textul definitiv al traducerii a fost stabilit după o prelucrare amănunțită de către traducător împreună cu prof. V. Vâlcovici. În această prelucrare s-a comparat textul român din nou cu originalul, și afară de aceasta cu unele traduceri în alte limbi, precum: traducerea franceză a marchizei du Châtelet din 1759, traducerea germană a lui Wolfers din 1872 și cea engleză a lui Motte din 1729 revizuită de Cajori în 1934.

Portretul de la începutul cărții este datorit pictorului Vanderbank și datează din jurul anului 1726; este de altfel ultimul portret al lui Newton

reprezentându-l așezat în fotoliul prezidențial al Societății Regale din Londra.

Am reprodus atât foaia de titlu a ediției I cât și aceea a ediției a III-a, socotindu-le ca prețioase documente istorice.

Oda lui Halley închinată lui Newton a fost tradusă în hexametri de prof. Teodor A. Naum. Cu acest prilej îi aducem viile noastre mulțumiri.

La sfârșitul traducerii am pus o scurtă povestire a vieții și activității lui Newton însoțită de o bibliografie cronologică a operelor sale. Urmează apoi adnotările, care au drept scop să ajute pe cititor la înțelegerea chestiunilor fundamentale tratate mai ales în ceea ce privește aspectul lor filozofic. În aceste adnotări se fac considerații istorico-critice asupra problemelor delicate din operă (spațiu, timp, acțiune la distanță etc.) precum și asupra tendinței categoric idealiste pe care a încercat să o imprime Cotes în Ediția a II-a.

Clej, 30 iunie 1955

V. MĂRTIAN

DEFINIȚII

DEFINIȚIA I

Cantitatea de materie este măsura ei, născută din densitatea și volumul ei luate împreună.

Aerul de densitate dublă într-un spațiu iarăși dublu este cvadruplu; într-unul triplu este sextuplu. Același lucru se poate spune și despre zăpada și pulberea condensate prin compresiune sau lichefiere; de asemenea despre toate corpurile care se condensează din anumite cauze și în diferite feluri. Nu mă ocup aici de mediul care pătrunde liber în intervalul dintre părți admitînd că el există. În cele ce urmează voi numi această cantitate corp sau masă. Ea se cunoaște prin greutatea unui corp: căci prin experiențe precise efectuate asupra pendulelor am aflat că ea este proporțională cu greutatea, după cum se va arăta ulterior.

DEFINIȚIA II

Cantitatea de mișcare este măsura ei, născută din viteză și cantitatea de materie luate împreună.

Mișcarea întregă este suma mișcărilor părților; astfel că într-un corp dublu, dar de aceeași viteză, ea este dublă, iar dacă și viteza este dublă ea este cvadruplă.

DEFINIȚIA III

Forța ce rezidă în materie este putința de rezistență, cu care un corp oarecare, lăsat liber, persistă în starea sa de repaus sau de mișcare uniformă rectilinie.

Această forță este totdeauna proporțională cu corpul și nu se deosebește de inerția masei decît prin felul de a o concepe. Căci inerția materiei este aceea care face ca orice corp să fie perturbat cu greu din starea sa de repaus sau de mișcare. De aceea și forței ce rezidă în materie i se poate da numele foarte semnificativ de forță de inerție. În adevăr corpul exercită această

forță numai cînd își schimbă starea din cauza unei alte forțe ce i se imprimă și o exercită sub forme diferite, fie ca rezistență fie ca impuls: rezistență, atunci cînd corpul se opune unei forțe imprimate tinzînd să-și păstreze starea; impuls, atunci cînd același corp, cedînd cu greutate forței de rezistență a unui obstacol, tinde să schimbe starea unui astfel de obstacol. De obicei, rezistența se atribuie corpurilor în repaus iar impulsul celor în mișcare; dar mișcarea și repausul, după cum se concep de obicei, se deosebesc între ele numai în mod relativ și nu totdeauna corpurile care de obicei se consideră în repaus sînt de fapt în repaus.

DEFINIȚIA IV

Forța imprimată este acțiunea exercitată asupra unui corp, pentru a-i schimba starea de repaus sau de mișcare uniformă rectilinie.

Această forță constă numai din acțiune și ea nu rămîne în corp după acțiune. Căci corpul persistă în orice stare nouă numai mulțumită forței de inerție. Forța imprimată provine din diverse origini precum din ciocnire, din presiune, sau din forța centripetă.

DEFINIȚIA V

Forța centripetă este aceea, prin care corpurile sînt atrase spre un punct ca spre un centru, sau împinse, sau tind spre acel punct într-un mod oarecare.

Acestei categorii aparțin: gravitatea prin care corpurile tind spre centrul Pămîntului; forța magnetică prin care fierul tinde spre magnet, și forța aceea, oricare ar fi ea, prin care planetele sînt abătute neconținut de la mișcările rectilinii și sînt constrînse să se miște pe linii curbe. Piatra ce se rotește cu praștia tinde să se îndepărteze de la mîna care o învîrtește; prin tendința sa, ea întinde praștia cu atît mai tare cu cît se rotește mai repede, iar imediat ce scapă își ia sborul îndepărtîndu-se. Numesc forța centripetă forța contrară tendinței de mai sus, anume aceea cu care praștia atrage neconținut piatra spre mînă și o menține pe orbită, fiindcă ea este îndreptată spre mînă adică spre centrul orbitei. Același este cazul tuturor corpurilor, care se mișcă pe un cerc. Toate acestea tind să se îndepărteze de centrele orbitelor, și dacă nu ar fi o altă forță, de sens contrar acestei tendințe, cu ajutorul căreia să fie dirijate și reținute pe orbitele lor, pe care o numesc forța centripetă, ele s-ar mișca pe linii drepte cu mișcare uniformă. Un proiectil, dacă ar fi lipsit de forța gravitațională, nu ar cădea la Pămînt, ci s-ar duce în ceruri pe o linie dreaptă, adică cu mișcare uniformă, dacă se înlătură rezistența aerului. Din cauza greutatei sale este deviat de la mișcarea rectilinie și abătut încontinuu spre Pămînt anume mai mult sau mai puțin după greutatea sa și viteza mișcării. Cu cît va fi mai mică greutatea lui în raport cu cantitatea de materie, sau mai mare viteza cu care este proiectat, cu atît va devia mai puțin de la drumul rectiliniu continuîndu-l mai departe. Dacă un proiectil de tun aruncat orizontal din vîrfurile unui munte prin forța prafului de pușcă descrie o curbă pe o distanță de două mile înainte de a cădea la pămînt, aruncat cu o viteză dublă parcurge o distanță aproape

dublă, iar cu o viteză de zece ori mai mare parcurge una de zece ori mai mare, dacă se înlătură rezistența aerului. Iar mărinđ viteza se poate mări după voie distanța la care se aruncă, și micșora curbura liniei pe care o descrie, astfel că în sfîrșit să cadă la o distanță de zece, treizeci sau nouăzeci de grade; sau astfel ca să înconjure întreg Pămîntul sau în sfîrșit să meargă în ceruri și să-și continue mișcarea deviată la infinit. Și din aceeași cauză pentru care proiectilul prin forța gravitațională poate curba orbita înconjurînd Pămîntul, din aceeași cauză și Luna, fie prin forța gravitațională, dacă Luna este grea, fie printr-o altă forță care o împinge spre Pămînt, este într-una deviată din mișcarea sa rectilie spre Pămînt și curbată pe orbita sa. Fără o astfel de forță Luna nu poate fi reținută pe orbita sa. Dacă această forță ar fi mai mică, ea nu ar abate Luna deajuns de la cursul său rectiliniu. Dacă ar fi mai mare, ar devia-o mai mult decît trebuie și ar duce-o spre Pămînt. Trebuie deci să aibă o mărime potrivită. Rămîne ca matematicienii să afle forța prin care un corp poate fi reținut pe orbită cu viteză dată; și invers, să afle orbita curbilie pe care este deviat un corp ce pleacă dintr-un loc dat cu o viteză dată, sub influența unei forțe date. Cantitatea acestei forțe centripete este de trei genuri: absolută, acceleratoare și motoare.

DEFINIȚIA VI

Cantitatea absolută a forței centripete este măsura mai mare sau mai mică ei, în raport cu efectul cauzei care o propagă de la centru în regiunile înconjurătoare.

Astfel forța magnetică este mai mare într-un magnet și mai mică în altul, după mărimea magnetului și intensitatea forței sale.

DEFINIȚIA VII

Cantitatea acceleratoare a forței centripete este măsura ei proporțională cu viteza pe care o produce într-un timp dat.

Astfel forța unui magnet este mai mare la o distanță mai mică și mai mică la o distanță mai mare. Sau forța gravitațională este mai mare în văi și mai mică pe vîrfurile munților înalți; chiar și mai mică (după cum se va vedea mai tîrziu) la distanțe mai mari de globul pămîntesc; iar la distanțe egale ea este aceeași pretutindeni, fiindcă toate corpurile ce cad (grele sau ușoare, mari sau mici) abstracție făcînd de rezistența aerului, sînt accelerate la fel.

DEFINIȚIA VIII

Cantitatea motoare a forței centripete este măsura ei, proporțională cu mișcarea pe care o produce într-un timp dat.

Astfel greutatea este mai mare la un corp mai mare și mai mică la unul mai mic; iar pentru același corp este mai mare aproape de Pămînt și mai mică în ceruri. Această cantitate este tendința sau împingerea spre centru

a întregului corp, și (ca să zic așa) greutatea; ea se cunoaște întotdeauna când cunoaștem forța egală și de sens contrar cu ea, prin care se poate împiedica descinderea corpului.

Aceste cantități ale forțelor se pot numi, pentru simplificare, forțe *motoare*, *acceleratoare* și *absolute*, iar pentru a le distinge le putem referi la corpurile care tind spre centru, la locurile corpurilor și la centrul forțelor: anume forța motoare la corp ca tendința întregului corp, compusă din tendințele tuturor părților; forța acceleratoare, la locul corpului, ca o cauză eficientă propagată de la centru înspre diversele locuri înconjurătoare pentru a mișca corpurile ce se află acolo; iar forța absolută la centru, prevăzut cu o anumită cauză, fără de care forțele motoare nu s-ar propaga în regiunea înconjurătoare, fie că acea cauză este un corp central oarecare (cum ar fi magnetul în centrul forței magnetice, sau Pământul în centrul forței gravitaționale) fie că este altceva ce nu se manifestă. Cel puțin aceasta este concepția pur matematică. Căci nu am pretenția să explic cauzele și sediile fizice ale forțelor.

Forța acceleratoare se raportează așadar către cea motoare, precum viteza către mișcare. În adevăr, cantitatea de mișcare este născută prin produsul dintre viteză și cantitatea de materie, iar forța motoare prin produsul dintre forța acceleratoare și cantitatea aceleiași materii. Căci suma acțiunilor forței acceleratoare asupra diverselor părți ale corpului este forța motoare a întregului corp. Deci la suprafața Pământului, unde gravitația acceleratoare, adică forța acceleratoare a gravității este aceeași pentru toate corpurile, gravitația motoare sau greutatea este proporțională cu corpul: dacă însă ne urcăm în regiuni unde gravitația acceleratoare este mai mică, greutatea de asemenea se va micșora, fiind totdeauna proporțională cu produsul dintre corp și gravitația acceleratoare. Astfel în regiunile unde gravitația acceleratoare este de două ori mai mică, greutatea unui corp de două sau trei ori mai mic, va fi de patru sau de șase ori mai mic.

De aici înainte atracțiile și impulsurile le numesc în același sens acceleratoare și motoare. De asemenea folosesc în mod indiferent și amestecat numirile de atracție, impuls sau împingere spre un centru oarecare, considerând aceste forțe nu în mod fizic, ci numai matematic. De aceea cititorul nu trebuie să-și închipuie că prin aceste numiri definesc cumva o specie sau un fel de acțiune, cauză sau rațiune fizică, sau că atribui centrelor (care sînt puncte matematice) forțe într-un înțeles real și fizic, atunci când din întîmplare voi spune sau că centrele atrag, sau că există forțe centrale.

SCOLIE

Pînă aici am încercat să lămuresc în ce sens trebuie luate unele numiri mai puțin cunoscute. Timpul, spațiul, locul și mișcarea sînt perfect cunoscute de toată lumea. Trebuie totuși notat că lumea de rînd concepe aceste cantități numai prin relația cu lucrurile ce cad sub simțuri. De aici se nasc anumite prejudecăți pentru înlăturarea cărora este bine să deosebim aceste cantități în absolute și relative, adevărate și aparente, matematice și comune.

I. Timpul absolut, adevărat și matematic, în sine și după natura sa, curge în mod egal fără nici o legătură cu ceva extern și cu un alt nume se

chiamă și durată. Timpul relativ, aparent și comun este acea măsură (precisă sau neegală) sensibilă și externă a oricărei durate determinată prin mișcare, care se folosește de obicei în loc de timpul adevărat, ca oră, ziua, lună, an.

II. Spațiul absolut, considerat în natura sa, fără nici o relație cu ceva extern, rămîne totdeauna asemenea și imobil. Spațiul relativ este o măsură sau o parte oarecare mobilă a celui absolut, care se relevă simțurilor noastre prin poziția sa față de corpuri, și de obicei se confundă cu spațiul imobil. Astfel este o parte a unui spațiu subteran, aerian sau ceresc determinată prin poziția sa față de Pămînt. Spațiul absolut și relativ sînt aceleași ca specie și mărime, dar nu rămîn totdeauna aceleași ca număr. Căci dacă de pildă Pămîntul se mișcă, spațiul nostru aerian, care relativ și față de Pămînt rămîne totdeauna același, va fi cînd o parte cînd alta a spațiului absolut prin care trece aerul și astfel în mod absolut el se va schimba încontinuu.

III. Locul este o parte a spațiului pe care o ocupă corpul și este sau absolut sau relativ după cum este spațiul. Zic, parte a spațiului și nu poziția corpului, sau suprafața înconjurătoare. Căci locurile solidelor egale sînt totdeauna egale; suprafețele însă din cauza neasemănării figurilor de cele mai multe ori sînt neegale, pozițiile propriu vorbind, nu au cantitate și nici nu sînt atît locuri, cît mai ales afecțiuni ale locurilor. Mișcarea întregului este aceeași cu suma mișcărilor părților, adică translația întregului de la locul său este aceeași cu suma translației părților de la locurile lor. De aceea locul întregului este același cu suma locurilor părților și din aceste motive el este intern și în tot corpul.

IV. Mișcarea absolută este translația unui corp dintr-un loc absolut într-un loc absolut, cea relativă din unul relativ în altul relativ. Astfel într-o corabie mînată de pînzele sale locul relativ al unui corp este acea parte a corăbiei în care se află corpul, sau acea parte a cavității pe care o umple corpul și care se mișcă împreună cu corabia. Repausul relativ este permanența corpului în aceeași regiune sau aceeași parte a aceluși spațiu imobil, în care se mișcă corabia însăși împreună cu cavitatea sa, și tot ceea ce conține. Prin urmare dacă Pămîntul este cu adevărat nemișcat, corpul care se află în repaus relativ față de corabie se va mișca cu o mișcare adevărată și absolută cu viteza cu care se mișcă corabia însăși față de Pămînt. Dar dacă și Pămîntul se mișcă, se va naște mișcarea adevărată și absolută a corpului parte din mișcarea adevărată a Pămîntului în spațiul imobil, parte din mișcarea relativă a corăbiei față de Pămînt. Iar dacă și corpul se mișcă față de corabie, mișcarea lui adevărată se va naște parte din mișcarea adevărată a Pămîntului în spațiul imobil, parte din mișcările relative atît ale corăbiei față de Pămînt cît și ale corpului față de corabie; și din aceste mișcări relative va rezulta mișcarea relativă a corpului față de Pămînt. Astfel dacă acea parte a Pămîntului în care se află corabia se mișcă în realitate spre răsărit cu o viteză de 10 010 părți, în timp ce corabia este purtată de pînze și vînt spre apus cu viteză de 10 părți, iar corăbierul se plimbă în corabie spre răsărit cu o parte a vitezei menționate: atunci corăbierul se va mișca în mod real și absolut în spațiul imobil cu viteza de 10001 părți spre răsărit, și față de Pămînt spre apus cu 9 părți a vitezei.

Timpul absolut se deosebește de cel relativ în astronomie prin ecuația timpului obișnuit. Căci, zilele naturale, care de obicei se consideră ca egale

în măsurarea timpului sînt neegale. Astronomii corectează această neegalitate pentru a măsura mișcările cerești cu un timp mai aproape de adevăr. Este posibil să nu existe nici o mișcare egalabilă, prin care să se măsoare precis timpul. Toate mișcările pot fi accelerate și întîrziate dar fluxul timpului absolut nu poate fi schimbat. Durata sau perseverența existenței lucrurilor este aceeași, fie că mișcările sînt repezi sau încete sau nule. Prin urmare, cu drept cuvînt se distinge aceasta de măsurile sale sensibile și se evaluează din ele prin ecuația astronomică. Necesitatea acestei ecuații pentru determinarea fenomenelor se evidențiază atît cu ajutorul experienței orologiului oscilator, cît și prin eclipsele sateliților lui Jupiter.

După cum ordinea părților timpului este imutabilă, tot așa este și ordinea părților spațiului. Dacă acestea ar fi mișcate din locul lor aceasta ar însemna (ca să zicem așa) că ele s-ar îndepărta de sine înșile. Căci timpurile și spațiile sînt ca și cînd ar fi locurile lor înșile și ale tuturor lucrurilor. Toate se află în timp în ceea ce privește ordinea de succesiune, în spațiu în ce privește ordinea așezării. Esența lor este că sînt locuri și este absurd să se miște locurile primare. Prin urmare acestea sînt locuri absolute și numai translațiile din aceste locuri sînt mișcări absolute.

Dar fiindcă aceste părți ale spațiului nu se pot nici vedea nici distinge unele de altele cu ajutorul simțurilor noastre, în locul lor considerăm măsuri sensibile. Căci din pozițiile și distanțele lucrurilor de la un corp oarecare pe care-l considerăm imobil, definim toate locurile: apoi apreciem și toate mișcările referindu-le la locurile astfel fixate, întrucît observăm că corpurile se îndepărtează de ele. Astfel, în locul locurilor și mișcărilor absolute ne servim de cele relative; aceasta fără vreo stînjenire a treburilor omenești; în cele filozofice însă trebuie să facem abstracție de simțuri. Căci se poate întîmpla ca nici un corp să nu se afle în repaus adevărat față de care să se refere locurile și mișcările.

Însă repausul și mișcarea absolută și relativă se deosebesc între ele prin proprietățile, cauzele și efectele lor. Proprietatea repausului este că corpurile în repaus adevărat sînt în repaus între ele. Și de aceea deoarece se poate ca un corp oarecare din regiunile stelelor fixe sau cu mult mai departe să fie în repaus absolut, totuși din poziția reciprocă a corpurilor din regiunile noastre nu se poate ști dacă unul din acestea își păstrează sau nu poziția dată față de acel corp îndepărtat; așa că nu se poate defini din situația lor reciprocă starea de repaus adevărat.

O proprietate a mișcării este că părțile care păstrează poziții date față de întreg iau parte la mișcarea întregului. Căci toate părțile corpurilor în rotație tind să se îndepărteze de axa de mișcare, și impulsul corpurilor care înaintează este produs de suma impulsurilor părților componente. Prin urmare corpurile care se află în repaus relativ față de corpurile înconjurătoare participă la mișcările celor înconjurătoare. Și de aceea mișcarea adevărată și absolută nu poate fi determinată prin îndepărtarea dinspre corpurile care totuși par a fi în repaus. Căci corpurile exterioare nu trebuie numai să pară a fi în repaus, ci de fapt trebuie să fie în repaus. Altfel toate corpurile înconjurătoare în afară de îndepărtarea dinspre corpurile înconjurătoare vor participa și la mișcările adevărate ale corpurilor înconjurătoare; și dacă suprimăm îndepărtarea ele nu sînt în repaus adevărat, ci vor părea numai ca fiind în repaus. Căci cele înconjurătoare sînt față de cele încon-

jurate în același raport precum este partea exterioară a întregului către cea interioară, sau ca învelișul către sîmbure. Iar dacă învelișul se mișcă se va mișca și sîmburele ca parte a întregului fără a se îndepărta de vecinătatea învelișului.

O proprietate înrudită cu cea precedentă este că dacă se mișcă un loc, ~~se~~ mișcă orice este așezat în acel loc; astfel că un corp care se mișcă din ~~apre~~ un loc mobil, ia parte și la mișcarea locului său. Prin urmare toate mișcările care se produc dinspre locuri mobile sînt numai părți ale mișcărilor întregi și absolute. Și orice mișcare întregă se compune din mișcarea corpului din primul său loc, și din mișcarea acestuia din locul său și așa mai departe; pînă ce se ajunge la un loc imobil, ca în exemplul marinarului amintit mai sus. De unde rezultă că mișcările întregi și absolute nu pot fi determinate decît cu ajutorul locurilor imobile: și pentru aceea le-am referit mai sus pe acestea la locuri imobile iar pe cele relative la cele mobile. Locuri imobile însă nu există decît toate acelea care din veci în veci păstrează pozițiile reciproce date; deci care rămîn totdeauna nemișcate și constituie un spațiu pe care eu îl numesc imobil.

Cauzele prin care se deosebesc între ele mișcările adevărate și relative sînt forțele imprimate asupra corpurilor pentru a produce mișcarea. Mișcarea adevărată nici nu se naște nici nu variază decît prin forțele imprimate asupra corpului mișcat însuși, pe cînd mișcarea relativă se poate produce și schimba fără forțe imprimate asupra acestui corp. Căci este de ajuns să se imprime numai asupra altor corpuri cu care corpul este în relație pentru ca acestea cedînd lor, să se schimbe acea relație care determină repausul sau mișcarea relativă a corpului. Invers, mișcarea adevărată este schimbată totdeauna de forțele imprimate asupra corpului mișcat: pe cînd mișcarea relativă nu este în mod necesar schimbată de aceste forțe. Căci dacă aceleași forțe se aplică și asupra altor corpuri cu care este în relație în așa fel ca situația relativă să se păstreze, relația care determină mișcarea relativă se va păstra. Prin urmare orice mișcare relativă se poate schimba cînd cea adevărată se păstrează invariabilă și se poate păstra, cînd cea adevărată se schimbă, și de aceea mișcarea adevărată nu este determinată în nici un chip de relații de această natură.

Efectele prin care se deosebesc între ele mișcările absolute și relative sînt forțele cu care corpurile tind să se îndepărteze de la axa mișcării circulare. În adevăr, în mișcarea circulară pur relativă aceste forțe sînt nule, însă în mișcarea circulară adevărată și absolută ele sînt mai mari sau mai mici după cantitatea de mișcare. Dacă se atîrnă un vas de un fir lung și se învîrtește încontinuu pînă ce firul devine rigid din cauza sucirii, apoi se umple cu apă și se aduce în stare de repaus împreună cu apa, atunci dacă printr-o forță instantanee oarecare se pune în mișcare circulară de ~~apre~~ contrar și firul desrăsucindu-se, vasul perseverează mai mult timp în ~~apre~~ mișcare, suprafața apei la început va fi plană ca și înainte de mișcarea vasului. Dar după aceea vasul imprimînd forța încetului cu încetului apei, face ca și aceasta să înceapă a se roti; ea se îndepărtează pe încetului de centru și se ridică pe pereții vasului luînd o formă concavă (după cum am experimentat eu însumi) și mișcarea devenind tot mai rapidă, se ridică din ce în ce mai mult pînă ce, rotațiile efectuîndu-se în intervale egale cu ale vasului, apa ajunge în repaus relativ față de el. Această ridicare indică ten-

dința de îndepărtare de la axa de mișcare și printr-o atare tendință se cunoaște și se măsoară mișcarea circulară adevărată și absolută a apei, aici cu totul contrară celei relative. La început când mișcarea relativă a apei față de vas era maximă, această mișcare nu provoca nici o tendință de îndepărtare de axă. Apa nu căuta periferia ridicându-se pe pereții vasului, ci rămânea plană, și de aceea mișcarea ei circulară adevărată nu începuse încă. Dar după aceea, când mișcarea relativă a apei descreștea, ridicarea ei pe pereții vasului indica tendința de îndepărtare de axă, și această tendință arăta mișcarea circulară adevărată încontinuu crescătoare a apei, și în sfârșit atingerea maximului când apa se afla în repaus absolut față de vas. Așadar această tendință nu depinde de deplasarea apei față de corpurile înconjurătoare, și pentru aceea mișcarea circulară adevărată nu poate fi determinată prin astfel de deplasări. Mișcarea circulară adevărată a unui corp oarecare în rotație este unică corespunzând unei sforțări unice ca unui efect propriu și potrivit. Iar mișcările relative, din cauza relațiilor variate față de corpurile externe, sînt nenumărate, și după chipul relațiilor sînt cu totul lipsite de efecte reale afară doar dacă iau parte la mișcarea adevărată și unică. De aceea și în sistemul acelor care vor ca cerurile noastre să se rotească dincoace de cerurile stelelor fixe ducînd cu ele planetele, părțile constitutive ale cerurilor și planetele care se află în repaus relativ față de cerurile lor cele mai apropiate efectuează o mișcare adevărată. Căci ele își schimbă pozițiile reciproce (altfel de cum se întîmplă cu cele care se află în repaus adevărat) și antrenate împreună cu cerurile iau parte la mișcările lor și ca părți ale unui tot rotitor tind să se îndepărteze de axelor lor.

Așadar cantitățile relative nu sînt cantitățile înseși al căror nume îl poartă, ci sînt acele măsuri sensibile ale lor (adevărate sau greșite) care se folosesc îndeobște în locul cantităților măsurate. Dar dacă semnificațiile cuvintelor se definesc prin întrebuintarea ce li se dă, atunci prin numirile de timp, spațiu, loc și mișcare, trebuie să se înțeleagă propriu-zis aceste măsuri sensibile; iar limbajul va fi neobișnuit și pur matematic dacă aici se înțeleg cantitățile măsurate. Prin urmare deformează înțelesul textului consacrat aceia care interpretează acolo aceste numiri drept cantități măsurate. La fel, ating puritatea matematicii și filozofiei aceia care confundă cantitățile adevărate cu relațiile dintre ele și măsurile lor obișnuite.

De fapt este foarte greu să se cunoască mișcările adevărate ale diverselor corpuri și să se distingă în mod efectiv de cele aparente; fiindcă părțile acelui spațiu imobil, în care corpurile se mișcă în realitate, nu cad sub simțurile noastre. Totuși cauza nu este lipsită de orice speranță. Căci se pot obține indicații fie din mișcările aparente care sînt diferențele mișcărilor adevărate, fie din forțele care sînt cauzele și efectele mișcărilor adevărate. Astfel, dacă două sfere, legate prin intermediul unui fir la o distanță dată una de cealaltă se rotesc în jurul centrului lor de gravitate, din tensiunea firului se poate afla tendința sferelor de a se îndepărta de axa de mișcare și din aceasta se poate calcula cantitatea de mișcare circulară. Apoi dacă se imprimă simultan oarecare forțe egale pe fețele alterne ale sferelor pentru a mări sau micșora simultan mișcarea circulară, atunci din tensiunea mărită sau micșorată a firului se poate cunoaște creșterea sau descreșterea mișcării, și în sfârșit se pot determina fețele sferelor asupra cărora trebuie să se imprime forțele pentru ca mișcarea să crească cel mai mult, adică părțile poste-

rioare, sau acelea care urmează mișcării. Dar dacă se cunosc fețele care urmează precum și fețele opuse care preced mișcarea, se va cunoaște și determinarea mișcării. În acest fel se pot afla atât cantitatea cât și determinarea acestei mișcări circulare în orice vid imens unde nu ar exista nimic extern și perceptibil cu care sferile să se poată compara. Dacă acum în acel spațiu s-ar așeza oarecare corpuri foarte îndepărtate păstrînd unul față de altul o poziție dată, cum sînt stelele fixe în regiunile cerești; atunci din deplasarea relativă a sferelor printre corpuri nu se poate ști dacă mișcarea trebuie atribuită acestora sau acelor. Dacă însă cercetăm firul și aflăm că tensiunea lui este chiar aceea pe care o cere mișcarea sferelor, se poate conchide că mișcarea aparține sferelor iar corpurile sînt în repaus; și atunci în sfîrșit din deplasarea sferelor printre corpuri se poate afla determinarea acestei mișcări. Însă cum trebuie să se obțină mișcările adevărate din cauzele, efectele și deosebirile lor aparente, și invers, cauzele și efectele lor din mișcările lor fie adevărate fie aparente, se va arăta mai pe larg în cele ce urmează. Fiindcă în acest scop am compus tratatul de față.

AXIOMELE SAU LEGILE MIȘCĂRII

LEGEA I

Orice corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare uniformă în linie dreaptă, dacă nu este constrâns de forțe imprimare să-și schimbe starea.

Proiectilele perseverează în mișcările lor atîta timp cît nu sînt întîrziate de rezistența aerului și împinse în jos de forța gravitațională. O sfîrlează ale cărei părți se îndepărtează inconinuu din cauza coeziunii de la mișcările rectilinii, nu încetează să se rotească dacă nu este întîrziată de aer. Inșă corpurile mai mari ale planetelor și cometelor păstrează timp mai îndelungat mișcările lor progresive și circulare efectuate în spații mai puțin rezistente.

LEGEA II

Variația mișcării este proporțională cu forța motoare imprimată și este dirijată după linia dreaptă în lungul căreia este imprimată forța.

Dacă o forță oarecare produce o anumită mișcare, una dublă va produce una dublă, una triplă — una triplă, fie că se imprimă laolaltă și de o dată, fie treptat și succesiv. Și această mișcare (fiindcă este determinată totdeauna de aceeași parte a forței generatoare) dacă corpul se află deja în mișcare, sau se adună la mișcarea lui dacă au aceeași direcție sau se scade din cealaltă de direcție contrară, sau dacă acționează oblic, se adună oblic și se compune cu ea după determinările amîndorora.

LEGEA III

Reacțiunea este totdeauna contrară și egală cu acțiunea: sau, acțiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale și dirijate în sensuri contrarii.

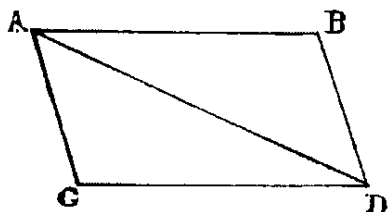
Ceea ce apasă sau trage altceva, este apăsător sau tras cu aceeași putere de acel ceva. Dacă cineva apasă o piatră cu degetul, degetul lui de asemenea este apăsător de piatră. Dacă un cal trage o piatră legată cu o funie, calul (ca să zic așa) de asemenea este tras în mod egal de piatră. Căci funia întinsă de ambele părți, făcînd sforțări egale de destindere, va trage calul spre piatră și piatra spre cal: și împiedică tot atît progresul unuia, cît pre-

movează pe al celuilalt. Dacă un corp oarecare ciocnind un alt corp va schimba prin forța sa într-un mod oarecare, mișcarea aceluia, el însuși va suferi de asemenea în mișcarea proprie aceeași schimbare în sens contrar prin forța celuilalt (din cauza egalității presiunii reciproce). Cu aceste acțiuni devin egale variațiile, nu ale vitezelor, ci ale mișcărilor; adică în corpurile care nu sînt altfel împiedicate. Căci variațiile vitezelor care au loc în sensuri contrarii sînt invers proporționale cu corpurile, fiindcă mișcările variază în mod egal. Această lege este valabilă și în cazul atracțiilor, după cum se va arăta în scolia ce urmează.

COROLARUL I

Un corp sub acțiunea a două forțe unite descrie diagonala unui paralelogram în același timp, în care ar descrie laturile sub acțiunile separate ale forțelor.

Dacă corpul într-un timp dat sub acțiunea singurei forțe M aplicată în locul A este purtat cu o mișcare uniformă de la A la B ; și sub acțiunea numai a forței N aplicată în același loc este purtat de la A la C : să se completeze paralelogramul $ABCD$, și sub acțiunea comună a forțelor, acel corp va fi purtat în același timp pe diagonală de la A la D . Căci fiindcă forța N lucrează de-a lungul liniei AC paralelă cu BD , această forță potrivit legii II nu va schimba de loc viteza de apropiere de linia BD născută de cealaltă forță. Așadar corpul ajunge la linia BD în același timp fie că se imprimă, fie că nu se imprimă forța N , și astfel la sfîrșitul aceluși timp va fi reperat undeva pe linia BD . Din același motiv la sfîrșitul aceluiași timp va fi reperat undeva pe linia CD și deci este necesar să se găsească la întîlnirea D a celor două linii. Însă parcurge drumul de la A la D cu o mișcare rectilinie, potrivit legii I.



COROLARUL II

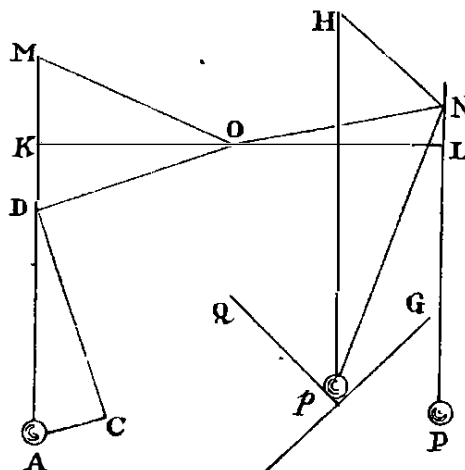
Și de aici se evidențiază compunerea forței directe AD din forțele oblice oarecare AB și BD : și invers descompunerea unei forțe directe oarecare AD în forțele oblice oarecare AB și BD . Această compunere și descompunere se confirmă abundant în mecanică.

Astfel dacă razele neegale OM , ON , pornind din centrul O al unei roți susțin prin mijlocirea firelor MA , NP greutatea A și P , și se caută forțele greutateilor necesare ca să miște roata: Prin centrul O să se ducă dreapta KOL întîlnind perpendicular firele în K și L , și din centrul O cu OL cea mai mare dintre distanțele OK , OL să se descrie un cerc ce întîlnește firul MA în D și fie AC paralelă iar DC perpendiculară pe dreapta dusă OD . Deoarece este indiferent dacă punctele K , L , D ale firelor sînt fixate sau nu pe planul roții, greutatea vor avea aceeași valoare dacă sînt atîrnate la punctele K și L sau D și L . Să reprezentăm forța totală a greutății A prin linia AD și să o descompunem în forțele AC , CD dintre care AC

trăgînd raza OD direct de la centru nu are nici un efect asupra mișcării roții; pe cînd cealaltă forță DC trăgînd raza DO perpendicular are același efect ca și cînd ar trage perpendicular pe raza OL egală cu OD ; adică aceeași valoare ca și greutatea P , dacă această greutate se raportează către greutatea A după cum forța DC către forța DA , adică (din cauza asemănării triunghiurilor ADC , DOK) după cum OK către OD sau OL . Prin urmare, greutățile A și P care sînt invers proporționale cu razele OK , OL situate pe aceeași dreaptă vor avea același efect și astfel rămîn în echilibru: ceea ce este proprietatea foarte cunoscută a balanței, a pîrghiei și a axei macaralei. Dacă însă una din greutăți este mai mare decît în acest raport, cu atît mai mare va fi forța ei pentru mișcarea roții.

Dacă greutatea p egală cu greutatea P parte este suspendată de firul Np , parte se sprijină pe planul înclinat pG , să se ducă pH , NH , cea dintîi perpendiculară pe orizont, cea din urmă pe planul pG ; și dacă se reprezintă prin linia pH forța greutății p îndreptată în jos, aceasta se poate descompune în forțele pN , HN . Dacă pe firul pN este perpendicular un plan oarecare pQ intersectînd un alt plan pG după o linie paralelă cu orizontul: și dacă greutatea p se sprijină numai pe aceste plane pQ , pG , ea ar apăsa asupra acestor plane cu forțele perpendiculare pN , NH , anume asupra planului pQ cu forța pN și asupra planului pG cu forța HN . Astfel că dacă se îndepărtează pQ așa încît greutatea să întindă firul, deoarece greutatea care întinde firul înlocuiește planul îndepărtat, ea îl întinde cu aceeași forță pN cu care aceasta apăsă mai înainte planul. De unde tensiunea acestui fir oblic va fi către tensiunea celui alt fir perpendicular PN , prîecum pN către pH . De aceea dacă greutatea p se află către greutatea A într-un raport care se compune din raportul invers al distanțelor minime ale firelor sale pN , AM de la centrul roții și din raportul direct pH către pN , greutățile vor avea același efect asupra mișcării roții și deci se vor susține reciproc, după cum poate oricine experimenta.

Dacă greutatea p sprijinîndu-se pe cele două plane oblice se află în situația unei pene înfipite între fețele interne ale corpului despîcat: și deci forțele penei și ciocanului sînt cunoscute. Deoarece după cum forța cu care greutatea p apăsă asupra planului pQ , este către forța cu care ea fie prin greutatea sa, fie prin lovitura ciocanului este împinsă spre plane după linia pH , tot așa pN către pH : și către forța care apăsă asupra celui alt plan pG , după cum pN către NH . Dar și forța șurubului se află printr-o descompunere analogă a forțelor: deoarece aceasta este o pană în:pinsă de o pîrghie. Așadar aplicarea acestui colorar se întinde foarte departe și întinzîndu-se departe se confirmă și se arată veracitatea lui, fiindcă toată mecanica atît de variat demonstrată de autori, depinde de cele deja spuse. Căci din acestea se deduc ușor forțele mașinilor care de obicei se compun din roți, tobe, scripeți, pîrghii, funii întinse și greutăți ridicîndu-se direct sau oblic și din celelalte puteri mecanice, ca forțele tendoanelor pentru a mișca oasele animalelor.



COROLARUL III

Cantitatea de mișcare ce se obține luînd suma mișcărilor dirijate în aceeași parte și diferența celor dirijate în părți contrarii nu se schimbă sub acțiunea corpurilor între ele.

În adevăr acțiunea și reacțiunea contrară ei sînt egale potrivit legii III, și de aceea după legea II ele produc în mișcări schimbări egale în părți contrarii. Prin urmare dacă mișcările au loc de aceeași parte, tot ceea ce se adună la mișcarea corpului ce înaintează se scade din mișcarea celui ce-i urmează în așa fel că suma să rămînă aceeași ca mai înainte. Dacă corpurile se întîlnesc în sens contrar; scăderea din mișcarea fiecăruia va fi egală și de aceea diferența mișcărilor dirijate în părți contrarii va rămîne aceeași.

Astfel dacă corpul sferic *A* este de trei ori mai mare decît corpul sferic *B*, și are două părți de viteză; și *B* îi urmează pe aceeași dreaptă cu zece părți de viteză, astfel că mișcarea lui *A* este către cea a lui *B* precum șase către zece: să presupunem că mișcările lor se iau egale cu șase părți și zece părți și suma va fi de șasesprezece părți. Așadar cînd la întîlnirea corpurilor, dacă corpul *A* cîștigă trei, patru sau cinci părți de mișcare, corpul *B* va pierde tot atîtea părți, astfel că corpul *A* după reflexie continuă cu nouă, zece sau unsprezece părți, iar *B* cu șapte, șase sau cinci părți, suma părților menținîndu-se totdeauna șasesprezece ca mai înainte. Dacă corpul *A* cîștigă nouă, zece, unsprezece sau douăsprezece părți, astfel că după întîlnire continuă drumul cu cincisprezece, șasesprezece, șaptesprezece sau optsprezece părți; corpul *B*, pierzînd tot atîtea părți cîte cîștigă *A*, sau va înainta cu o parte pierzînd nouă părți sau va rămîne nemișcat pierzînd zece părți din mișcarea sa progresivă, sau va merge înapoi cu o parte pierzîndu-și mișcarea și (ca să zic așa) o parte în plus, sau va merge înapoi cu două părți din cauza pierderii a douăsprezece părți din mișcarea progresivă. Și astfel sumele mișcărilor de același sens $15 + 1$ sau $16 + 0$, și diferențele celor contrare $17 - 1$ și $18 - 2$ vor fi totdeauna de șasesprezece părți, întocmai ca înainte de ciocnire și reflexie. Dar cunoscute fiind mișcările cu care corpurile înaintează după reflexie, se poate afla viteza fiecăruia, presupunînd că ea este către viteza dinainte de reflexie, așa cum mișcarea după ciocnire este către mișcarea dinainte de ciocnire. Astfel în cazul din urmă, cînd mișcarea corpului *A* era de șase părți înainte de reflexie și optsprezece părți după aceea, și viteza dinainte de reflexie de două părți; viteza lui de șase părți după reflexie se va afla zicînd, că după cum șase părți de mișcare dinainte de reflexie către optsprezece părți de mișcare de după aceea, tot așa două părți de viteză dinainte de reflexie către șase părți de viteză de după aceea.

Dar dacă corpurile sau nu sînt sferice, sau mișcîndu-se pe drepte diferite se întîlnesc în mod oblic, și se caută mișcările lor de după reflexie; trebuie să se cunoască poziția planului care atinge corpurile ce se ciocnesc în punctul de contact: apoi mișcarea fiecărui corp (potrivit corolarului II) trebuie să se împartă în două, una perpendiculară pe acest plan, cealaltă paralelă cu el: mișcările paralele însă, din cauză că corpurile acționează unul asupra altuia după dreapta perpendiculară pe acest plan, trebuie să rămînă aceleași după reflexie ca și înainte; și variațiile mișcărilor perpendi-

culare trebuie considerate egale în părți contrarii, astfel ca suma celor de același sens și diferența celor de sens contrar să rămână aceleași ca mai înainte. Din reflexiile de acest fel de obicei iau naștere mișcările circulare ale corpurilor în jurul centrelor proprii. În cele ce urmează însă nu consider aceste cazuri, și ar fi prea lung să demonstrez tot ce se referă la acesta.

COROLARUL IV

Centrul comun de greutate a două sau mai multe corpuri sub acțiunile corpurilor între ele nu-și schimbă starea fie de mișcare fie de repaus; și de aceea centrul de greutate al tuturor corpurilor care se acționează reciproc (excluzându-se acțiunile și piedicele externe) sau se află în repaus sau se mișcă cu o mișcare uniformă în linie dreaptă.

Căci, dacă două puncte progresează cu o mișcare uniformă în linii drepte, și distanța lor se împarte după un raport dat, punctul de diviziune sau rămîne în repaus sau progresează uniform în linie dreaptă. Aceasta se demonstrează mai tîrziu în lema XXIII și corolarul ei, dacă mișcarea punctelor are loc în același plan; și în același fel se poate demonstra dacă mișcările nu au loc în același plan. Prin urmare dacă oricîte corpuri se mișcă în mod uniform pe linii drepte, centrul comun de greutate al oricăror două, sau rămîne în repaus sau înaintează uniform pe linie dreaptă; fiindcă linia, ce unește centrele acestor corpuri care înaintează pe drepte în mod uniform, se împarte de acest centru comun după un raport dat. În mod analog și centrul comun al acestor două și al unui al treilea oarecare sau rămîne în repaus sau înaintează în mod uniform pe o linie dreaptă; fiindcă el împarte distanța dintre centrul comun al celor două corpuri și centrul corpului al treilea după un raport dat. În același fel și centrul comun al acestor trei și al unui al patrulea oarecare sau rămîne în repaus sau înaintează uniform pe o linie dreaptă; fiindcă el împarte distanța dintre centrul comun al celor trei și centrul celui de al patrulea într-un raport dat, și așa pînă la infinit. Așadar într-un sistem de corpuri care sînt lipsite atît de acțiuni reciproce cît și de orice acțiuni exterioare aplicate asupra sa, astfel că fiecare se mișcă în mod uniform pe diverse drepte, centrul comun de greutate al tuturor sau rămîne în repaus sau se mișcă uniform în linie dreaptă.

Apoi, într-un sistem de două corpuri ce se acționează reciproc, deoarece distanțele de la fiecare dintre centre la centrul comun de greutate sînt invers proporționale cu corpurile; mișcările relative ale acelor corpuri, fie de apropiere fie de îndepărtare de la el, vor fi egale între ele. De aceea schimbările egale ale mișcărilor care au loc în părți contrarii sau acțiunile reciproce ale acestor corpuri nu vor putea nici accelera nici întîrzia sau schimba starea de mișcare sau de repaus a acestui centru de greutate. Dar într-un sistem de mai multe corpuri, fiindcă centrul comun de greutate a oricăror două care se acționează reciproc nu-și schimbă de loc starea din cauza acelei acțiuni; și centrul comun de greutate al celorlalte asupra cărora acea acțiune nu se extinde, nu suferă nici o influență din partea lor; iar distanța dintre aceste două centre se împarte de către centrul comun al tuturor corpurilor în părți care sînt invers proporționale cu sumele corpurilor cărora aparțin

centrele de greutate; astfel că cele două centre menținându-și starea de mișcare sau de repaus, centrul comun al tuturor de asemenea își va păstra starea: este evident că centrul comun al tuturor nu-și schimbă niciodată starea de mișcare sau de repaus din cauza acțiunilor reciproce a câte două corpuri. Dar într-un atare sistem toate acțiunile corpurilor sau au loc între ele două câte două sau se compun din acțiunile reciproce luate două câte două; și de aceea ele nu produc niciodată vre-o schimbare în starea de mișcare sau de repaus a centrului comun al tuturor. De aceea, fiindcă acel centru, când corpurile nu se acționează reciproc, sau este în stare de repaus sau înaintează pe o dreaptă oarecare în mod uniform; el își menține starea deși corpurile se acționează reciproc, adică sau va rămîne totdeauna nemișcat sau se va mișca rectiliniu și uniform; afară doar dacă nu-i turburat din această stare de către forțe externe imprimate sistemului. Așadar în ceea ce privește persistența în starea de mișcare sau de repaus legea unui sistem de mai multe corpuri este tot una cu aceea a unui singur corp. Căci mișcarea progresivă fie a unui singur corp fie a unui sistem de corpuri trebuie evaluată totdeauna din mișcarea centrului de greutate.

COROLARUL V

Mișcările corpurilor închise într-un spațiu dat sînt aceleași între ele, fie că acel spațiu se află în repaus fie că el se mișcă rectiliniu și uniform fără mișcare circulară.

În adevăr, diferențele mișcărilor tinzînd spre aceeași parte și sumele celor ce tind spre părți contrare sînt, la început aceleași în amîndouă cazurile (prin ipoteză) și din aceste sume sau diferențe iau naștere întîlnirile și percusiunile, cu care corpurile lucrează unul asupra altuia. Așadar conform legii II efectele întîlnirilor în ambele cazuri vor fi egale; și de aceea mișcările între ele într-un caz vor rămîne egale cu mișcările între ele din celălalt caz. Aceasta se demonstrează printr-o experiență clară. Într-o corabie toate mișcările se întîmplă la fel, fie că ea este în stare de repaus fie că se mișcă uniform în linie dreaptă.

COROLARUL VI

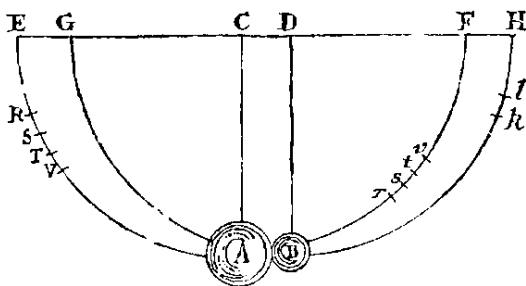
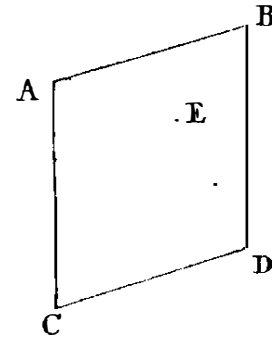
Dacă corpurile se mișcă între ele într-un fel oarecare și dacă sînt acționate de forțe acceleratoare egale după linii paralele; toate continuă a se mișca între ele în același fel ca și cînd nu ar fi acționate de acele forțe.

Căci forțele acționînd în mod egal (în raport cu cantitățile corpurilor ce urmează a se mișca) și după linii paralele, vor mișca în mod egal toate corpurile (în ce privește viteza) după legea II, astfel că ele nu vor schimba niciodată nici pozițiile nici mișcările lor între ele.

SCOLIE

Pînă aici am redat principiile acceptate de matematicieni și confirmate de experiențe multiple. Prin primele două legi și primele două corolare, Galileu a găsit căderea corpurilor grele proporțională cu pătratul tim-

pului și mișcarea proiectilelor pe o parabolă; ceea ce confirmă experiența dacă acele mișcări nu ar fi întru câțva întârziate de rezistența aerului. Când un corp cade, gravitatea uniformă acționând la intervale de timp egale în mod egal imprimă acelui corp forțe egale și produce viteze egale: iar în intervalul întreg de timp imprimă forța întreagă și produce viteza întreagă proporțională cu timpul. Și spațiile descrise în timpuri proporționale, sînt precum vitezele și timpurile luate împreună; adică proporționale cu pătratele timpurilor. Și aruncînd un corp în sus gravitatea uniformă îi imprimă forțe și îi răpește viteze proporționale cu timpurile: și timpurile de urcare până la înălțimile maxime sînt ca vitezele ce urmează a fi nimicite, iar înălțimile sînt precum vitezele și timpurile luate împreună, adică proporționale cu pătratele vitezelor. Și mișcarea unui corp, aruncat în direcția unei drepte, provenită din aruncare se compune cu mișcarea cauzată de gravitate. Atunci dacă corpul A numai prin mișcarea aruncării poate descrie într-un timp dat dreapta AB și numai prin mișcarea căderii în același timp poate descrie înălțimea AC : să se completeze paralelogramul $ABCD$, și corpul prin compunerea mișcărilor se va afla la sfîrșitul timpului în locul D ; și linia curbă AED , pe care o descrie acel corp, va fi o parabolă pe care dreapta AB o atinge în A și a cărei ordonată BD este ca AB^2 . De aceleași legi și corolarii depind demonstrațiile asupra timpurilor de oscilație ale pendulelor, ajutate de experiența zilnică a orologiilor. Din aceleași și din legea III cavalerul Christoph r Wren, John Wallis și Christian Huygens, fără îndoială cei mai de seamă geometri ai epocii imediat trecute, au aflat independent unul de altul, regulile ciocnirii și ale reflexiei corpurilor dure, și le-au comunicat aproape în același timp Societății Regale, fiind cu totul de acord (în ceea ce privește aceste legi): și în adevăr le-a comunicat mai întîi Wallis apoi Wren și Huygens. Dar Wren a confirmat adevărul înaintea Societății Regale printr-o experiență asupra pendulelor: pe care și vestitul Mariotte a considerat-o vrednică de a fi expusă



într-o întreagă carte. În adevăr pentru ca această experiență să fie de perfect acord cu teoriile, trebuie să se țină seamă atît de rezistența aerului cît și de forța elastică a corpurilor ce se întîlnesc. Să atîrnăm corpurile sferice A , B atîrnate de firele paralele și egale AC , BD de centrele C , D . Din aceste centre și cu aceste intervale să descriem semicercurile EAF , GBH împărțite în cîte două părți egale prin razele CA , DB . Să ducem corpul A la un punct oarecare R al arcului EAF , și îndepărtînd corpul B să-l lăsăm apoi liber, și după o oscilație să presupunem că se întoarce în punctul V . RV este întârzierea datorită rezistenței aerului. Din acest RV fie ST a patra parte situată în mijloc, anume în așa fel ca RS și TV să fie egale, și fie RS către ST ca 3 la 2. ST va exprima în mod foarte apropiat întârzierea în căderea de la S la A . Să readucem corpul B în locul său. Să presupunem

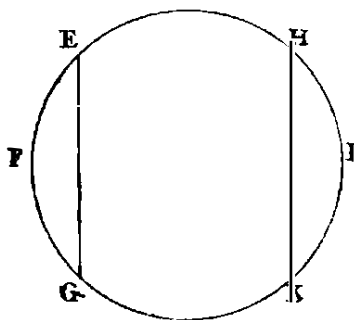
că corpul A cade din punctul S , atunci viteza lui în punctul de reflexie A va fi fără eroare sensibilă, aceeași ca și când ar cădea în vid din locul T . Prin urmare această viteză poate fi reprezentată prin coarda arcului TA . Căci o propoziție foarte cunoscută geometrilor este că viteza pendulului în punctul cel mai de jos este precum coarda arcului descris în cădere. După reflexie să presupunem că corpul A ajunge în locul s , și corpul B în locul k . Să îndepărtăm corpul B și să determinăm locul v ; din care dacă lăsăm liber corpul A și după o oscilație el revine în locul r , fie st a patra parte a lui rv situată în mijloc, anume în așa fel ca rs și tv să fie egale; și prin coarda arcului tA să exprimăm viteza pe care a avut-o corpul A imediat după reflecție în locul A . Căci t va fi locul adevărat și corect, în care ar trebui să se ridice corpul A dacă se înlătură rezistența aerului. Printr-o metodă analogă va trebui corectat locul k la care se ridică corpul B , determinându-se locul l în care acel corp ar trebui să se ridice în vid. În acest mod pot fi experimentate toate ca și când am fi în vid. În sfârșit, pentru a obține mișcarea corpului A în locul A imediat înaintea reflexiei, va trebui să luăm produsul corpului A (ca să zic așa) prin coarda arcului TA , care exprimă viteza lui, pentru a obține mișcarea lui în locul A imediat înaintea reflexiei; apoi prin coarda arcului tA pentru a obține mișcarea lui în locul imediat după reflexie. Și așa corpul B va trebui înmulțit cu coarda arcului Bl pentru a obține mișcarea lui imediat după reflexie. Și printr-o metodă analogă, dacă două corpuri sînt lăsate liber din locuri diferite trebuie să aflăm mișcările ambelor atît înainte cît și după reflexie; și apoi trebuie comparate mișcările între ele și determinate efectele reflexiei. În acest fel încercînd experiența cu pendule de 10 picioare, și aceasta cu corpuri atît de neegale cît și egale, și făcînd ca corpurile să se întîlnească de la distanțe foarte mari de 8, 12 sau 16 picioare; am aflat totdeauna fără eroare mai mare de trei degete cînd corpurile se întîlneau direct, că variațiile mișcărilor corpurilor efectuate în părți contrarii sînt egale, și că astfel acțiunea și reacțiunea sînt întotdeauna egale. Așadar, dacă corpul A cădea asupra corpului B aflător în repaus cu 9 părți de mișcare și pierzînd 7 părți, după reflexie își continuă drumul cu 2, corpul B sărea înapoi avînd 7 părți. Dacă corpurile se întîlneau cu mișcări contrarii, A cu 12 părți și B cu 6, și A se întorcea cu 2; B se întorcea cu 8, amîndouă corpurile pierzînd 14 părți. Dacă din mișcarea lui A se scad 12 părți nu va mai rămîne nimic: dacă se mai scad alte 2 părți, atunci mișcarea va fi cu 2 părți în sens contrar: și astfel din mișcarea corpului B de 6 părți, scăzînd 14 părți vor rămîne 8 părți în sens contrar. Dar dacă corpurile se mișcau în același sens, A mai repede cu 14 părți iar B mai încet cu 5 părți și după reflexie A își urma drumul cu 5 părți, atunci B se mișca cu 14, realizînd o trecere de 9 părți de la A la B . La fel în celelalte cazuri. Cantitatea de mișcare nu se schimbă niciodată prin întîlnirea și ciocnirea corpurilor, după cum se constata făcînd suma mișcărilor de același sens și diferența celor de sens contrar. Căci erorile de măsură de unul sau două degete le atribuiam dificultății de a măsura precis. Era greu atît de a lăsa libere deodată pendulele, astfel ca corpurile să se întîlnească în poziția cea mai de jos AB , cît și de a nota locurile s , k la care se urcau corpurile după ciocnire. Dar mai produceau erori în înseși corpurile pendulelor densitatea neegală a părților și compoziția neregulată datorită altor cauze.

Apoi, pentru ca să nu se aducă obiecția că regula, pentru a cărei demonstrație s-a imaginat această experiență, presupune că corpurile sînt sau absolut dure sau cel puțin perfect elastice, gen de corpuri care nu există în natură; adaug că experiențele descrise mai sus se fac atît cu corpuri moi cît și cu corpuri dure, deci nedepinzînd de loc de condiția de duritate. Căci dacă regula trebuie încercată în cazul corpurilor care nu sînt perfect dure, va trebui numai să se micșoreze reflexia într-o anumită proporție, cerută de cantitatea forței elastice. În teoria lui *Wren* și *Huygens* corpurile absolut dure se îndepărtează unul de altul cu viteza de întîlnire. Aceasta se va putea afirma cu mai multă siguranță în cazul corpurilor elastice. La corpurile mai puțin elastice viteza de întoarcere trebuie micșorată deodată cu forța elastică; fiindcă acea forță (afară de cazul cînd părțile corpului sînt deteriorate din cauza ciocnirii, sau cînd suferă o dilatare ca sub ciocan) este sigură și determinată (cît pot eu observa) și face ca corpurile să se depărteze unul de celălalt cu o viteză relativă, care se află într-un raport dat cu viteza relativă de întîlnire. Aceasta am încercat-o eu, cu mingi de lînă înfășurate tare și bine strînse, astfel: mai întîi lăsînd libere pendulele și măsurînd reflexia am aflat cantitatea forței elastice; apoi prin mijlocirea acestei forțe am determinat reflexiile în alte cazuri de întîlniri, și experiențele corespundeau. Mingile totdeauna se îndepărtau una de alta cu o viteză relativă, care este către viteza relativă a întîlnirii ca aproximativ 5 către 9. Aproape cu aceeași viteză se îndepărtau mingile de oțel: altele din plută cu o viteză ceva mai mică; iar pentru cele de sticlă proporția era aproximativ 15 la 16. Și în acest fel legea III a fost verificată, în ce privește ciocnirile și reflexiile, printr-o teorie care este în acord perfect cu experiența.

În cazul atracțiilor demonstrez acest lucru pe scurt în felul următor. Între două corpuri oarecare *A*, *B* care se atrag între ele, să ne închipuim că este pus un obstacol oarecare, prin care întîlnirea lor este împiedicată. Dacă unul din cele două corpuri *A* este atras mai mult spre corpul celălalt *B* decît celălalt *B* către cel dintîi *A*, obstacolul va fi apăsător mai tare de presiunea corpului *A* decît de presiunea corpului *B*; deci el nu va rămîne în echilibru. Va prevala presiunea mai mare și va face ca sistemul format din cele două corpuri și obstacol să se miște rectiliniu spre *B*, cu o mișcare veșnic accelerată și să îndepărteze în spații libere la infinit. Ceeace este absurd și contrar legii I. Căci conform legii I sistemul va trebui să rămînă în starea sa de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă, și de aceea corpurile vor apăsa obstacolul în mod egal, și deci se vor atrage reciproc în mod egal. Am încercat aceasta cu un magnet și o bucată de fier. Dacă acestea fiind puse separat în vase potrivite care se ating, plutesc unul lîngă altul într-o apă stătătoare; niciunul nu va împinge pe celălalt, ci din cauza egalității atracției de ambele părți își vor susține reciproc presiunile, și în sfîrșit ajungînd în echilibru rămîn nemișcate.

Astfel și gravitatea între Pămînt și părțile lui este reciprocă. Să tăiem Pămîntul *FI* cu un plan oarecare *EG* în două părți *EGF* și *EGI*: atunci greutatea lor reciproce vor fi egale. Căci dacă tăiem partea mai mare *EGI* printr-un alt plan *HK* paralel cu cel de mai sus în două părți *EGHK* și *HKI*, dintre care *HKI* să fie egală cu partea *EFG* tăiată mai sus: este evident că partea mijlocie *EGKH* prin propria sa greutate nu va tinde spre nici una din părțile extreme, ci ca să zic așa, va pluti în echilibru între

amîndouă și va fi în repaus. Însă partea extremă KHI va apăsa cu întreaga sa greutate asupra părții mijlocii, și o va împinge înspre cealaltă parte extremă EGF ; și de aceea forța cu care suma EGI a părților HKI și $EGHK$ tinde spre partea a treia EGF , este egală cu greutatea părții HKI , adică cu greutatea părții a treia EGF și de aceea greutateile reciproce ale celor



două părți EGI , EGF sînt egale, după cum am voit să arăt. Și dacă acele greutateți nu sînt egale, întreg Pămîntul plutind în eterul liber ar ceda greutateii mai mari și fugind de ea s-ar îndepărta la infinit.

După cum la întîlnire și reflexie acele corpuri sînt echipolente, ale căror viteze sînt în raport invers cu forțele inerente: tot astfel în mișcările instrumentelor mecanice acei agenți sînt echipolenți și se susțin reciproc prin presiuni contrarii, ale căror viteze apreciate prin determinarea forțelor, sînt în raport invers cu forțele. Astfel la mișcările brațelor balanței acele forțe sînt echipolente, care oscilînd balanța sînt în raport invers cu vitezele lor în sus și în jos: adică acele greutateți sînt echipolente, care dacă se urcă și se coboară pe o dreaptă, sînt în raport invers cu distanțele punctelor de suspensie de la axa balanței; dacă se urcă sau se coboară oblic pe plane înclinate sau împiedicate de alte obstacole interpușe, acele greutateți sînt echipolente care sînt în raport invers cu ridicarea sau coborîrea, socotite pe perpendiculară: și aceasta din cauza determinării gravitației în jos. În același fel la scripete sau la muflă acea forță a mîinii care trage funia în mod direct, va susține greutatea, care se raportă către greutatea ce se ridică fie direct fie oblic ca viteza perpendiculară de urcare către viteza mîinei ce trage funia. La orologii și instrumente asemănătoare, care sînt construite din roți mici, forțele contrare de înaintare și de împiedicare a mișcării se vor susține reciproc dacă sînt în raport invers cu vitezele părților roților la care sînt aplicate. Forța șurubului de comprimare a corpului se raportă către forța mîinei care învîrtește mînerul, după cum viteza circulară a mînerului în partea în care este acționată de mînă către viteza progresivă a șurubului înspre corpul comprimat. Forțele cu care pana apasă asupra celor două părți ale lemnului crăpat se raportă către forța ciocanului asupra penei de crăpat, după cum înaintarea penei în direcția forței imprimate asupra ei de ciocan, către viteza cu care părțile lemnului cedează penei după liniile perpendiculare pe fețele penei. La fel se comportă toate mașinile.

Eficacitatea și întrebuințarea lor constă numai în aceea, că micșorînd viteza mărim forța și invers: așa că în toate genurile de instrumente proprii se rezolvă problema, să se pună în mișcare o greutate dată cu ajutorul unei forțe date sau să se învingă o rezistență dată printr-o forță dată. Căci dacă mașinile sînt astfel construite, ca vitezele părții active și rezistente să fie invers proporționale cu forțele, partea activă va susține partea rezistentă: și cu o mai mare disparitate a vitezelor o va învinge. Desigur dacă disparitatea vitezelor este atît de mare, încît să fie învinsă și întreaga rezistență care de obicei provine atît din frecarea corpurilor vecine și alunecînd între ele cît și din coeziunea celor continue și care urmează să fie separate unul de altul și din greutateile ce urmează a fi ridicate; învinsă fiind întreaga rezis-

tență excesul de forță rămas produce o accelerație a mișcării proporțională cu ea însăși, atît în părțile mașinii, cît și în corpul rezistent. De altfel scopul acestei lucrări nu este de a trata mecanica. Prin acestea am voit să arăt numai, cîtă extensiune are și cît de sigură este legea III a mișcării. Căci dacă apreciem acțiunea agentului din forța lui și viteza luate împreună; și de asemenea reacțiunea rezistenței o apreciem din vitezele diverselor sale părți și ale forțelor de rezistență provenite din frecare, coeziune, greutate și accelerație luate împreună; acțiunea și reacțiunea vor fi egale între ele la întrebuințarea tuturor instrumentelor. Și întrucît acțiunea se propagă prin instrument și în sfîrșit se imprimă asupra oricărui corp rezistent, ultima ei determinare va fi totdeauna contrară determinării reacțiunii.

CARTEA I

DESPRE MIȘCAREA CORPURILOR

SECȚIUNEA I

Despre metoda primelor și ultimelor rapoarte, cu ajutorul căreia se demonstrează cele ce urmează

LEMA I

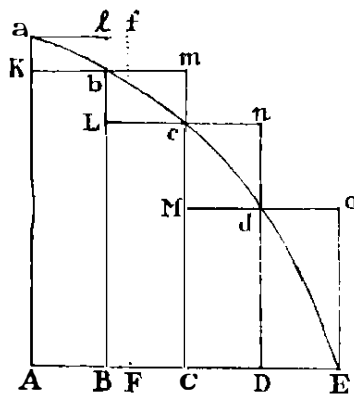
Cantitățile ca și rapoartele cantităților care într-un timp finit oarecare tind în mod constant spre egalitate, și înaintea sfârșitului aceluși timp tind mai aproape unul spre altul decât orice diferență dată, vor fi la urmă egale.

Dacă negi aceasta; fie în sfârșit neegale și fie ultima lor diferență D . Prin urmare nu pot să se apropie mai mult de egalitate decât diferența D : contra ipotezei.

LEMA II

Dacă într-o figură oarecare $AacE$, cuprinsă de dreptele Aa , AE și curba acE se înscriu oricâte paralelograme Ab , Bc , Cd etc. cuprinse între bazele egale AB , BC , CD etc. și laturile Bb , Cc , Dd etc. paralele cu latura Aa din figură; și dacă se completează paralelogramele $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$ etc. Apoi dacă lățimea acestor paralelograme se micșorează și numărul lor crește la infinit: zic că ultimele raporturi pe care le 'au între ele figura înscrisă $AKbLcMdD$, cea circumscrisă $AalbmcndoE$ și cea curbilinie $AabcdE$ sînt raporturi de egalitate.

Căci diferența dintre figura înscrisă și cea circumscrisă este suma paralelogramelor Kl , Lm , Mn ,

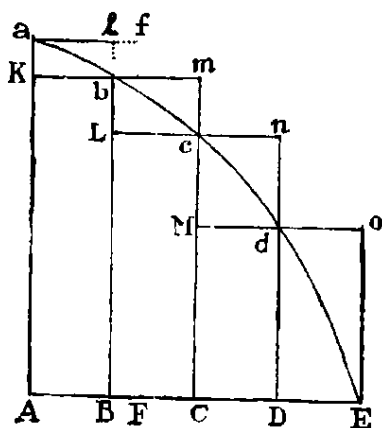


Do, adică (din cauză că bazele tuturor sînt egale) dreptunghiul avînd baza unică Kb și suma înălțimilor Aa , adică dreptunghiul $ABla$. Dar acest dreptunghi, deoarece lățimea lui AB se micșorează la infinit devine mai mic de cît ori care dreptunghi dat. Așadar (din cauza lemei I) figura înscrisă și cea circumscrisă și cu atît mai mult figura curbilinie intermediară devin la urmă egale. Q.E.D.

LEMA III

Aceleași raporturi ultime sînt și raporturi de egalitate, cînd lățimile AB , BC , CD etc. ale paralelogramelor sînt neegale și toate se micșorează la infinit.

Căci fie AF egală cu lățimea maximă, și să completăm paralelogramul $FAaf$. Acesta va fi mai mare ca diferența dintre figura înscrisă și figura circumscrisă: dar lățimea sa AF scăzînd la infinit, el va fi mai mic decît orice dreptunghi dat. Q. E. D.



COROLARUL 1. De aceea suma ultimă a paralelogramelor disparente coincide din toate părțile cu figura curbilinie.

COROLARUL 2. Și cu atît mai mult figura rectilinie, care este cuprinsă de coardele arcelor disparente ab , bc , cd etc. coincide la urmă cu figura curbilinie.

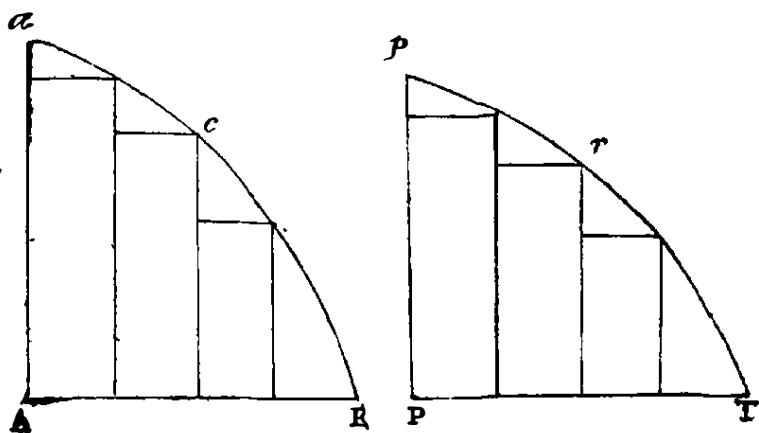
COROLARUL 3. De asemenea și figura rectilinie circumscrisă care este cuprinsă de tangentele acelorăși arce.

COROLARUL 4. Și prin urmare aceste figuri din urmă (referindu-ne la perimetrele acE) nu sînt rectilinii, ci limitele curbelor ale celor rectilinii.

LEMA IV

Dacă în două figuri $AacE$, $PprT$, se înscriu (ca mai sus) două serii de paralelograme, și fie același numărul ambelor, și dacă lățimile descresc la infinit, raporturile ultime ale paralelogramelor dintr-o figură către paralelogramele din cealaltă, ale fiecăruia către fiecare respectiv, sînt aceleași: zic că cele două figuri $AacE$, $PprT$ sînt între ele tot în acel raport.

Căci după cum sînt paralelogramele fiecare către fiecare, tot așa compunînd este suma tuturor către suma tuturor, și astfel figura către figură; fiind fără îndoială (din cauza lemei III) figura anterioară către suma anterioară și figura posterioară către suma posterioară în raport de egalitate. Q. E. D.



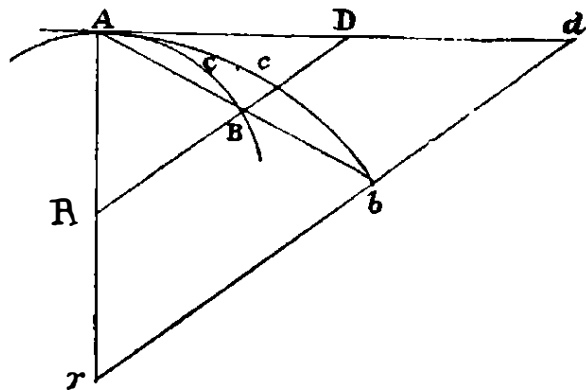
COROLAR. De aici dacă două cantități de orice fel se împart în același număr oarecare de părți; și acele părți când numărul lor crește și mărimea lor se micșorează la infinit, păstrează reciproc același raport, cea dintâi către cea dintâi, a doua către cea de-a doua și celelalte în ordinea lor, către celelalte: toate la un loc vor fi reciproc tot în acel raport dat. Căci dacă în figurile acestei leme paralelogramele se iau între ele în raportul părților, sumele părților vor fi totdeauna ca sumele paralelogramelor; și de aceea, când numărul părților și al paralelogramelor crește și mărimea lor descrește la infinit, cantitățile vor fi între ele în ultimul raport al paralelogramului către paralelogram, adică (prin ipoteză) în ultimul raport al părții către parte.

LEMA V

Toate laturile figurilor asemenea care se corespund între ele, atît curbilinii cît și rectilinii, sînt proporționale, și ariile sînt proporționale cu pătratele laturilor.

LEMA VI

Dacă un arc oarecare ACB de poziție dată este subîntins de coarda AB , și într-un punct oarecare A , în mijlocul curburii continue este atins de dreapta AD prelungită în ambele sensuri, apoi punctele A, B se apropie unul de altul și coincid; zic că unghiul BAD , cuprins între coardă și tangentă, descrește la infinit și în sfîrșit dispăre.

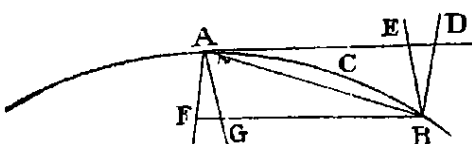


Căci dacă acel unghi nu dispăre, arcul ACB va cuprinde împreună cu tangenta AD un unghi rectiliniu egal, și de aceea curbura în punctul A nu va fi continuă, ceea ce este contrar ipotezei.

LEMA VII

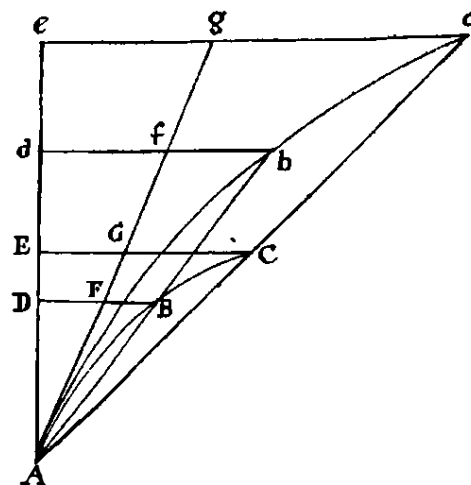
În aceleași condiții: zic, că ultimul raport reciproc al arcului, coardei și tangentei este un raport de egalitate.

Căci în timp ce punctul B se apropie de punctul A , să ne închipuim totdeauna AB și AD prelungite pînă la punctele îndepărtate b și d , și să ducem bd paralelă cu secanta BD . Și fie arcul Acb totdeauna asemenea cu arcul ACB . Și cînd punctele A, B coincid, unghiul dAb , din cauza lemei de mai sus, dispăre; astfel că drepte totdeauna finite Ab, Ad și arcul intermediar Acb coincid, și de aceea vor fi egale.



De unde și drepte AB, AD totdeauna proporționale cu acestea și arcul intermediar ACB dispar și vor avea în cele din urmă raportul egalității. Q. E. D.

paralele cu ordonatele DB , EC care se întâlnesc cu AB , AC prelungite în b și c . Să ne închipuim trasată atît curba Abc asemenea cu ABC , cît și dreapta Ag , care atinge amîndouă curbele în A și taie pe rînd dreptele aplicate DB , EC , db , ec , în F , G , f , g . Atunci păstrînd lungimea Ae să suprapunem punctele B , C cu punctul A ; și unghiul cAg dispărînd să coincidă ariile curbilinii Abd , Ace cu cele rectilinii Afd , Age , și prin urmare (din cauza lemei V) vor fi precum pătratele laturilor Ad , Ae . Dar cu aceste arii sînt totdeauna proporționale ariile ABD , ACE , și cu aceste laturi laturile AD , AE . Așadar și ariile ABD , ACE sînt în sfîrșit ca pătratele laturilor AD , AE . Q. E. D.



LEMA X

*Spațiile pe care le descrie un corp sub acțiunea unei forțe oarecare finite, fie că acea forță este determinată și neschimbătoare, fie că ea crește incon-
tinuu sau scade incontinuu, sînt la începutul mișcării ca pătratele timpurilor.*

Să reprezentăm timpurile prin liniile AD , AE și vitezele produse prin ordonatele DB , EC ; și spațiile descrise cu aceste viteze vor fi ca ariile ABD , ACE descrise de aceste ordonate, adică, la începutul mișcării (din cauza lemei IX) ca pătratele timpurilor AD , AE . Q. E. D.

COROLARUL 1. Și de aici se deduce ușor că devierile corpurilor descriind părți asemenea, ale figurilor asemenea în timpuri proporționale, devieri produse de oarecare forțe egale aplicate în mod analog asupra corpurilor și măsurate prin distanțele corpurilor la acele locuri ale figurilor asemenea la care corpurile ar ajunge în aceleași timpuri proporționale fără aceste forțe, sînt aproximativ ca pătratele timpurilor în care se nasc.

COROLARUL 2. Devierile însă care se produc de forțe proporționale aplicate în mod analog părților asemenea ale figurilor asemenea, sînt precum forțele și pătratele timpurilor luate împreună.

COROLARUL 3. Același lucru trebuie să se înțeleagă despre spații oarecare pe care le descriu corpurile sub acțiunile diverselor forțe. Acestea sînt la începutul mișcării, ca forțele și pătratele timpurilor luate împreună.

COROLARUL 4. Și de aceea forțele, la începutul mișcării, sînt direct proporționale cu spațiile descrise și invers proporționale cu pătratele timpurilor.

COROLARUL 5. Și pătratele timpurilor sînt direct proporționale cu spațiile descrise și invers proporționale cu forțele.

SCOLIE

Dacă se compară între ele cantități nedeterminate de diverse feluri și una oarecare dintre ele se zice că se raportă direct sau invers către alta oarecare; aceasta înseamnă că cea dintîi crește sau descrește în același raport

cu cea din urmă, sau cu inversa ei. Și dacă una oarecare dintre ele se zice că se raportează direct sau invers către alte două sau mai multe: aceasta înseamnă că cea dintâi crește sau descrește între un raport ce se compune din rapoartele în care celelalte sau inversele celorlalte cresc sau descreșc. Astfel dacă A se zice că se raportează direct către B și direct către C și invers către D : aceasta înseamnă că A crește sau descrește în același raport ca $B \times C \times \frac{1}{D}$, adică, A și $\frac{BC}{D}$ sînt între ele într-un raport dat.

LEMA XI

Dreapta subîntinsă disparentă a unghiului de contact în toate curbele care au o curbură finită în punctul de contact, este la urmă ca pătratul dreptei subîntinse arcului vecin.

CAZUL 1. Fie AB acel arc, AD tangenta lui, BD dreapta subîntinsă unghiului de contact perpendiculară pe tangentă, AB dreapta subîntinsă arcului. La această dreaptă subîntinsă AB și la tangenta AD să ducem perpendicularele AG , BG concurente în G ; apoi să apropiem punctele D , B , G de punctele d , b , g , și fie J ultima intersecție a liniilor BG , AG cînd punctele D , B ajung în A . Este evident că distanța GJ poate fi mai mică decît orice distanță dată. Dar (prin natura cercurilor care trec prin punctele ABG , Abg) $\overline{AB^2}$ este egală cu $\overline{AG \times BD}$ și $\overline{Ab^2}$ egal la $\overline{Ag \times bd}$; și de aceea raportul $\overline{AB^2}$ către $\overline{Ab^2}$ se compune din rapoartele AG către Ag și BD către bd . Dar fiind că GJ poate deveni mai mic decît o lungime oarecare dată, se poate întîmpla ca raportul lui AG către Ag să difere de raportul de egalitate cu mai puțin decît cu orice diferență dată, și astfel că raportul lui $\overline{AB^2}$ către $\overline{Ab^2}$ diferă de raportul lui BD către bd cu mai puțin decît o diferență oarecare dată. Prin urmare, din cauza lemei I raportul ultim al lui $\overline{AB^2}$ către $\overline{Ab^2}$ este același cu raportul ultim al lui BD către bd . Q. E. D.

CAZUL 2. Să înclinăm pe BD față de AD după un unghi oarecare dat, și raportul ultim al lui BD către bd va fi totdeauna același ca și mai înainte, și de aceea același și raportul ultim $\overline{AB^2}$ către $\overline{Ab^2}$. Q. E. D.

CAZUL 3. Și chiar dacă unghiul D n-ar fi dat, ci dreapta DB converge către un punct dat sau este determinată de vreo altă condiție; totuși unghiurile D , d fiind determinate de o lege comună tind totdeauna spre egalitate și se apropie unul de celălalt mai mult decît cu o diferență oarecare dată, și de aceea la urmă vor fi egale, din cauza lemei I, și prin urmare liniile BD , bd sînt în același raport între ele ca mai sus. Q. E. D.

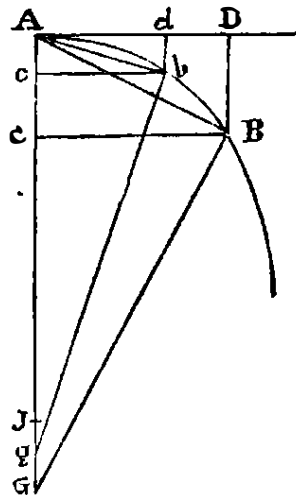
COROLARUL 1. De unde, fiindcă tangentele AD , Ad , arcele AB , Ab și sinusurile lor BC , bc sînt la urmă egale cu coardele AB , Ab ; pătratele lor de asemenea vor fi la urmă ca dreptele subîntinse BD , bd .

COROLARUL 2. Pătratele lor sînt, de asemenea la urmă ca săgețile arcelor, care bisectează coardele și converg spre un punct dat. Căci săgețile sînt ca dreptele subîntinse BD , bd .

COROLARUL 3. Și de aceea săgeata este ca pătratul timpului în care corpul descrie arcuț cu o viteză dată.

COROLARUL 4. Triunghiurile rectilinii ADB , Adb sînt la urmă ca și cuburile laturilor AD , Ad și ca puterile $\frac{3}{2}$ ale laturilor DB , db ; astfel că ele sînt în raportul compus al laturilor AD și DB , Ad și db . În acest fel și triunghiurile ABC , Abc sînt la urmă ca și cuburile laturilor BC , bc .

COROLARUL 5. Și fiindcă DB , db sînt la urmă paralele și ca pătratele lungimilor AD , Ad : ultimele arii curbilinii ADB , Adb vor fi (prin natura parabolei) două treimi ale triunghiurilor rectilinii ADB , Adb ; și segmentele AB , Ab a treia parte a aceluiași triunghiuri. Și de aici aceste arii și aceste segmente vor fi ca și cuburile atît ale tangentelor AD , Ad , cît și ale coardelor și arcelor AB , Ab .



SCOLIE

De altfel în toate acestea presupunem că unghiul de contact nu este nici infinit mai mare decît unghiurile de contact, pe care le formează cercurile cu tangentele lor, nici infinit mai mic decît acestea; adică curbura în punctul A nu este nici infinit de mică nici infinit de mare, și intervalul AJ este de mărime finită. Căci se poate lua DB ca AD^3 : în care caz prin punctul A nu se poate duce nici un cerc între tangenta AD și curba AB și de aceea unghiul de contact va fi infinit mai mic decît cele circulare. Și printr-un raționament analog dacă DB este succesiv ca AD^4 , AD^5 , AD^6 , AD^7 etc. vom avea o serie de unghiuri de contact continuînd la infinit, dintre care fiecare este infinit mai mic decît cel precedent. Și dacă DB este succesiv ca AD^2 , $AD^{3/2}$, $AD^{4/3}$, $AD^{5/4}$, $AD^{6/5}$, $AD^{7/6}$ etc. vom avea o altă serie infinită de unghiuri de contact, dintre care cel dintîi este de același gen cu cele circulare, al doilea infinit mai mare, și fiecare din următoarele infinit mai mare ca cel dinaintea lui. Dar și între două oarecare din aceste unghiuri se poate interpola o serie de unghiuri intermediare mergînd la infinit de ambele părți dintre care fiecare următor va fi infinit mai mare sau mai mic decît cel dinaintea lui. De exemplu dacă între termenii AD^2 și AD^3 se interpolează seria $AD^{13/6}$, $AD^{11/5}$, $AD^{9/4}$, $AD^{7/3}$, $AD^{5/2}$, $AD^{8/3}$, $AD^{11/4}$, $AD^{14/5}$, $AD^{17/6}$ etc. Și iarăși între două unghiuri oarecare ale acestei serii se poate interpola o nouă serie de unghiuri intermediare diferind unul de altul prin intervale infinite. Căci natura nu cunoaște limită.

Cele ce s-au demonstrat despre liniile curbe și despre suprafețele cuprinse de ele, se aplică ușor la suprafețele curbe și la conținuturile solidelor. Am pus înainte aceste leme ca să evit plictiseala de a trebui să deduc demonstrații lungi prin reducerea la absurd, după obiceiul vechilor geometri. Căci demonstrațiile devin mai scurte prin metoda indivizibilelor. Dar fiindcă ipoteza indivizibilelor este mai dură și de aceea metoda se consideră mai

puțin geometrică; am preferat să reduc demonstrațiile celor ce urmează la ultimele sume și rapoarte ale cantităților disparente, și la primele ale celor născînde adică la limitele sumelor și rapoartelor; și de aceea am pus înainte cît de scurt posibil demonstrațiile acelor limite. Căci cu ajutorul lor se obține același rezultat ca și prin metoda indivizibilelor; și de principiile demonstrate ne vom folosi mai sigur. De aceea dacă în cele următoare voi considera cantitățile ca formate din particule, sau dacă voi folosi liniuțe curbe în loc de drepte; nu voi înțelege că este vorba de indivizibile ci de divizibile disparente, nu de sume și rapoarte de părți determinate, ci întotdeauna de limite de sume și rapoarte, și voi referi totdeauna forța acestor demonstrații la metoda lemelor precedente.

Se poate obiecta că nu există o ultimă proporție a cantităților disparente; fiindcă aceasta, înainte ca ele să dispară, nu este ultima, iar cînd au dispărut ea este nulă. Dar în mod analog se poate demonstra că nu există viteză ultimă a unui corp ce ajunge la un loc dat, unde se termină mișcarea: căci aceasta înainte ca corpul să ajungă în acel loc nu este cea din urmă, iar cînd ajunge ea este nulă. Dar răspunsul este ușor. Prin viteza ultimă am înțeles pe aceea cu care se mișcă corpul, și nu înainte de a atinge locul ultim și încetează mișcarea, nici după aceea, ci atunci cînd îl atinge; adică acea viteză însăși cu care corpul ajunge la locul din urmă și cu care mișcarea încetează. Și la fel prin ultimul raport al cantităților disparente trebuie să înțelegem raportul cantităților nu înainte de a dispărea, nu după aceea, ci pe acela cu care ele dispar. Tot așa și primul raport al celor născînde este raportul cu care se nasc. Și suma cea dintîi și cea din urmă este aceea prin care ele încep și încetează să existe (sau să crească sau să descrească). Există o limită pe care viteza la sfîrșitul mișcării o poate atinge, dar nu o poate depăși. Aceasta este viteza ultimă. Și la fel este raportul limitei tuturor cantităților și proporțiilor celor ce încep și încetează. Și fiindcă această limită este sigură și definită, problema de a o determina este strict geometrică. În adevăr tot ceea ce este geometric se poate folosi cu tot dreptul, în alte probleme geometrice care trebuie determinate și demonstrate.

Se mai poate afirma de asemenea că dacă se dau ultimele rapoarte ale cantităților disparente, vor fi date și ultimele mărimi: și astfel orice cantitate va consta din indivizibile, contrar celor demonstrate de *E u c l i d* asupra incommensurabilelor în Cartea a X-a a Elementelor. Dar această obiecție se întemeiază pe o ipoteză falsă. Ultimele rapoarte cu care dispar cantitățile, nu sînt de fapt rapoarte ale ultimelor cantități, ci limite de care se apropie încontinuu rapoartele cantităților ce descreșc fără limită; și de care se pot apropia mai mult decît cu orice diferență dată, dar niciodată nu le pot depăși și nici atinge înainte ca acele cantități să fi descreșcut la infinit. Lucrul se înțelege mai clar în cazul celor infinit de mari. Dacă două cantități a căror diferență este dată, cresc la infinit, va fi dat ultimul raport al acestora, fără îndoială un raport de egalitate, totuși nu vor fi date cantitățile ultime sau maxime al căror raport este acesta. Așadar dacă voind în cele ce urmează, să exprim mai ușor lucrurile voi vorbi despre cantități foarte mici sau disparente, sau ultime; nu trebuie să înțelegi cantități de mărime determinată, ci să te gîndești totdeauna că ele trebuie să descrească fără limită.

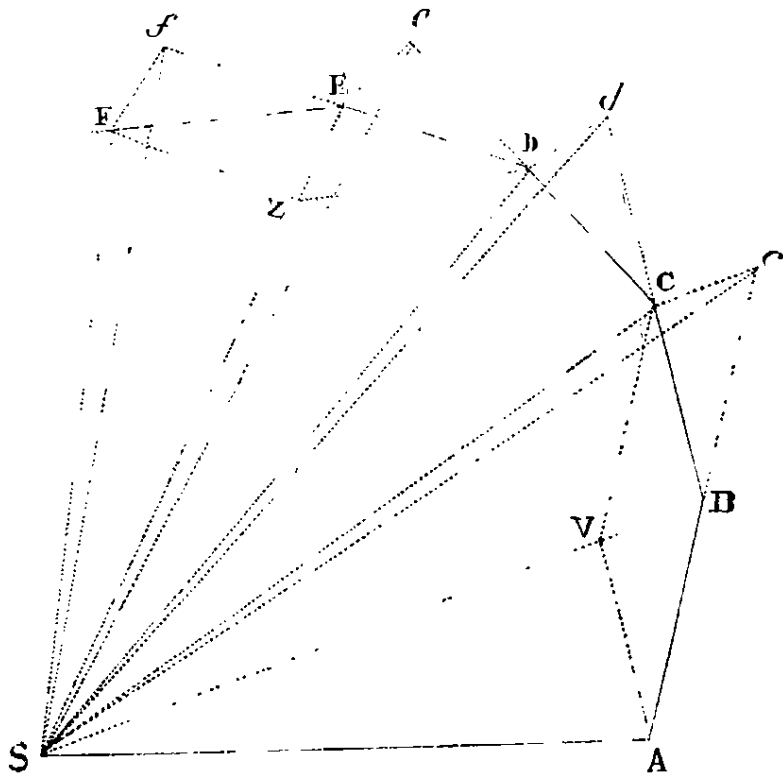
SECȚIUNEA II

Despre determinarea forțelor centripete

PROPOZIȚIA I. TEOREMA I

Ariile pe care le descriu corpurile în rotație cu ajutorul razelor duse la centrul imobil al forțelor, se mențin în plane imobile și sînt proporționale cu timpurile.

Să împărțim timpul în părți egale, și în prima parte a timpului corpul prin forța inerției să descrie dreapta AB . În a doua parte a timpului, dacă nu l-ar împiedica nimic, ar continua în linie dreaptă pînă la c (conform legii I) descriind linia Bc egală cu însuși AB ; astfel că cu ajutorul razelor AS , BS , cS duse la centru, se vor descrie ariile egale ASB , $BS c$. Dar cînd corpul ajunge în B , să presupunem că forța centripetă acționează printr-un impuls unic dar mare, și face ca corpul să se abată de la dreapta BC și să continue de-a lungul dreptei BC . Să ducem cC paralelă cu BS , întîlnind pe BC în C ; și la sfîrșitul celei de-a doua părți a timpului, corpul (din cauza corolarului I al legilor) se va afla în C , în același plan cu triunghiul ASB . Să ducem



SC ; atunci triunghiul SBC , din cauza paralelelor SB , Cc , va fi egal cu triunghiul SBC și de aceea și cu triunghiul SAB . La fel dacă forța centripetă în mod succesiv acționează în C , D , E etc., făcînd ca corpul în diverse intervale de timp să descrie diversele drepte CD , DE , EF etc. toate acestea se vor afla în același plan; și triunghiul SCD va fi egal cu triunghiul SBC , iar SDE cu însuși SCD , și SEF cu SDE . Așadar în timpuri egale se descriu arii egale într-un plan fix: și prin compunere sumele oarecare ale ariilor $SADS$, $SAFS$ sînt între ele ca timpurile în care sînt descrise. Să presupunem acum că numărul triunghiurilor crește și lățimea lor descrește la infinit; și ultimul lor perimetru ADF (din cauza corolarului 4 al lemei III) va fi o linie curbă: și de aceea forța centripetă, cu care corpul este într-una abătut de la tangenta acestei curbe, lucrează încontinuu; și ariile oarecare descrise $SADS$, $SAFS$ totdeauna proporționale cu timpurile descrierii, vor fi în acest caz proporționale cu acele timpuri. Q. E. D.

COROLARUL 1. Viteza corpului atras spre un centru imobil este în spațiile lipsite de rezistență invers proporțională cu perpendiculara dusă din acel centru la tangenta rectilinie a orbitei. Căci viteza în acele locuri A, B, C, D, E este proporțională cu bazele triunghiurilor egale AB, BC, CD, DE, EF și aceste baze sînt invers proporționale cu perpendicularele duse pe ele.

COROLARUL 2. Dacă coardele AB, BC a două arce descrise succesiv de același corp în timpuri egale în spații lipsite de rezistență se întregesc în paralelogramul $ABCV$, și diagonala acestuia BV , se prelungește în ambele părți în poziția pe care o are la urmă cînd acele arce descresc la infinit; ea va trece prin centrul forțelor.

COROLARUL 3. Dacă coardele AB, BC și DE, EF ale arcelor descrise în timpuri egale în spații lipsite de rezistență se întregesc în paralelogramele $ABCV, DEFZ$; forțele în B și E sînt între ele în ultimul raport al diagonalelor, BV, EZ , cînd aceste arce descresc la infinit. Căci mișcările BC și EF ale corpului se compun (din cauza corolarului I al legilor) din mișcările Bc, BV și Ef, EZ : dar BV și EZ egale cu însăși Cc și Ff , în demonstrația acestei propoziții erau născute de impulsurile forței centripete în B și E , astfel că sînt proporționale cu aceste impulsuri.

COROLARUL 4. Forțele cu care corpuri oarecare în spații lipsite de rezistență sînt abătute de la mișcările rectilinii și antrenate pe orbite curbe se rapoartă între ele ca acele săgeți ale arcelor descrise în timpuri egale care converg spre centrul forțelor, și bisectează coardele cînd acele arce descresc la infinit. Căci aceste săgeți sînt jumătățile diagonalelor menționate în corolarul 3.

COROLARUL 5. Și de aceea forțele sînt în același raport către forța gravitației precum aceste săgeți către săgețile perpendiculare pe orizontul arcelor parabolice, pe care le descriu proiectilele în același timp.

COROLARUL 6. Aceleași rezultate se obțin prin corolarul V al legilor cînd planele în care se mișcă corpurile împreună cu centrele forțelor care sînt situate în ele nu rămîn în repaus, ci se mișcă uniform și rectiliniu.

PROPOZIȚIA II. TEOREMA II

Orice corp, ce se mișcă pe o linie curbă oarecare descrisă într-un plan, și raza dusă la un punct fie imobil, fie înaintînd cu o mișcare rectilinie uniformă descrie în jurul acelui punct arii proporționale cu timpurile, este acționat de o forță centripetă îndreptată spre acel punct.

CAZUL 1. Căci orice corp ce se mișcă pe o linie curbă, este abătut de la cursul rectiliniu de o forță oarecare ce acționează asupra lui (conform legii I). Și forța aceea, prin care corpul este abătut de la drumul rectiliniu și este silit să descrie triunghiuri cît mai mici SAB, SBC, SCD etc., egale în jurul punctului imobil S , în timpuri egale, acționează în locul B după o linie paralelă cu cC (conform propoziției XI din Cartea I a Elementelor și legii II) adică, după linia BS ; și în locul C după linia paralelă cu dD , adică după linia SC etc. Prin urmare acționează totdeauna după linii îndreptate spre acel punct imobil S . Q.E.D.

corp T ; primul corp L continuă a descrie în jurul celui alt corp T aceleași arii ca mai înainte: iar forța cu care era acționat celălalt corp T , este nimicită acum prin forța egală și de sens contrar cu ea; și de aceea (potrivit legii I) celălalt corp T lăsat de sine sau va rămînea nemișcat sau se va mișca cu o mișcare rectilinie uniformă: și primul corp L acționat de diferența forțelor, adică de forța ce rămîne continuă să descrie în jurul celui alt corp T arii proporționale cu timpurile. Prin urmare (potrivit teoremei II) diferența forțelor este îndreptată spre celălalt corp T ca spre un centru. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă un corp L cu raza dusă la un alt corp T descrie arii proporționale cu timpurile; și din forța întreagă (fie simplă, fie compusă din mai multe forțe după corolarul II al legilor) cu care este acționat corpul cel dintîi L se scade (potrivit aceluiași corolar al legilor), întreaga forță acceleratoare cu care este acționat celălalt corp: întreaga forță rămasă cu care este acționat corpul cel dintîi este îndreptată spre corpul celălalt T ca spre un centru.

COROLARUL 2. Și dacă ariile sînt aproximativ proporționale cu timpurile forța ce rămîne este îndreptată aproximativ spre celălalt corp T .

COROLARUL 3. Și viceversa, dacă forța ce rămîne este îndreptată aproximativ spre celălalt corp T , ariile vor fi aproximativ proporționale cu timpurile.

COROLARUL 4. Dacă corpul L cu raza dusă la celălalt corp T descrie arii, care comparate cu timpurile sînt foarte neegale; și celălalt corp T sau este în repaus sau se mișcă uniform în linie dreaptă; acțiunea forței centripete îndreptate spre celălalt corp T este sau nulă, sau se amestecă și se compune cu acțiunile foarte puternice ale altor forțe: și întreaga forță compusă din toate dacă sînt mai multe forțe se îndreaptă spre un alt centru (fie imobil, fie mobil). Același lucru se obține cînd celălalt corp se mișcă cu o mișcare oarecare; dacă se adună forța centripetă ce rămîne după scăderea forței totale ce acționează asupra celui alt corp T .

SCOLIE

Deoarece descrierea uniformă a ariilor este indicația centrului, spre care tinde acea forță, prin care corpul este acționat mai tare și prin care este abătut de la mișcarea rectilinie, și este reținut în orbita sa; pentru ce nu am folosi în cele următoare descrierea uniformă a ariilor ca un indiciu al centrului în jurul căruia are loc orice mișcare circulară în spațiile libere?

PROPOZIȚIA IV. TEOREMA IV

Forțele centripete ale corpurilor care descriu diverse cercuri cu mișcare uniformă sînt îndreptate spre centrele acelor cercuri; și sînt între ele precum pătratele arcelor descrise în același timp, divizate prin razele cercurilor.

Aceste forțe sînt îndreptate spre centrele cercurilor potrivit propoziției II și corolarului 2 al propoziției I și sînt între ele potrivit corolarului 4, propoziția I, precum sinus versus-urile arcelor descrise în timpuri egale cît se poate de mici, adică precum pătratele aceluiași arce divizate prin diametrele cercurilor potrivit lemei VII și de aceea, fiindcă aceste arce sînt ca arcele descrise în timpuri egale, și diametrele sînt ca razele lor; forțele vor

fi precum pătratele arcelor oarecare descrise în același timp divizate prin razele cercurilor. Q.E.D.

COROLARUL 1. Deoarece arcele sînt ca vitezele corpurilor, forțele centripete vor fi precum pătratele vitezelor divizate cu razele.

COROLARUL 2. Și fiindcă timpurile periodice sînt direct proporționale cu razele și invers proporționale cu vitezele; forțele centripete sînt precum razele divizate prin timpurile periodice.

COROLARUL 3. De unde, dacă timpurile periodice sînt egale, și de aceea vitezele sînt ca razele, forțele centripete de asemenea sînt ca razele: și invers.

COROLARUL 4. Dacă și timpurile periodice și vitezele sînt ca rădăcinile pătrate ale razelor; forțele centripete vor fi egale între ele: și invers.

COROLARUL 5. Dacă timpurile periodice sînt ca razele și de aceea vitezele egale; forțele centripete vor fi inverse razelor: și invers.

COROLARUL 6. Dacă timpurile periodice sînt ca puterea $\frac{3}{2}$ a razelor și de aceea vitezele în raport invers cu rădăcinile pătrate ale razelor; forțele centripete vor fi inverse cu pătratele razelor: și invers.

COROLARUL 7. Și în general, dacă timpul periodic este ca puterea R' a razei R , și de aceea viteza este inversă cu puterea R'^{-1} a razei; forța centripetă va fi inversă cu puterea R^{2n-1} a razei; și invers.

COROLARUL 8. Toate acestea spuse despre timpurile, vitezele și forțele cu care corpurile descriu părți asemenea ale unor figuri oarecare asemenea și avînd centrele situate în poziții similare în acele figuri, rezultă din demonstrația celor precedente aplicate la aceste cazuri. Se aplică însă substituind descrierea uniformă a ariilor în locul mișcării uniforme și folosind distanțele corpurilor de la centre ca raze.

COROLARUL 9. Din aceeași demonstrație rezultă de asemenea că arcul pe care-l descrie un corp ce se mișcă uniform pe un cerc dat cu o forță centripetă într-un timp oarecare, este media proporțională între diametrul cercului și căderea corpului produsă de aceeași forță dată și efectuată în același timp.

SCOLIE

Cazul corolarului 6 se aplică la corpurile cerești, (după cum au arătat compatrioții noștri Wren, Hooke și Halley independent unul de altul) și de aceea m-am hotărît să expun mai pe larg în cele ce urmează cele ce privesc forța centripetă descrescătoare în raport cu pătratele distanțelor de la centre.

Apoi cu ajutorul propoziției precedente și a corolarelor aceleia se studiază și raportul forței centripete către o forță oarecare cunoscută, cum este aceea a gravitației. Căci dacă un corp datorită forței gravitației sale se rotește pe un cerc concentric cu Pămîntul, această gravitate este forța lui centripetă. Dar din căderea corpurilor grele se determină și timpul unei revoluții și arcul descris într-un timp oarecare dat, potrivit corolarului 9 al acesteia, și prin astfel de propoziții Huygens în excelentul său tratat *De Horologio oscillatorio* a comparat forța gravitației cu forțele centrifuge ale celor ce se rotesc.

Cele precedente se mai pot demonstra și astfel. Într-un cerc oarecare să ne închipuim descris un poligon cu oricîte laturi. Și dacă corpul mișcîndu-se pe laturile poligonului cu o viteză dată este reflectat la diversele

lui unghiuri de către cerc; forța cu care el apasă cercul prin diversele reflexii, va fi ca viteza lui: astfel că suma forțelor într-un timp dat va fi precum viteza, și numărul reflexiilor luate împreună: adică (dacă specia poligonului ne este dată) ca lungimea descrisă în acel timp dat, și mărită sau micșorată în raportul lungimii lui către raza cercului menționat; adică precum pătratul lungimii lui divizat prin rază: și de aceea dacă poligonul cu laturile micșorate la infinit coincide cu cercul, precum pătratul arcului descris într-un timp dat divizat prin rază. Aceasta este forța centrifugă, cu care corpul acționează asupra cercului; și cu aceasta este egală forța contrară cu care cercul respinge neconținut corpul spre centru.

PROPOZIȚIA V. PROBLEMA I

Fiind dată în locuri oarecare viteza cu care un corp descrie o figură dată prin mijlocirea forțelor îndreptate spre un centru oarecare comun, să se afle acel centru.

Să presupunem că figura descrisă este atinsă în punctele P , Q , R , de trei drepte PT , TQV , VR , concurente în T și V . Să ridicăm pe tangente perpendiculare PA , QB , RC invers proporționale cu vitezele corpului în acele puncte P , Q , R în care sînt ridicate; adică în așa fel ca PA să fie către QB după cum viteza din Q către viteza din P , și QB către RC după cum viteza din R către viteza din Q . Prin capetele A , B , C ale perpendicularelor să ducem sub unghiuri drepte AD , DBE , EC concurente în D și E ; și ducînd TD , VE ele vor concura în centrul căutat S .

Căci perpendicularele duse din centrul S pe tangentele PT , QT (potrivit corolarului 1, propoziția I) sînt inverse vitezelor corpului în punctele P și Q ; și de aceea prin construcție sînt ca perpendicularele AP , BQ , adică precum perpendicularele duse din punctul D la tangente. De unde se deduce ușor că punctele S , D , T se află pe o dreaptă, și în mod analog și punctele S , E , V sînt pe o dreaptă; și de aceea centrul S se află la intersecția dreptelor TD , VE . Q.E.D.

PROPOZIȚIA VI. TEOREMA V

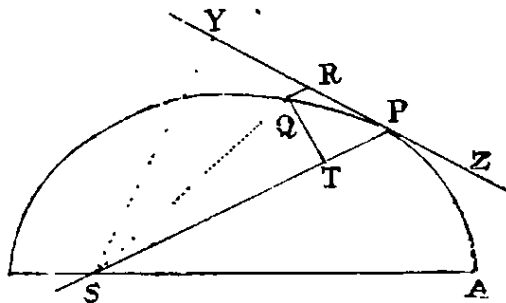
Dacă un corp se mișcă într-un spațiu lipsit de rezistență în jurul unui centru imobil pe o orbită oarecare, și descrie un arc oarecare abia născînd într-un timp cît se poate de mic, și ne închipuim dusă săgeata arcului care bisectează coarda și prelungită trece prin centrul forțelor: forța centripetă va fi în mijlocul arcului, direct proporțională cu săgeata și invers proporțională cu pătratul timpului.

Căci săgeata într-un timp dat este ca forța (potrivit corolarului 4, propoziția I) și timpul crescînd într-un raport oarecare, din cauza creșterii

arcului în același raport săgeata va crește cu pătratul raportului (potrivit corolarului 2 și 3, lema XI) și de aceea este precum forța și pătratul timpului. Împărțim de ambele părți prin pătratul timpului și forța va fi direct proporțională cu săgeata și invers cu pătratul timpului. Q.E.D.

Același lucru se demonstrează ușor și prin corolarul 4, lema X.

COROLARUL 1. Dacă corpul P învîrtindu-se în jurul centrului S descrie linia curbă APQ , iar dreapta ZPR atinge acea curbă într-un punct oarecare P ; și se duce la tangentă dintr-un alt punct oarecare Q al curbei QR paralelă cu distanța SP ; și se coboară QT perpendiculară la distanța SP : forța centripetă va fi inversă solidului $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$; dacă se ia totdeauna acea mărime a solidului care să fie cea din urmă cînd coincid punctele P și Q . Căci QR este egal cu săgeata dublului arcului QP , în mijlocul căruia este P , și dublul triunghiului SQP sau $SP \times QT$ este proporțional cu timpul în care se descrie acest arc dublu: și de aceea poate fi privit ca reprezentînd timpul.



COROLARUL 2. Din aceeași cauză forța centripetă este invers proporțională cu solidul $\frac{SY^2 \times QP^2}{QR}$, dacă numai SY este perpendiculara dusă din centrul forțelor la tangentă PR a orbitei. Căci dreptunghiurile $SY \times QP$ și $SP \times QT$ sînt egale.

COROLARUL 3. Dacă orbita este sau un cerc, sau atinge cercul în mod concentric, sau îl taie concentric, adică face un unghi de contact cît se poate de mic cu cercul, avînd aceeași curbă și aceeași rază de curbură în punctul de contact P ; și dacă PV este coarda acestui cerc dusă de la corp prin centrul forțelor: forța centripetă va fi inversă solidului $SY^2 \times PV$. Căci PV este $\frac{QP^2}{QR}$.

COROLARUL 4. Acestea fiind date, forța centripetă este proporțională cu pătratul vitezei și invers proporțională cu coarda. Căci potrivit corolarului 1, propoziția I viteza este invers proporțională cu perpendiculara SY .

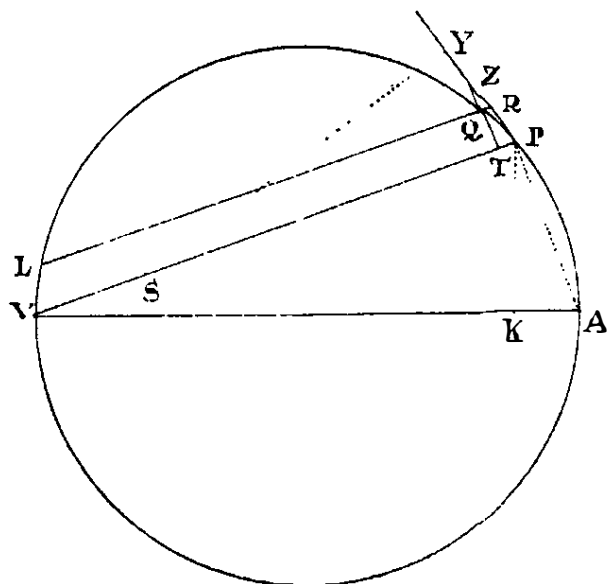
COROLARUL 5. De aici dacă se dă o figură curbilinie oarecare APQ și în ea se dă și punctul S spre care se îndreaptă neconținut forța centripetă, se poate afla legea forței centripete cu care un corp oarecare P încontinuu retras de la drumul rectiliniu va fi reținut pe perimetrul acelei figuri și o descrie rotindu-se. Fără îndoială trebuie să se calculeze fie solidul $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ fie solidul $SY^2 \times PV$ invers proporțional cu această forță. În problemele ce urmează vom da exemple despre acest lucru.

PROPOZIȚIA VII. PROBLEMA II

Presupunînd că un corp se mișcă pe circumferința unui cerc, se caută legea forței centripete ce tinde spre un punct oarecare dat

Fie $VQPA$ circumferința cercului; S punctul dat spre care tinde forța ca spre centrul său, P corpul ce se mișcă pe circumferință, Q locul cel mai

apropiat în care se va mișca, și PRZ tangenta cercului la locul precedent. Prin punctul S să ducem coarda PV ; și după aceasta să ducem diametrul VA al cercului, să unim AP ; și să coborâm pe SP perpendiculara QT



care prelungită să întâlnească tangenta PR în Z ; și în sfârșit prin punctul Q să ducem LR paralel cu SP și întâlnind atît cercul în L cît și tangenta PZ în R . Și din cauza triunghiurilor asemenea ZQR, ZTP, VPA , vom avea RP^2 adică QRL către QT^2 după cum AV^2 către PV^2 . Astfel că $\frac{QRL \times PV^2}{AV^2}$

este egal cu QT^2 . Acestea egale să le înmulțim cu $\frac{SP^2}{QR}$ și punctele P și Q coincidînd să scriem PV în loc de RL . Astfel va fi $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ egal cu $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$.

Prin urmare (potrivit corolarului 1 și 5 propoziția VI) forța

centripetă este invers proporțională cu $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ adică (AV^2 fiind dat) invers proporțională cu pătratul distanței sau înălțimii SP și cubul coardei PV luate împreună. Q. E. I.

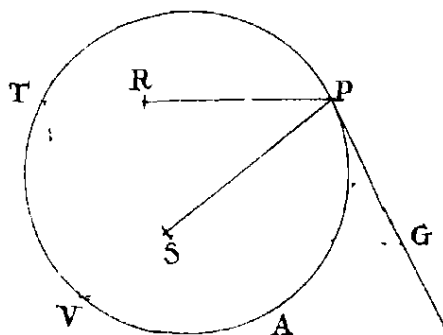
Aceeași altfel

Pe tangenta PR prelungită să coborâm perpendiculara SY ; și din cauza triunghiurilor asemenea SYP, VPA ; vom avea AV către PV după cum SP către SY ; și de aceea $\frac{SP \times PV}{AV}$ este egal cu SY , iar $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ este egal cu $SY^2 \times PV$.

Și de aceea (potrivit corolarului 3 și 5, propoziția VI) forța centripetă este invers proporțională cu $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ adică AV fiind dat invers proporțională cu $SP^2 \times PV^3$. Q.E.I.

COROLARUL 1. De aici dacă punctul dat S spre care tinde totdeauna forța centripetă se află pe circumferința acestui cerc, gîndește-te la V , forța centripetă va fi invers proporțională cu puterea a cincea a înălțimei SP .

COROLARUL 2. Forța cu care corpul P se învîrtește în cercul $APTV$ în jurul centrului S al forțelor este către forța cu care același corp P se poate învîrți în același cerc și în același timp periodic în jurul altui centru oarecare R al forțelor, după cum $RP^2 \propto SP$ către cubul dreptei SG , dusă de la primul centru S al forțelor la tangenta PG a orbitei, paralel cu distanța corpului de la al doilea centru al forțelor.



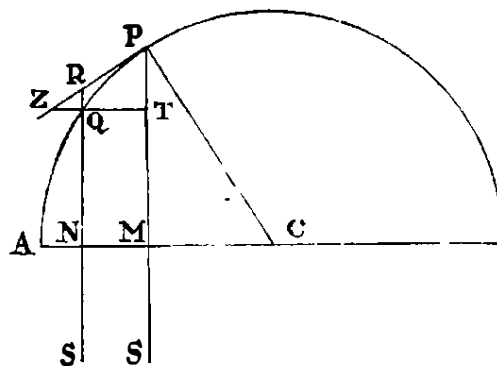
Căci prin construcția acestei propoziții forța dintîi se rapoartă către forța din urmă după cum $RP^2 \times PT^3$ către $SP^3 \times PV^3$, adică după cum $SP \times RP^2$ către $\frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$, adică (din cauza triunghiurilor asemenea PSG , TPV) către SG^3 .

COROLARUL 3. Forța cu care corpul P se învîrtește într-o orbită oarecare în jurul centrului S al forțelor, este către forța cu care același corp P se poate învîrți în aceeași orbită și în același timp periodic în jurul altui centru oarecare R al forțelor, după cum solidul $SP \times RP^2$ conținut între distanța corpului de la primul centru S al forțelor și pătratul distanței lui de la al doilea centru R al forțelor, către cubul dreptei SG , dusă de la primul centru S al forțelor la tangenta PG a orbitei, paralel cu distanța RP a corpului de la al doilea centru al forțelor. Căci forțele în această orbită la un punct oarecare P al ei sînt aceleași ca în cercul de aceeași curbura.

PROPOZITIA VIII. PROBLEMA III

Presupunînd că un corp se mișcă pe semicercul PQA : să se afle legea forței centripete îndreptată spre un punct S atît de îndepărtat încît toate liniile PS , RS duse la el să poată fi considerate ca paralele.

De la centrul C al semicercului să ducem semidiametrul CA tăind perpendicular aceste paralele în M și N , și să unim CP . Din cauza triunghiurilor asemenea CPM , PZT și RZQ avem CP^2 către PM^2 după cum PR^2 către QT^2 , și din natura cercului PR^2 este egal cu dreptunghiul $QR \times (RN + QN)$, sau coincizând punctele P și Q cu dreptunghiul $QR \times 2PM$. Prin urmare CP^2 este către PM^2 după cum $QR \times 2PM$ către QT^2 , astfel că $\frac{QT^2}{QR}$ este egal cu $\frac{2PM^3}{CP^2}$ și $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$ este egal cu $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$. Așadar (potrivit corolarului 1 și 5, propoziția VI), forța centripetă este invers proporțională cu $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, adică (neglijând raportul determinat $2\frac{SP^2}{CP^2}$) invers proporțională cu PM^3 . Q. E. I.



Același lucru se deduce ușor și din propoziția precedentă.

SCOLIE

Și printr-un raționament asemănător se află că un corp se mișcă pe o elipsă, sau și pe o hiperbolă sau parabolă, sub acțiunea unei forțe centripete care este invers proporțională cu cubul ordonatei dirijate spre centrul foarte îndepărtat al forțelor.

se întregește paralelogramul $QvPR$ vom avea (din proprietățile conicelor) dreptunghiul PvG către Qv^2 după cum PC^2 către CD^2 și (din cauza triunghiurilor asemenea QvT , PCF) Qv^2 este către QT^2 după cum PC^2 către PF^2 și compunând rapoartele, dreptunghiul PvG către QT^2 după cum PC^2 către CD^2 și PC^2 către

PF^2 adică, vG către $\frac{QT^2}{Pv}$ după

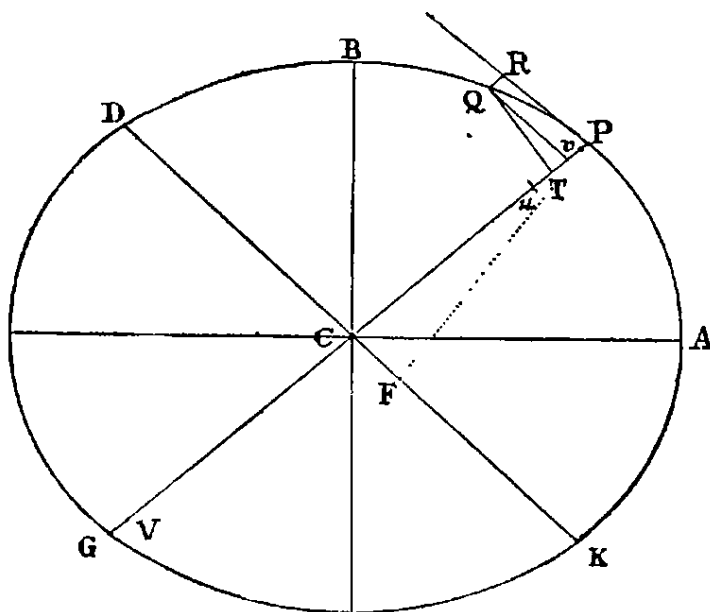
cum PC^2 către $\frac{CD^2 \times PF^2}{PC^2}$. Să

scriem QR în loc de Pv și (potrivit lemei XII) $BC \times CA$ în loc de $CD \times PF$, precum și (coincizând punctele P și Q) $2PC$ în loc de vG , și schimbînd între ele extremele și mezii va fi $\frac{QT^2 \times PC^2}{QR}$ egal

cu $\frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$. Așadar (potrivit

corolarului 5, propoziția VI) forța centripetă este invers proporțională cu $\frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$;

adică (fiind dat $2BC^2 \times CA^2$) invers proporțională cu $\frac{1}{CP}$; adică proporțională cu distanța PC . Q. E. I.



Aceeași altfel

Pe dreapta PG de cealaltă parte a punctului T să luăm punctul u astfel ca Tu să fie egal cu Tv ; apoi să luăm uV care să fie către vG după cum DC^2 către PC^2 . Și fiindcă din proprietățile conicelor rezultă că Qv^2 se raportează către PvG după cum DC^2 către PC^2 , vom avea Qv^2 egal cu $Pv \times uV$. Să adunăm de ambele părți dreptunghiul uPv și vom obține pătratul coardei arcului PQ egal cu dreptunghiul VpV ; și de aceea cercul care atinge secțiunea conică în P și trece prin punctul Q , va trece și prin punctul V . Să facem să coincidă punctele P și Q , și raportul uV către vG , care este același cu raportul lui DC^2 către PC^2 , va fi ca raportul lui PV către PG , sau PV către $2PC$; și de aceea PV va fi egal cu $2\frac{DC^2}{PC}$. Deci forța cu care corpul P se rotește pe elipsă, va fi invers proporțională cu $2\frac{DC^2}{PC} \cdot PF^2$ (potrivit corolarului 3, propoziția VI), adică (fiind dat $2DC^2 \cdot PF^2$) direct proporțional cu PC . Q.E.I.

COROLARUL 1. Așadar forța este ca distanța corpului de la centrul elipsei: și invers dacă forța este ca distanța, corpul se va mișca pe o elipsă avînd centrul în centrul forțelor, sau poate pe un cerc în care poate degenera elipsa.

COROLARUL 2. Și timpurile periodice de revoluție făcute pe toate elipsele în jurul aceluiași centru vor fi egale. Căci acele timpuri pentru elipse asemenea sînt egale (potrivit corolarului 3 și 8, propoziția IV), iar pentru

elipsele avînd axa mare comună sînt între ele direct proporționale cu ariile totale ale elipselor, și invers proporționale cu părțile ariilor descrise în același timp; adică proporționale cu axele mici și invers proporționale cu vitezele corpurilor în vîrfurile principale; adică direct proporționale cu axele mici, și invers proporționale cu ordonatele axei comune; și de aceea (din cauza egalității rapoartelor directe și inverse) în raport de egalitate.

S C O L I E

Dacă elipsa al cărei centru se îndepărtează la infinit se transformă în parabolă, corpul se va mișca pe această parabolă; și forța îndreptată spre centrul ce se află la o distanță infinită va deveni constantă. Aceasta este teorema lui *G a l i l e u*. Și dacă secțiunea parabolică a conului (schimbînd înclinația planului față de conul secționat) se transformă în hiperbolă, corpul se va mișca pe perimetrul acesteia cu o forță centripetă schimbată în centrifugă. Și după cum într-un cerc sau elipsă dacă forțele sînt îndreptate spre centrul figurii situat pe abscisă, aceste forțe cînd ordonatele cresc sau descresc într-un raport oarecare dat, sau și cînd se schimbă unghiul de înclinație al ordonatelor față de abscisă, totdeauna cresc sau descresc în raportul distanțelor de la centru, dacă timpurile periodice rămîn egale; la fel și în toate figurile cînd ordonatele cresc sau descresc într-un raport oarecare dat, sau unghiul ordonatei variază într-un mod oarecare, menținîndu-se timpul periodic; forțele ce tind spre un centru oarecare situat pe abscisă în diversele ordonate cresc sau descresc în raportul distanțelor de la centru.

Qv^2 după cum PC^2 către CD^2 ; și (potrivit corolarului 2, lema VII) Qv^2 către Qx^2 când punctele Q și P coincid este un raport de egalitate; și Qx^2 sau Qv^2 este către QT^2 după cum EP^2 către PF^2 , adică după cum CA^2 către PF^2 , sau (potrivit lemei XII) după cum CD^2 către CB^2 : și înmulțind toate aceste rapoarte $L \times QR$ este către QT^2 după cum $AC \times L \times PC^2 \times CD^2$ sau $2CB^2 \times PC^2 \times CD^2$ către $PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, sau precum $2PC$ către Gv . Dar dacă punctele P și Q coincid, $2PC$ și Gv sînt egale. Prin urmare $L \times QR$ și QT^2 proporționale cu ele sînt egale. Să înmulțim aceste mărimi egale cu $\frac{SP^2}{QR}$ și va fi $L \times SP^2$ egal cu $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Prin urmare (potrivit corolarului 1 și 5, propoziția VI) forța centripetă este invers proporțională cu $L \times SP^2$, adică invers proporțională cu pătratul distanței SP . Q.E.I.

Aceeași altfel

Să se afle forța îndreptată de la centrul C al hiperbolei. Aceasta se va afla proporțional cu distanța CP . De aici în adevăr (potrivit corolarului 3, propoziția VII) forța îndreptată spre focarul S va fi ca $\frac{PE^3}{SP^2}$, adică PE fiind dată, invers proporțională cu SP^2 . Q.E.I.

În mod analog se demonstrează, că schimbînd această forță centripetă în centrifugă corpul se va mișca pe hiperbola opusă.

LEMA XIII

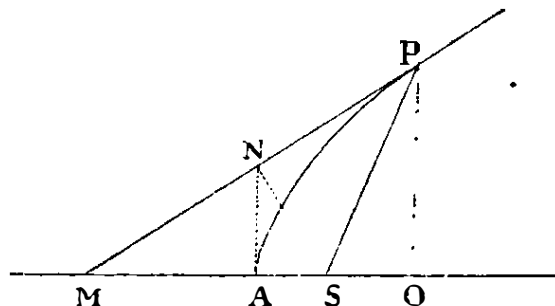
Parametrul parabolei aparținînd unuia din vîrfuri este cvadruplul distanței acelu vîrf de la focarul figurii.

Este evident din proprietățile conicelor.

LEMA XIV

Perpendiculara dusă de la focarul parabolei la tangenta ei este media proporțională între distanțele focarului de la punctul de contact și de la vîrf principal al figurii.

Căci fie AP parabola, S focarul ei, A vîrf principal, P punctul de contact, PO ordonata la diametrul principal, PM tangenta ce întîlnește diametrul principal în M , și SN linia perpendiculară dusă din focar pe tangentă. Să unim AN și fiindcă MS și SP , MN și NP , MA și AO sînt egale, dreptele AN și OP vor fi paralele; și de aceea triunghiul SAN va fi dreptunghic în A , și asemenea triunghiurilor egale SNM , SNP : deci PS este către SN precum SN către SA . Q.E.D.



COROLARUL 1. PS^2 este către SN^2 precum PS către SA .

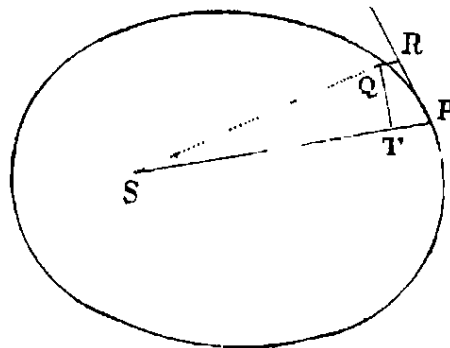
COROLARUL 2. Și fiindcă SA este dat, SN^2 este ca PS .

COROLARUL 2. Dacă viteza cu care corpul pleacă din locul său P este aceea cu care se poate descrie linioara PR într-o fracție oarecare minimă de timp; și forța centripetă astfel ca să poată mișca același corp în același timp prin spațiul QR : acest corp se va mișca pe o secțiune conică oarecare, a cărei parametru principal este cantitatea $\frac{QT^2}{QR}$ care este ultima sa stare când liniile PR , QR descresc la infinit. În aceste corolare consider cercul ca o elipsă, și exceptez cazul când corpul cade spre centru pe o dreaptă.

PROPOZIȚIA XIV. TEOREMA VI

Dacă mai multe corpuri se rotesc în jurul unui centru comun, și forța centripetă este invers proporțională cu pătratul distanței locurilor de la centru: zic că parametrii principali ai orbitelor sînt proporționali cu pătratele ariilor, pe care le descriu corpurile cu razele duse la centru în același timp.

Căci (potrivit corolarului 2, propoziția XIII) parametrul L este egal cu cantitatea $\frac{QT^2}{QR}$ care este cea din urmă când se confundă punctele P și Q . Dar linia minimă QR într-un timp dat este proporțională cu forța centripetă generatoare, adică (prin ipoteză) invers proporțională cu SP^2 . Prin urmare $\frac{QT^2}{QR}$ este ca $QT^2 \times SP^2$, adică parametrul L este proporțional cu pătratul ariei $QT \times SP$. Q.E.D.



COROLAR. De aici, aria întreagă a elipsei, și dreptunghiul proporțional cu ea, cuprins de axe, este ca produsul dintre rădăcina pătrată a parametrului și timpul periodic. Căci întreaga arie este ca aria $QT \times SP$, descrisă într-un timp dat, înmulțită cu timpul periodic.

PROPOZIȚIA XV. TEOREMA VII

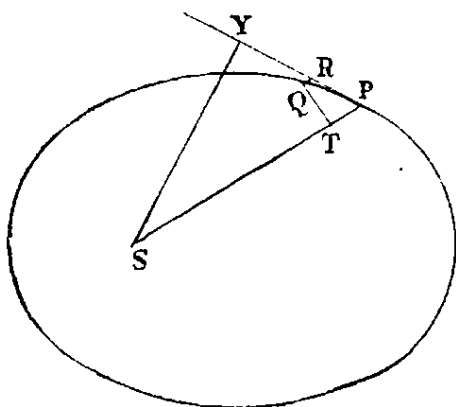
În aceleași condiții, zic că timpurile periodice pe elipse sînt ca puterea $3/2$ a axelor mari.

Căci axa mică este media proporțională între axa mare și latura dreaptă, și astfel dreptunghiul format de axe este ca produsul rădăcinii pătrate a laturii drepte prin puterea $3/2$ a axei mari. Dar acest dreptunghi (potrivit corolarului, propoziția XIV) este ca produsul rădăcinii pătrate a parametrului cu timpul periodic. Să reducem în ambele părți raportul rădăcinii pătrate a parametrului și va rămîne că puterea $3/2$ a axei mari este proporțională cu timpul periodic. Q.E.D.

COROLAR. Așadar timpurile periodice pe elipse sînt aceleași și pe cercurile ai căror diametri sînt egali cu axele mari ale elipselor,

PROPOZIȚIA XVI. TEOREMA VIII

În aceleași condiții și ducînd la corpuri linii drepte care ating acolo orbitele, și ducînd de la focarul comun perpendiculare la aceste tangente: zic că vitezele corpurilor sînt ca produsul dintre raportul invers al perpendicularelor și rădăcina pătrată a parametrilor principali.



Din focarul S să ducem la tangenta PR perpendiculara SY , și viteza corpului P va fi invers proporțională cu rădă-

cina pătrată a cantității $\frac{SY^2}{L}$. Căci acea viteză este precum arcul cît se poate de mic PQ descris într-o fracțiune dată de timp, adică (potrivit lemei VII) ca tangenta PR , adică deoarece PR este proporțional cu QT și SP cu SY , ca $\frac{SP \times QT}{SY}$ sau invers proporțională cu SY și direct proporțională cu $SP \times QT$; și $SP \times QT$ este ca aria descrisă într-un timp dat, adică (potrivit propoziției XIV) ca rădăcina pătrată a parametrului. Q.E.D.

COROLARUL 1. Parametrii principali sînt ca produsul dintre pătratul perpendicularelor și al vitezelor.

COROLARUL 2. Vitezele corpurilor la distanțele maxime și minime de la focarul comun sînt invers proporționale cu distanțele și direct proporționale cu rădăcina pătrată a parametrilor principali. Căci acele perpendiculare sînt însăși distanțele.

COROLARUL 3. Și de aceea viteza într-o secțiune conică, la distanța maximă sau minimă de la focar este către viteza pe un cerc la aceeași distanță de la centru ca rădăcina pătrată a parametrului principal către dublul acelei distanțe.

COROLARUL 4. Vitezele corpurilor ce se rotesc pe elipse la distanțe mijlocii de la focarul comun, sînt aceleași cu ale corpurilor care se rotesc pe cercuri la aceleași distanțe; adică (potrivit corolarului 6, propoziția IV) invers proporționale cu rădăcina pătrată a distanțelor. Căci perpendicularele sînt acum semiaxele mici, și acestea sînt ca medii proporționale între distanțe și parametre. Să înmulțim acest raport invers cu rădăcina pătrată a raportului parametrilor și vom avea rădăcina pătrată a raportului invers al distanțelor.

COROLARUL 5. În aceeași figură sau și în figuri diferite, ai căror parametri principali sînt egali, viteza corpului este invers proporțională cu perpendiculara coborîtă din focar pe tangentă.

COROLARUL 6. Într-o parabolă viteza este invers proporțională cu rădăcina pătrată a distanței corpului de la focarul figurii; într-o elipsă variază mai mult, într-o hiperbolă mai puțin decît în acest raport. Căci (potrivit corolarului 2, lema XIV) perpendiculara coborîtă din focar pe tangentă parabolei este proporțională cu rădăcina pătrată a distanței. Într-o hiperbolă, perpendiculara variază mai puțin, într-o elipsă mai mult.

COROLARUL 7. Într-o parabolă viteza corpului la o distanță oarecare de focar este către viteza corpului ce se rotește pe un cerc la aceeași distanță

de centru ca rădăcina pătrată din doi către unitate; într-o elipsă este mai mică, într-o iperbolă mai mare decât în acest raport. Căci potrivit corolarului 2 al acestei propoziții viteza în vârful parabolei este în acest raport, și conform corolarului 6 al acesteia și al propoziției IV se păstrează aceeași proporție la toate distanțele. De aici și pe parabolă viteza este pretutindeni egală cu viteza unui corp ce se rotește pe un cerc la jumătate distanță; pe elipsă este mai mică, pe hiperbolă mai mare.

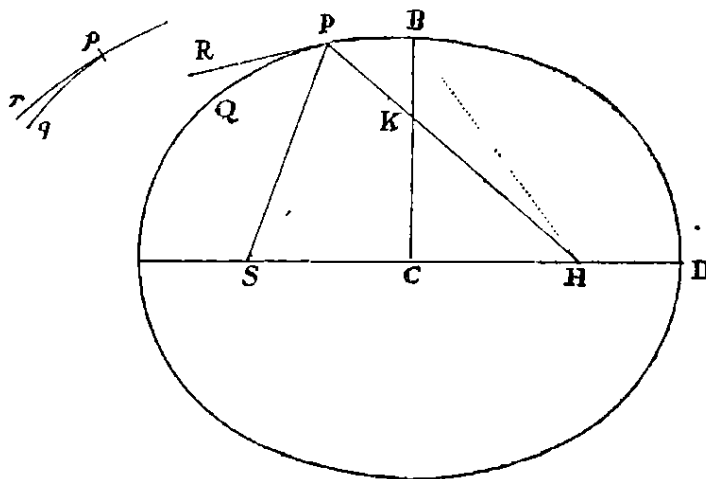
COROLARUL 8. Viteza unui corp ce se rotește pe o secțiune conică oarecare este către viteza corpului ce se rotește pe un cerc la distanța jumătății parametrului principal al secțiunii, ca acea distanță către perpendiculara coborâtă din focar pe tangenta secțiunii. Aceasta este evident din cauza corolarului 5.

COROLARUL 9. De unde fiindcă (potrivit corolarului 6, propoziția IV) viteza corpului ce se rotește pe acest cerc, este către viteza corpului ce se rotește pe un alt cerc oarecare în raport invers cu rădăcina pătrată a distanțelor; în același fel viteza corpului ce se rotește pe o secțiune conică va fi către viteza corpului ce se rotește pe un cerc la aceeași distanță, ca media proporțională între acea distanță comună și jumătatea parametrului principal al secțiunii către perpendiculara coborâtă din focarul comun pe tangenta secțiunii.

PROPOZIȚIA XVII. PROBLEMA IX

Presupunând că forța centripetă este invers proporțională cu pătratul distanței locurilor de la centru, și că valoarea absolută a acelei forțe este cunoscută: se caută linia, pe care o descrie corpul ce pornește dintr-un loc dat cu o viteză dată după o dreaptă dată.

Forța centripetă îndreptată spre punctul S , fie aceea cu care corpul p se rotește pe o orbită oarecare pq dată, și fie cunoscută viteza acestuia în locul p . Din locul P să pornească după linia PR corpul P cu o viteză dată, și imediat constrins de forța centripetă să devieze de pe ea pe secțiunea conică PQ . Prin urmare dreapta PR o atinge pe aceasta în P . Să presupunem de asemenea că dreapta pr atinge orbita pq în p , și dacă din S ne închipuim coborâte perpendiculare pe acele tangente, parametrul principal al secțiunii conice va fi (potrivit corolarului 1, propoziția XVI) către parametrul principal al orbitei ca produsul dintre pătratul raportului perpendicularelor și pătratul raportului vitezelor, și de aceea este dat. Fie L parametrul secțiunii conice. Afară de aceea se dă focarul S al aceleiași secțiuni conice. Fie unghiul



RPH suplementul unghiului RPS ; și va fi dată poziția liniei PH pe care se află situat celălalt focar H . Ducînd pe PH perpendicular la SK , să ne închipuim dusă semi-axa conjugată BC , și va fi $SP^2 - 2KPH + PH^2 = SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2 = \overline{SP+PH^2} - L \times \overline{SP+PH} = SP^2 + 2SPH + PH^2 - L \times \overline{SP+PH}$. Să se adune de ambele părți $2KPH - SP^2 - PH^2 + L \times \overline{SP+PH}$, și va fi $L \times \overline{SP+PH} = 2SPH + 2KPH$, sau $SP + PH$ către PH ca $2SP + 2KP$ către L . De unde se scoate PH atît ca lungime cît și ca poziție. De aceea dacă viteza corpului în P este așa fel ca parametrul L să fie mai mic decît $2SP + 2KP$, PH va fi de aceeași parte a tangentei PR cu linia PS ; și de aceea figura va fi o elipsă și va fi dată din focarele date S, H și axa principală $SP + PH$. Dacă viteza corpului este așa de mare, încît parametrul L să fie egal cu $2SP + 2KP$, lungimea PH va fi infinită; și de aceea figura va fi o parabolă avînd axa SH paralelă cu linia PK , și de aceea va fi dată. Dar dacă corpul pornește din locul său P cu o viteză încă și mai mare lungimea PH trebuie luată de cealaltă parte a tangentei; și astfel tangenta trecînd printre focare figura va fi o hiperbolă avînd axa principală egală cu diferența liniilor SP și PH , și deci va fi dată. Căci dacă corpul în aceste cazuri se rotește pe o secțiune conică astfel aflată, s-a demonstrat în propozițiile XI, XII și XIII că forța centripetă va fi invers proporțională cu pătratul distanței corpului de la centrul S al forțelor; și de aceea va fi just determinată linia PQ pe care un corp lăsat să plece dintr-un loc dat P , cu o viteză dată, în direcția dreptei PR de poziție dată o va descrie cu o astfel de forță. Q.E.F.

COROLARUL 1. De aici în orice secțiune conică dintr-un vîrf principal dat D , cu o latură dreaptă L , și focarul S , se află celălalt focar H luînd pe DH către DS după cum este parametrul către diferența dintre parametru și $4DS$. Căci proporția $SP + PH$ către PH precum $2SP + 2KP$ către L în cazul acestui corolar, devine $DS + DH$ către DH precum $4DS$ către L și, separînd, DS către DH precum $4DS - L$ către L .

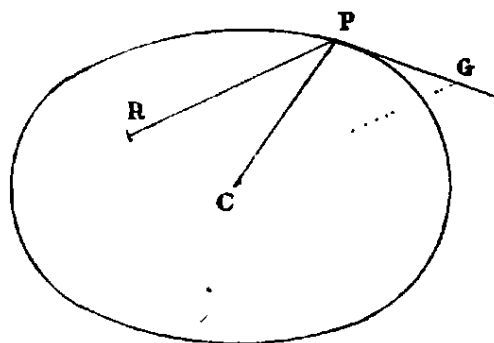
COROLARUL 2. De unde dacă se dă viteza corpului în vîrf principal D , se va afla lesne orbita, luînd anume parametrul ei către distanța dublă DS , în raportul pătratului vitezei acesteia date către viteza unui corp rotindu-se pe un cerc la distanța DS (potrivit corolarului 3, propoziția XVI), apoi DH către DS precum parametrul către diferența dintre parametru și $4DS$.

COROLARUL 3. De aici și dacă corpul se mișcă pe o secțiune conică oarecare, și printr-un impuls oarecare este scos din orbita sa; se poate cunoaște orbita în care după aceea el își continuă cursul. Căci compunînd mișcarea proprie a corpului cu mișcarea pe care ar produce-o impulsul singur, vom avea mișcarea cu care va porni corpul din locul dat al impulsului, după o dreaptă de poziție dată.

COROLARUL 4. Și dacă acel corp este perturbat incontinuu de o forță oarecare imprimată din afară, se află repede traiectoria, determinînd schimbările pe care acea forță le imprimă în oarecare puncte, și apreciind din analogia seriei schimbările continue în locurile intermediare.

SCOLIE

Dacă un corp P sub influența unei forțe centripete îndreptată spre un punct oarecare R se mișcă pe perimetrul unei secțiuni conice al cărei centru fie C , și se caută legea forței centripete: să ducem CG paralelă cu raza RP și întâlnind tangenta PG a orbitei în G ; și forța aceea (potrivit corolarului 1 și scoliei propoziției X, și corolarului 3, propoziția VII) va fi ca $\frac{CG^3}{RP^2}$.

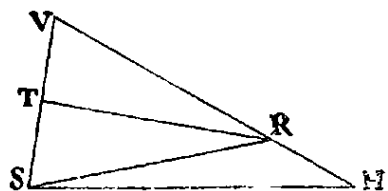


SECȚIUNEA IV

Despre aflarea orbitelor eliptice, parabolice și hiperbolice dintr-un focar dat

LEMA XV

Dacă din cele două focare S , H ale unei elipse sau hiperbole oarecare se duc la un al treilea punct oarecare V , două drepte SV , HV dintre care una HV să fie egală cu axa principală a figurii, adică cu axa pe care se află focarele, iar cealaltă SV să fie înjumătățită de perpendiculara TR ridicată pe ea în T ; perpendiculara TR atinge undeva secțiunea conică: și viceversa, dacă o atinge, HV va fi egală cu axa principală a figurii.

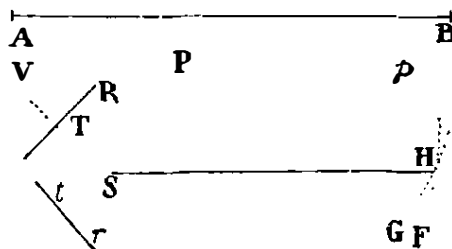


Căci perpendiculara TR să taie dreapta HV prelungită, dacă ar fi necesar în R ; și să unim SR . Deoarece TS , TV sînt egale, vor fi egale și dreptele SR , VR și unghiurile TRS , TRV . De unde punctul R va fi pe secțiunea conică și perpendiculara TR o atinge: și invers. Q.E.D.

PROPOZIȚIA XVIII. PROBLEMA X

Fiind date focarul și axele principale să se descrie traiectoriile eliptice și hiperbolice care vor trece prin punctele date și ating drepte de poziție dată.

Fie S focarul comun al figurilor; AB lungimea axei principale a unei traiectorii oarecare; P punctul prin care trebuie să treacă traiectoria; și TR dreapta pe care trebuie să o atingă. În jurul centrului P și cu intervalul $AB - SP$, dacă orbita este elipsă, sau $AB + SP$, dacă ea este hiperbolă, ca rază să se descrie cercul HG . Pe tangenta TR să coborîm perpendiculara ST , și să o prelungim pînă în V , astfel ca TV să fie egală cu ST ; și din centrul V și intervalul AB ca rază să descriem cercul FH . În această metodă fie că se dau două puncte P , p , fie două tangente TR , tr , fie punctul P și tangenta TR , trebuie să descriem două cercuri. Fie H intersecția lor comună, și din focarele S , H , cu acea axă dată să descriem traiectoria. Zic că s-a făcut. Căci traiectoria descrisă (fiindcă $PH + SP$ în elipsă, și $PH - SP$ în hiperbolă este egal cu axa) va trece prin punctul P , și (potrivit lemei de mai sus) atinge dreapta TR . Și din același motiv ea sau va trece prin cele două puncte P , p , sau atinge cele două drepte TR , tr . Q.E.F.

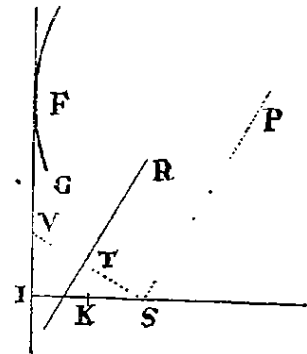


PROPOZIȚIA XIX. PROBLEMA XI

În jurul unui focar dat să se descrie o traiectorie parabolică ce va trece prin puncte date, și va atinge drepte date prin poziție.

Fie S focarul, P punctul și TR tangenta traiectoriei ce trebuie descrisă. Din centrul P , cu intervalul PS să descriem cercul FG . De la focar să ducem

pe tangentă perpendiculara ST , și să o prelungim pînă la V , așa fel ca TV să fie egal cu ST . În același fel trebuie să descriem un alt cerc fg , dacă se dă un alt punct p ; sau trebuie să aflăm un alt punct v , dacă se dă o altă tangentă tr ; apoi să ducem dreapta IF care să atingă două cercuri FG , fg , dacă se dau două puncte P , p , sau să treacă prin două puncte V , v , dacă se dau două tangente TR , tr , sau să atingă cercul FG și să treacă prin punctul V , dacă se dă punctul P și tangentă TR . Pe FI să ducem perpendiculara SI și să o înjumătățim în K ; și cu axa SK , și cu vîrfurile principale K să descriem parabola. Zic că s-a făcut. Căci fiind egale SK și IK , SP și FP , parabola va trece prin punctul P ; și (potrivit lemei XIV, corolarul 3) deoarece ST și TV sînt egale și unghiul STR este drept, ea atinge dreapta TR . Q.E.F.

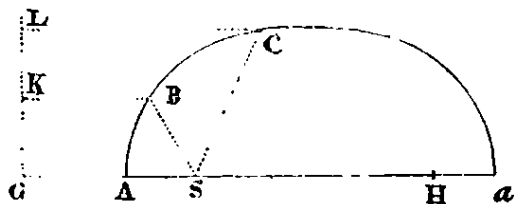


PROPOZIȚIA XX. PROBLEMA XII

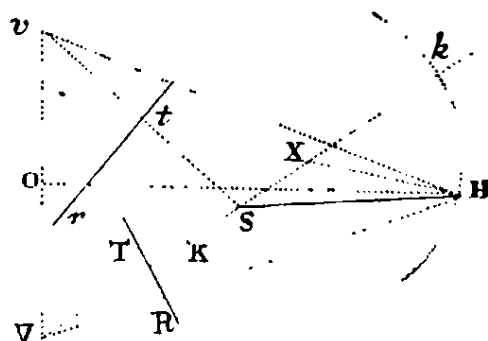
În jurul unui focar dat să se descrie o traiectorie oarecare de un gen dat, care va trece prin puncte date și va atinge drepte de poziție dată.

CAZUL 1. Fiind dat focarul S , se cere să descriem traiectoria ABC prin două puncte B , C . Deoarece genul traiectoriei este dat, va fi dat raportul axei principale către distanța focarelor. În acel raport să luăm KB către BS și LC către CS . În jurul centrelor B , C , cu intervalele BK , CL să descriem două cercuri, și pe dreapta KL , care să le atingă în K și L , să ducem perpendiculara SG , și să o tăiem în A și a , astfel ca să fie GA către AS și Ga către aS precum KB către BS , și cu axa Aa , vîrfurile A , a să descriem traiectoria. Zic că s-a făcut. Căci fie H un alt focar al figurii descrise, și fiindcă GA este către AS precum Ga către aS , va fi prin separare $Ga-GA$ sau Aa către $aS-AS$ sau SH în același raport, și de aceea în raportul pe care-l are axa principală a figurii ce trebuie descrisă către distanța dintre focarele ei; și de aceea figura descrisă este de același gen cu cea cerută a fi descrisă. Și fiindcă KB către BS și LC către CS sînt în același raport, această figură va trece prin punctele B , C , după cum este evident din proprietățile conicelor.

CAZUL 2. Fiind dat focarul S , se cere să descriem traiectoria care atinge undeva două drepte TR , tr . Să ducem din focar pe tangente perpendicularele ST , St , și să le prelungim pînă la V , v astfel ca TV , tv să fie egale cu TS , ts . Să bisectăm Vv în O , și să ducem perpendiculara OH , și să tăiem dreapta VS prelungită la infinit în K și k , astfel ca să fie VK către KS și Vk către kS precum axa principală a traiectoriei ce trebuie descrisă către distanța focarelor. Pe diametrul Kk să se descrie cercul tăind pe OH în H ; și cu focarele S , H , și axa principală egală cu VH să descriem traiectoria. Zic că s-a făcut. Căci să bisectăm Kk în X și să unim HX , HS , HV , Hv . Deoarece VK este către KS precum Vk către kS ; și prin compunere



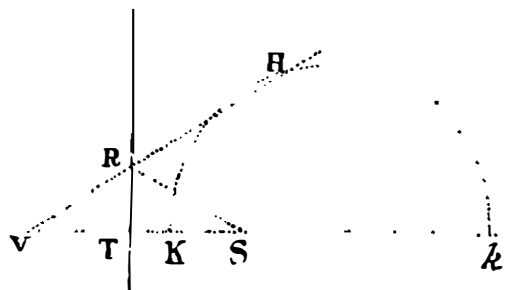
precum $VK + Vk$ către $KS + kS$; și prin separare precum $Vk - VK$ către $kS - KS$ adică precum $2VX$ către $2KX$ și $2KX$ către $2SX$, și de aceea



precum VX către HX și HX către SX , triunghiurile VXH , HXS , vor fi asemenea, și de aceea VH va fi către SH ca VX către HX , și de aceea precum VK către KS . Așadar axa principală VH a traiectoriei descrise are același raport către distanța SH a focarelor, pe care-l are axa principală a traiectoriei ce trebuie descrisă către distanța focarelor și de aceea este de același gen. Mai mult, fiindcă VH , vH sînt egale cu axa principală, și VS , vS sînt bisectate

perpendicular de dreptele TR , tr , este clar (potrivit lemei XV) că acele drepte ating traiectoria descrisă. Q.E.F.

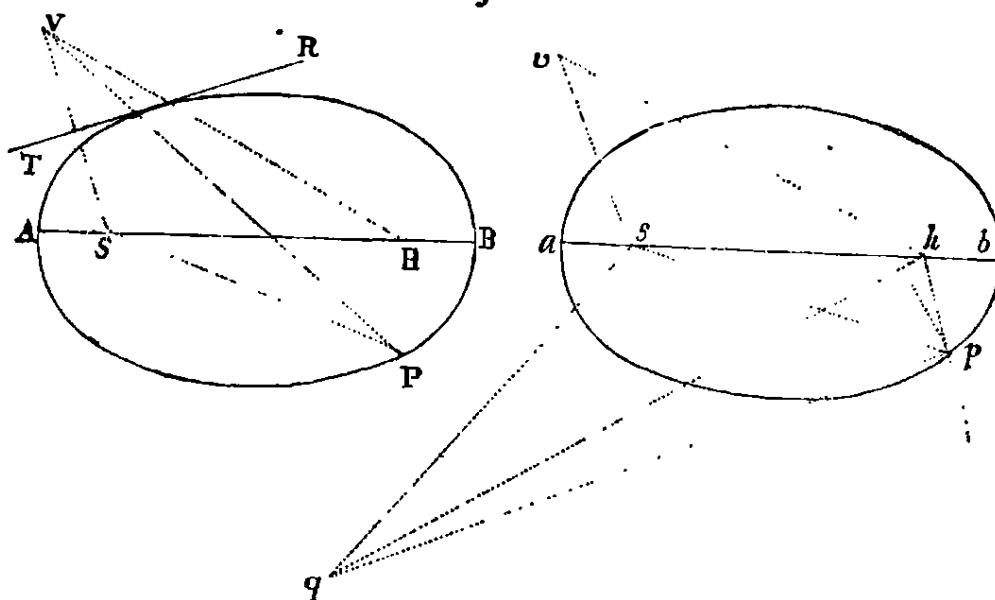
CAZUL 3. Fiind dat focarul S , se cere să descriem traiectoria care atinge dreapta TR în punctul dat R . Pe dreapta TR să ducem perpendiculara ST , și să o prelungim pînă în V , astfel ca TV să fie egal cu ST . Să unim VR și să tăiem dreapta VS prelungită la infinit în K și k , astfel ca să fie VK către SK și Vk către Sk precum axa principală a elipsei ce trebuie descrisă către distanța focarelor; și cu cercul descris pe diametrul Kk să tăiem dreapta VR prelungită pînă în H și cu focarele S , H , axa principală egală cu dreapta VH , să se descrie traiectoria. Zic, că s-a făcut.



Căci din cele demonstrate în cazul al doilea este clar că VH este către SH precum VK către SK , și de aceea precum axa principală a traiectoriei ce trebuie descrisă către distanța focarelor ei, și de aceea traiectoria descrisă este de același gen cu aceea ce trebuie descrisă, iar din proprietățile conicelor este evident că dreapta TR care bisectează unghiul VRS atinge traiectoria în punctul R . Q.E.F.

CAZUL 4. În jurul focarului S se cere să descriem traiectoria APB , care să atingă dreapta TR și să treacă printr-un punct oarecare P dat în afara tangentei, și care să fie asemenea figurii apb , descrisă cu axa principală ab și focarele s , h . Să ducem pe tangenta TR perpendiculara ST , și să o prelungim pînă în V , așa fel ca TV să fie egal cu ST . Să luăm unghiurile hsq , shq egale cu VSP , SVP ; și cu centrul q și intervalul care este către ab precum SP către VS să descriem cercul ce taie figura apb în p . Să unim sp și să ducem SH care să fie către sh precum SP către sp , și care formează unghiul PSH egal cu psh și unghiul VSH egal cu psq . În urmă cu focarele S , H , și axa principală AB egală cu distanța VH , să descriem secțiunea conică. Zic, că s-a făcut. Căci, dacă se duce sv care să fie către sp precum este sh către sq , și care să formeze unghiul vsp egal cu unghiul hsq și unghiul vsh egal cu unghiul psq , triunghiurile svh , spq vor fi asemenea, și de aceea vh va fi către pq precum sh către sq adică (din cauza asemănării triunghiurilor VSP , hsq) după cum este VS către SP sau ab către pq . Prin urmare vh și ab sînt egale. Apoi fiindcă triunghiurile VSH , vsh sînt asemenea

VH este către SH precum vh către sh , adică axa secțiunii conice deja descrise către distanța focarelor ei, precum axa ab către distanța sh a focarelor; și de aceea figura deja descrisă este asemenea figurii apb . Dar această

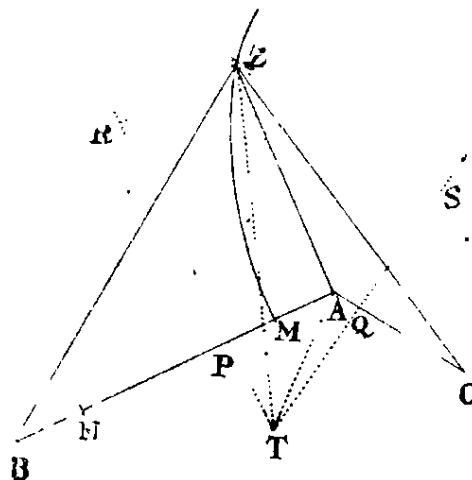


figură trece prin punctul P , deoarece triunghiul PSH este asemenea cu triunghiul psh ; și fiindcă VH este egală cu axa, și VS este bisectată perpendicular de dreapta TR , ea atinge dreapta TR . Q.E.F.

LEMA XVI

Din trei puncte date să se ducă la al patrulea care nu este dat trei drepte ale căror diferențe sînt sau date sau nule.

CAZUL 1. Fie A, B, C , punctele date și Z punctul al patrulea care trebuie aflat; fiind dată diferența liniilor AZ, BZ , punctul Z se va afla pe hiperbola ale cărei focare sînt A și B , și axa principală diferența dată. Fie acea axă MN . Să luăm PM către MA precum MN către AB , și ducînd PR perpendiculară la AB , și coborînd ZR perpendiculară la PR ; din natura acestei hiperbole va fi ZR către AZ precum MN către AB . Printr-un raționament analog punctul Z se va afla pe o altă hiperbolă, ale cărei focare sînt A, C și axa principală diferența dintre AZ și CZ , și se poate duce QS perpendiculară pe AC , la care dacă dintr-un punct oarecare Z al acestei hiperbole se duce normala ZS , aceasta va fi către AZ precum diferența dintre AZ și CZ către AC . Prin urmare sînt date rapoartele lui ZR și ZS către AZ , și de aceea se dă raportul între ZR și ZS unul față de altul; astfel că dacă dreptele RP, SQ se întîlnesc în T , și se duc TZ și TA , figura $TRZS$ va fi dată după genul ei, și dreapta TZ pe care se află undeva punctul Z , va fi



dată după poziție. Va fi dată și dreapta TA , ca și unghiul ATZ ; și fiind date rapoartele lui AZ și TZ către ZS , va fi dat raportul lor unul către altul; și deci va fi dat triunghiul ATZ , al cărui vîrf este punctul Z . Q.E.I.

CAZUL 2. Dacă două din trei linii, spre pildă AZ și BZ sînt egale, ducem așa fel dreapta TZ , ca ea să bisecteze dreapta AB ; apoi aflăm triunghiul ATZ ca mai sus.

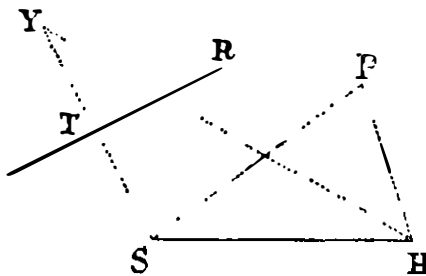
CAZUL 3. Dacă toate trei sînt egale, punctul Z se va afla în centrul cercului ce trece prin punctele A , B , C . Q.E.I.

Această leamnă a problemelor se rezolvă și prin cartea *De Tactionibus* a lui Apollonius refăcută de Vieta.

PROPOZIȚIA XXI. PROBLEMA XIII

Să se descrie în jurul unui focar dat o traiectorie care va trece prin puncte date și va atinge drepte pe poziție dată.

Fie dat focarul S , punctul P , și tangenta TR , și să se afle celălalt focar H . Să ducem pe tangentă perpendiculara ST și să o prelungim pînă în Y , așa ca TY să fie egal cu ST , și YH va fi egal cu axa principală. Să unim SP , HP și va fi SP diferența dintre HP și axa principală. În acest mod dacă se dau mai multe tangente TR , sau mai multe puncte P , se va ajunge la tot atîtea linii YH , sau PH , duse din punctele amintite Y sau P la focarul H , care sau sînt egale cu axele, sau diferă de ele prin lungimile date SP , și de aceea sau sînt egale între ele, sau au diferențe date; și de aici potrivit lemei de mai sus, este dat celălalt focar H . Avînd însă focarele împreună cu lungimea axei (care sau este YH ; sau, dacă traiectoria este o elipsă, $PH + SP$; iar dacă este hiperbolă, $PH - SP$) vom avea traiectoria. Q.E.I.

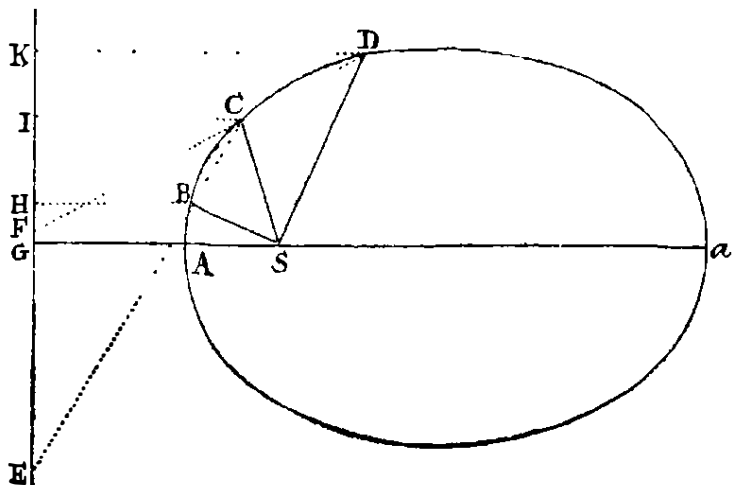


SCOLIE

Cînd traiectoria este o hiperbolă, sub numele acestei hiperbole nu înțeleg hiperbola opusă. Căci corpul înaintînd în mișcarea sa nu poate trece pe hiperbola opusă.

Cazul cînd se dau trei puncte se rezolvă mai repede în felul următor.

Fie punctele date B , C , D . Unind BC , CD să le prelungim pînă în E , F , astfel ca EB să fie către EC precum SB către SC , și FC către FD precum SC către SD . Pe EF dusă și prelungită să coborîm



normalele SG , BH , și pe GS prelungită la infinit să luăm GA către AS și Ga către aS precum HB către BS și va fi A vârful, și Aa axa principală a traiectoriei: care după cum GA va fi mai mare, egală, sau mai mică decât AS , va fi elipsă, parabolă, sau hiperbolă; punctul a în primul caz căzînd de aceeași parte a liniei GF cu punctul A ; în al doilea caz depărtîndu-se la infinit; în al treilea căzînd de partea contrară a liniei GF . Căci dacă se duc pe GF perpendicularele CI , DK ; va fi IC către HB precum EC către EB , adică precum SC către SB ; și la rîndul său IC către SC precum HB către SB sau precum GA către SA . Și printr-un raționament analog, se va demonstra că KD este în același raport către SD . Prin urmare punctele B , C , D , se află pe o secțiune conică descrisă în jurul focarului S astfel ca toate dreptele duse din focarul S la diversele puncte ale secțiunii să fie către perpendicularele coborîte din acele puncte pe dreapta GF în acel raport dat.

Printr-o metodă mult asemănătoare, ilustrul geometru de la Hire, în Cartea a VIII-a, propoziția XXV a conicelor sale dă o soluție acestei probleme.

SECȚIUNEA V

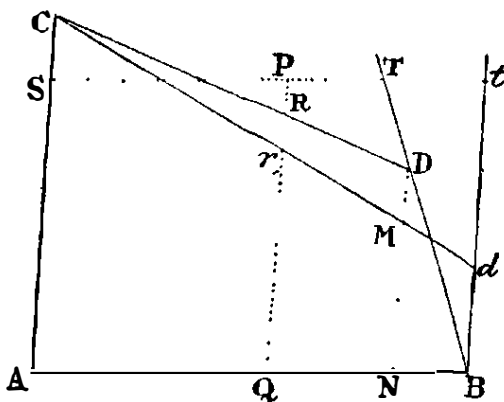
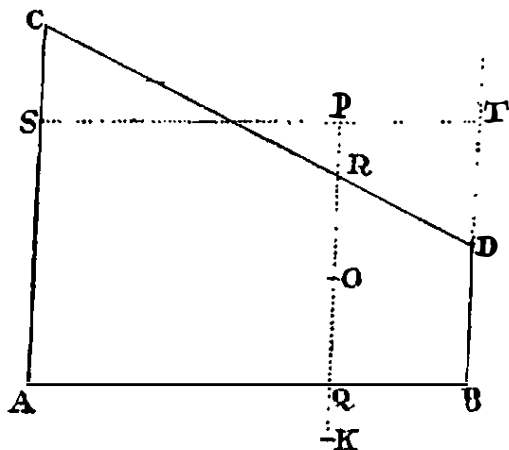
Despre aflarea orbitelor cînd nici unul din focare nu este dat

LEMA XVII

Dacă dintr-un punct oarecare P al unei secțiuni conice date se duc la cele patru laturi AB , CD , AC , DB prelungite la infinit ale unui trapez oarecare $ABDC$ înscris în acea secțiune conică, respectiv tot atîtea drepte PQ , PR , PS , PT sub unghiuri date: dreptunghiul $PQ \times PR$ format de dreptele duse la două laturi opuse va fi către dreptunghiul $PS \times PT$ format de dreptele duse la celelalte două laturi opuse într-un raport dat.

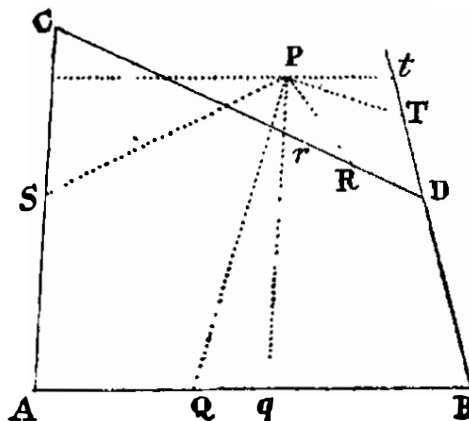
CAZUL 1. Să presupunem mai întîi că liniile duse la laturile opuse sînt paralele cu una oarecare din laturile rămase, anume PQ și PR cu latura AC , și PS și PT cu latura AB . Și afară de aceasta două din laturile opuse anume AC și BD , să fie paralele între ele. Și dreapta, care bisectează acele laturi paralele, va fi unul din diametrii secțiunii conice și va bisecta și pe RQ . Fie O punctul care bisectează pe RQ , și va fi PO ordonata la acel diametru. Să prelungim PO pînă în K , așa ca OK să fie egal cu PO , și va fi OK ordonata la partea contrară diametrului. Așadar deoarece punctele A , B , P și K sînt pe secțiunea conică, și PK taie pe AB după un unghi dat, va fi (potrivit propozițiilor 17, 19, 21 și 23, Cartea a III-a a conicelor lui Apollonius), dreptunghiul PQK către dreptunghiul AQB într-un raport dat. Dar QK și PR sînt egale, ca fiind diferențele egalelor OK , OP și OQ , OR și de aici și dreptunghiurile PQK și $PQ \times PR$ sînt egale; și de aceea dreptunghiul $PQ \times PR$ este către dreptunghiul AQB , adică către dreptunghiul $PS \times PT$ într-un raport dat. Q.E.D.

CAZUL 2. Să presupunem apoi că laturile opuse AC și BD ale trapezului nu sînt paralele. Să ducem Bd paralelă cu AC și întîlnind atît dreapta ST în t cît și secțiunea conică în d . Să unim Cd tăind PQ în r , și să ducem la PQ paralela DM tăind pe Cd în M și pe AB în N . Apoi din cauza triunghiurilor asemenea BTt , DBN , este Bt sau PQ către Tt precum DN către NB . Astfel și Rr este către AQ sau PS precum DM către AN . Prin urmare înmulțind antecedentele cu antecedente și consecvente cu consecvente, după cum dreptunghiul $PQ \times Rr$ este către dreptunghiul $PS \times Tt$, tot așa dreptunghiul NDM către dreptunghiul ANB , și (potrivit cazului 1) tot așa drept-



unghiul $PQ \times Pr$ către dreptunghiul $PS \times Pt$, și separînd tot așa dreptunghiul $PQ \times PR$ către dreptunghiul $PS \times PT$. Q.E.D.

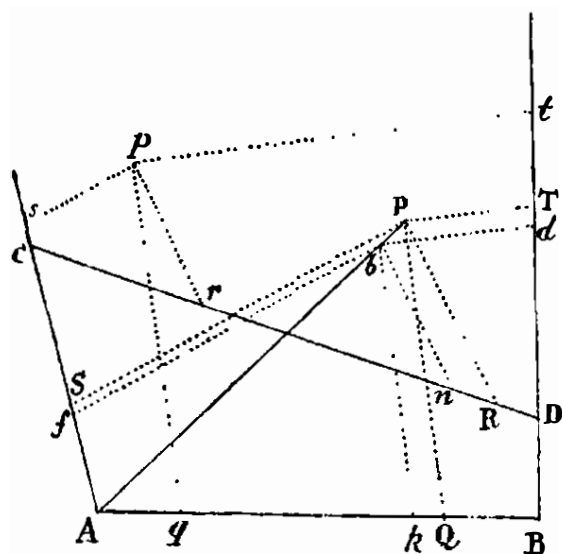
CAZUL 3. Să presupunem în sfîrșit că cele patru linii PQ , PR , PS , PT nu sînt paralele cu laturile AC , AB , ci au o înclinare oarecare față de ele. Rînd pe rînd să ducem Pq , Pr paralele cu AC ; și Ps , Pt paralele cu AB ; și fiind date unghiurile triunghiurilor PQq , PRr , PSs , PTt , vor fi date rapoartele lui PQ către Pq , PR către Pr , PS către Ps , și PT către Pt ; și la fel rapoartele compuse $PQ \times PR$ către $Pq \times Pr$, și $PS \times PT$ către $Ps \times Pt$. Dar din cele demonstrate mai sus, raportul lui $Pq \times Pr$ către $Ps \times Pt$ este dat: deci și raportul lui $PQ \times PR$ către $PS \times PT$. Q.E.D.



LEMA XVIII

Presupunînd aceleași condiții, dacă dreptunghiul $PQ \times PR$ format de dreptele duse la cele două laturi opuse ale trapezului se află într-un raport dat către dreptunghiul $PS \times PT$ format de dreptele duse la celelalte două laturi; punctul P , de la care se duc liniile se găsește pe secțiunea conică descrisă în jurul trapezului.

Prin punctele A , B , C , D și printr-unul oarecare din numărul infinit de puncte P , anume p , să ne închipuim descrisă o secțiune conică; zic că



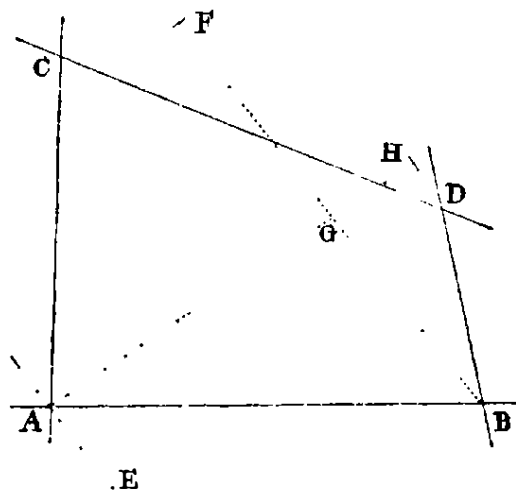
punctul P o atinge totdeauna. Dacă negi, unește pe AP care taie această secțiune conică în alt punct decît în P , dacă aceasta este cu puțință, anume în b . Prin urmare dacă din aceste puncte p și b se duc la laturile trapezului sub unghiuri date dreptele pq , pr , ps , pt , și bk , bn , bf , bd ; va fi precum $bk \times bn$ către $bf \times bd$, tot așa (potrivit lemei XVII) $pq \times pr$ către $ps \times pt$, și astfel (prin ipoteză) $PQ \times PR$ către $PS \times PT$. Și din cauza asemănării trapezelor $bkAf$, $PQAS$, după cum bk către bf , tot așa PQ către PS . De aceea împărțind termenii propoziției precedente la termenii corespunzători ai acesteia, va fi bn către bd

precum PR către PT . Prin urmare trapezele isoscele $Dnbd$, $DRPT$ sînt asemenea și de aceea diagonalele lor Db , DP coincid. Așadar b se află la intersecția dreptelor AP , DP și de aceea coincide cu punctul P . De aceea punctul P , oriunde se ia, se află pe secțiunea conică considerată. Q.E.D.

COROLAR. De aici dacă trei drepte PQ , PR , PS se duc din punctul comun P sub unghiuri date respectiv la tot atîtea alte drepte AB , CD , AC date prin poziție, și fie dreptunghiul format de două drepte duse $PQ \times PR$ către pătratul celei de a treia PS într-un raport dat: punctul P , de la care

dată în punctele A, B, C, D . De la unul oarecare dintre ele A să ducem dreapta oarecare AH în care vrem să aflăm punctul P . Ea taie liniile opuse BD, CD , anume BD în H și CD în I , și fiind date toate unghiurile figurii, vor fi date rapoartele PQ către PA și PA către PS , și deci raportul lui PQ către PS . Scoțându-l pe acesta din raportul dat $PQ \times PR$ către $PS \times PT$, raportul lui PR către PT va fi dat, și alăturînd rapoartele date PI către PR , și PT către PH raportul lui PI către PH va fi dat și astfel punctul și P . Q.E.I.

COROLARUL 1. De aici se poate duce o tangentă la un punct oarecare D al locului punctelor în număr infinit P . Căci coarda PD , dacă punctele P și D coincid, adică, dacă AH trece prin punctul D , devine tangentă. În care caz, ultimul raport al disparentelor IP și PH se va afla ca mai sus. De aceea să ducem CF paralelă la AD , întîlnind pe BD în F , și să o tăiem în E în același raport ultim, și DE va fi tangentă, deoarece CF și disparenta IH sînt paralele, și tăiate la fel în E și P .



COROLARUL 2. De aici se poate defini și locul tuturor punctelor P . Prin unul oarecare din punctele A, B, C, D , anume A , să ducem tangentă AE a locului, și printr-un alt punct oarecare B să ducem paralela BF la tangentă întîlnind locul în F . Și să aflăm punctul F cu ajutorul lemei XIX. Să bisectăm BF în G , și linia nedefinită AG dusă va fi poziția diametrului la care BG și FG sînt ordonate. Această AG întîlnește locul în H , și AH va fi diametrul sau latura transversă, către care parametrul va fi ca BG^2 către $AG \times GH$. Dacă AG nu întîlnește

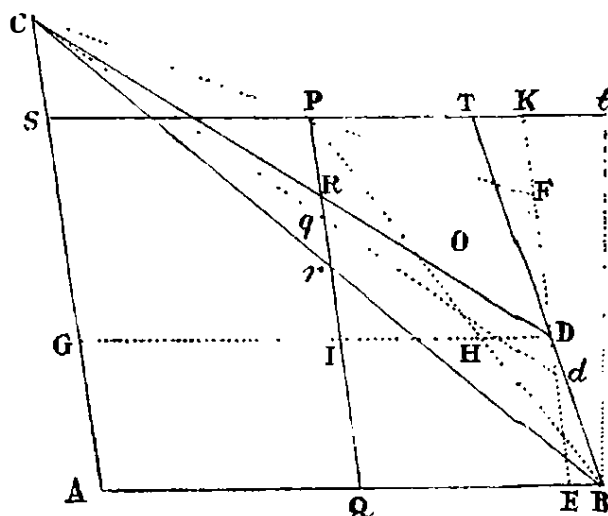
locul nicăieri, linia AH fiind infinită, locul va fi o parabolă, și parametrul ei corespunzînd diametrului AG va fi $\frac{BG^2}{AG}$. Dacă însă ea îl întîlnește undeva, locul va fi o hiperbolă, cînd punctele A și H sînt situate de aceeași părți ale lui G ; și elipsă, cînd G este intermediar, dacă nu cumva unghiul AGB este drept, și în același timp BG^2 egal cu dreptunghiul AGH , în care caz se va obține un cerc.

Și astfel în acest corolar se arată nu calculul, ci compoziția geometrică a problemei celor vechi asupra celor patru linii începută de Euclid și continuată de Apollonius, pe care o căutau cei vechi.

LEMA XX

Dacă două unghiuri opuse A și P ale unui paralelogram oarecare $ASPQ$ își au vîrfurile pe o secțiune oarecare în punctele A și P ; și laturile unuia din unghiuri prelungite la infinit AQ , AS întîlnesc secțiunea conică în B și C ; iar din punctele de întîlnire B și C se duc la un al cincilea punct oarecare D al secțiunii conice, două drepte BD , CD întîlnind celelalte două laturi, ale paralelogramului, PS , PQ prelungite la infinit, în T și R : părțile tăiate ale laturilor PR și PT vor fi totdeauna între ele într-un raport dat. Și invers, dacă acele părți tăiate sînt între ele într-un raport dat, punctul D se află pe o secțiune conică ce trece prin cele patru puncte A , B , C , P .

CAZUL 1. Să unim BP , CP și din punctul D să ducem două drepte DG , DE , dintre care cea dintîi DG fie paralelă cu AB și să întîlnească pe PB ,



PQ , CA în H , I , G ; cealaltă DE să fie paralelă cu AC și să întîlnească pe PC , PS , AB în F , K , E : și va fi (potrivit lemei XVII) dreptunghiul $DE \times DF$ în raport dat către $DG \times DH$. Dar PQ este către DE (sau IQ) precum PB către HB , și astfel precum PT către DH ; și la rîndul său PQ către PT precum DE către DH . Dar și PR către DF este precum RC către DC , și de aceea precum PS către DG (sau IG), și la rîndul său PR către PS precum DF către DG ; și compunînd rapoartele dreptunghiului $PQ \times PR$ către dreptunghiul $PS \times PT$ precum drept-

unghiul $DE \times DF$ către dreptunghiul $DG \times DH$, și deci într-un raport dat. Dar PQ și PS sînt date și de aceea este dat raportul lui PR către PT . Q.E.D.

CAZUL 2. Dar dacă PR și PT se presupun a fi unul către celălalt într-un raport dat, atunci refăcînd un raționament analog, urmează că dreptunghiul $DE \times DF$ este într-un raport dat către dreptunghiul $DG \times DH$, și de aceea punctul D (potrivit lemei XVIII) se află pe secțiunea conică ce trece prin punctele A , B , C , P . Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă se duce RC tăind pe PQ în r și pe PT se ia Pt către Pr în raportul pe care-l are PT către PR : Bt va fi tangentă la secțiunea conică în punctul B . Căci să ne închipuim că punctul D coincide cu punctul B , astfel că coarda BD dispărînd, BT devine în tangentă; și CD și BT coincid cu CB și Bt .

COROLARUL 2. Și viceversa dacă Bt e tangentă, și într-un punct oarecare D al secțiunii conice se întîlnesc BD , CD ; va fi PR către PT precum Pr către Pt . Și invers, dacă PR este către PT precum Pr către Pt , atunci BD , CD se întîlnesc într-un punct oarecare D al secțiunii conice.

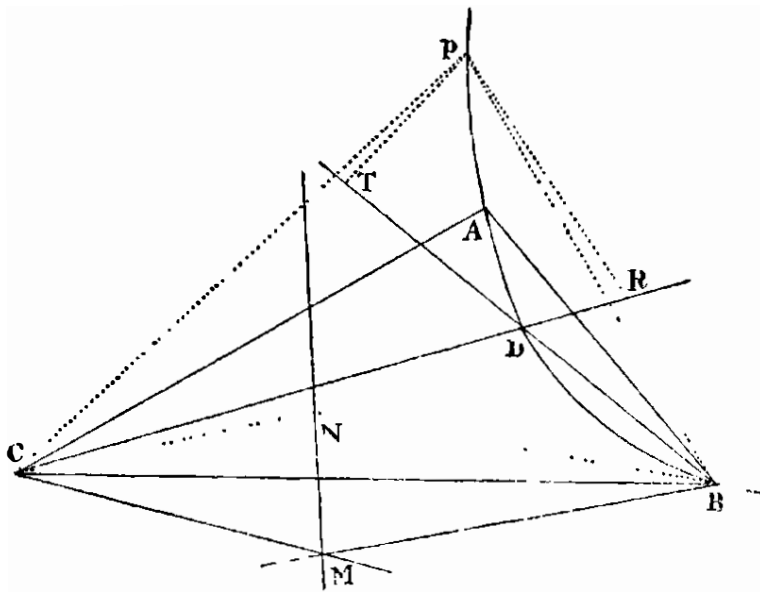
COROLARUL 3. O secțiune conică nu taie altă secțiune conică în mai mult de patru puncte. Căci, dacă se poate, să presupunem că două secțiuni

conice trec prin cinci puncte A, B, C, P, O ; și dreapta BD le taie în punctele D, d , și pe PQ o taie dreapta Cd în q . Prin urmare PR se raportează către PT precum Pq către PT ; de unde PR și Pq sînt reciproc egale, contrar ipotezei.

LEMA XXI

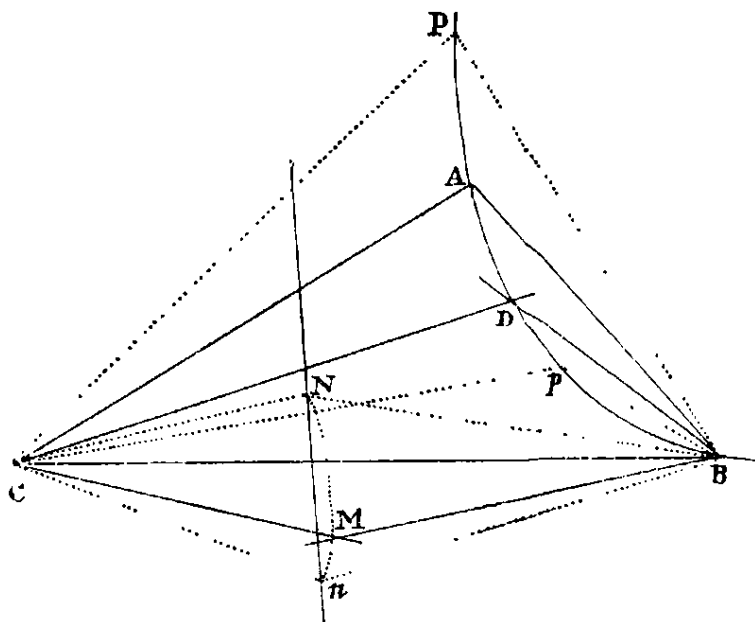
Dacă două drepte mobile și infinite BM, CM duse prin două puncte date B, C ca poli, descriu prin punctul lor de întîlnire M o a treia dreaptă de poziție dată MN ; și se duc alte două drepte infinite BD, CD făcînd cu precedentele două în punctele date B, C unghiurile date MBD, MCD : zic că aceste două BD, CD descriu prin punctul lor de întîlnire D o secțiune conică ce trece prin punctele B, C . Și viceversa, dacă dreptele BD, CD descriu prin punctul lor de întîlnire D o secțiune conică ce trece prin punctele B, C, A iar unghiul DBM este totdeauna egal cu unghiul dat ABC , și unghiul DCM totdeauna egal cu unghiul dat ACB : punctul M se află pe o dreaptă de poziție dată.

Căci fie dat pe dreapta MN punctul N , și cînd punctul mobil M coincide cu cel imobil N , să coincidă punctul mobil D cu cel imobil P . Să unim CN, BN, CP, BP , și din punctul P să ducem dreptele PT, PR întîlnind pe BD, CD în T și R , și făcînd unghiul BPT egal cu unghiul dat BNM , și unghiul CPR egal cu unghiul dat CNM . Așadar fiindcă (prin ipoteză) unghiurile MBD, NBP sînt egale, ca și unghiurile MCD, NCP ; să scădem unghiurile comune NBD și NCD , și vor rămîne egale NBM și PBT , NCM și PCR ; și astfel triunghiurile NBM, PBT sînt asemenea, ca și triunghiurile NCM, PCR . Din care cauză PT este către NM precum PB către NB , și PR către NM precum PC către NC . Dar punctele B, C, N, P sînt imobile. Prin urmare PT și PR au un raport dat către NM , și de aceea un raport dat între ele; și astfel (potrivit lemei XX) punctul D , intersecția perpetuă a dreptelor mobile BT și CR , se află pe secțiunea conică ce trece prin punctele B, C, P . Q.E.D.



Și invers, dacă punctul mobil D se află pe secțiunea conică ce trece prin punctele date B, C, A , și fie unghiul DBM totdeauna egal cu unghiul dat ABC , și unghiul DCM totdeauna egal cu unghiul dat ACB , și cînd punctul D coincide succesiv cu două puncte imobile oarecare p, P ale secți-

unii, punctul mobil M coincide succesiv cu două puncte imobile n, N : prin aceleași N, n se duce dreapta nN , și aceasta va fi locul perpetuu al punctului



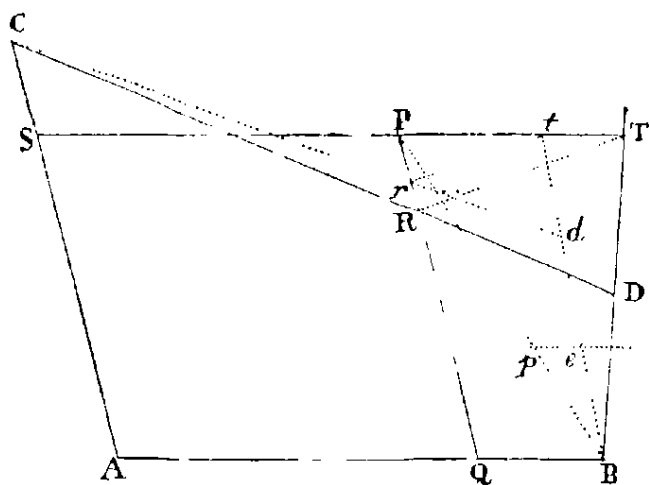
mobil M . Căci dacă se poate, să presupunem că punctul M descrie o linie curbă oarecare. Prin urmare punctul D să se afle pe secțiunea conică ce trece prin cinci puncte B, C, A, p, P , când punctul M se află totdeauna pe linia curbă. Dar din cele deja demonstrate punctul D se află de asemenea pe secțiunea conică ce trece prin aceleași cinci puncte B, C, A, p, P , când punctul M se află încontinuu pe linia dreaptă. Deci două

secțiuni conice vor trece prin aceleași cinci puncte, contrar corolarului 3 al lemei XX. Așadar e absurd să presupunem că punctul M descrie o linie curbă. Q.E.D.

PROPOZIȚIA XXII. PROBLEMA XIV

Să se descrie o traiectorie prin cinci puncte date.

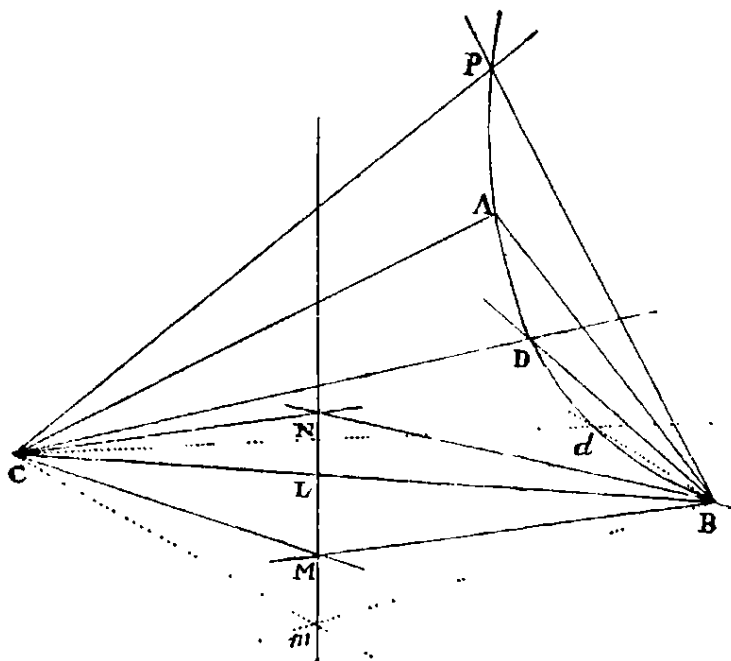
Se dau cinci puncte A, B, C, P, D . De la unul oarecare din ele A să ducem la alte două oarecare B, C , care să se numească poli, dreptele AB, AC și paralelele la acestea TPS, PRQ prin punctul al patrulea P . Apoi de la cei doi poli B, C , să ducem prin punctul al cincilea D două drepte infinite BDT, CRD întâlnind pe cele duse mai de curînd TPS, PRQ (cea dintîi pe cea dintîi și cea din urmă pe cea din urmă) în T și R . Apoi de la dreptele PT, PR , ducînd dreapta tr paralelă cu TR , să tăiem din dreptele PT, PR dreptele oarecare Pt, Pr proporționale cu înșiși PT, PR ; și dacă Bt, Cr , duse prin capetele lor t, r și polii



B, C se întîlnesc în d , acel punct d se va afla pe traiectoria căutată. Căci punctul d (potrivit lemei XX) se află pe secțiunea conică ce trece prin cele patru puncte A, B, C, P ; și liniile Rr, Tt dispărînd, punctul d coincide cu punctul D . Prin urmare secțiunea conică trece prin cele cinci puncte A, B, C, P, D . Q.E.D.

Aceeși altfel

Din punctele date să unim trei oarecare A, B, C ; și rotind în jurul a două dintre ele B, C ca poli, unghiurile de mărime dată ABC, ACB , să se aplice brațele BA, CA , mai întâi la punctul D , apoi la punctul P , și să se noteze punctele M, N în care se întretaie celelalte brațe BL, CL în ambele cazuri. Să ducem dreapta infinită MN , și să rotim unghiurile mobile în jurul polilor lor B, C în așa fel ca intersecția brațelor BL, CL sau BM, CM , care fie m , să cadă totdeauna pe dreapta infinită MN ; și intersecția brațelor BA, CA , sau BD, CD , care fie d , va descrie traiectoria căutată $PADdB$. Căci punctul d (potrivit lemei XXI) se află pe secțiunea conică ce trece prin punctele B, C ; și când punctul m se apropie de punctele L, M, N , punctul d (prin construcție) se apropie de punctele ADP . Și astfel va fi descrisă secțiunea conică ce trece prin cele cinci puncte A, B, C, P, D . Q.E.F.

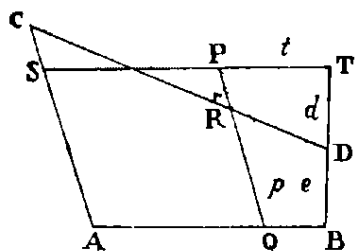


COROLARUL 1. De aici se poate duce lesne o dreaptă, care să atingă traiectoria căutată într-un punct oarecare dat B . Să apropiem punctul d de punctul B , și dreapta Bd devine tangenta căutată.

COROLARUL 2. De unde se pot afla și centrele traiectoriilor, diametrii, și laturile drepte, ca în corolarul 2 al lemei XIX.

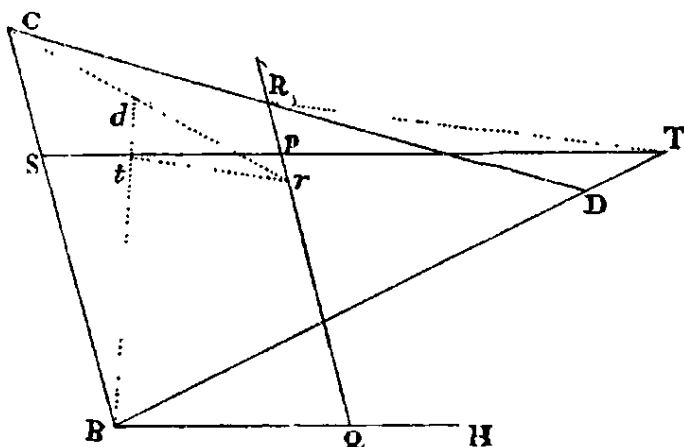
SCOLIE

Construcția de mai sus devine ceva mai simplă unind B, P , și luând pe ea, prelungită dacă e necesar, Bp către BP precum PR către PT ; și ducând prin p dreapta infinită pe paralelă cu SPT , și luând pe ea totdeauna pe egal cu Pr ; și ducând dreptele Be, Cr concurente în d . Căci fiindcă Pr către Pt , PR către PT , pB către PB , pe către Pt sînt în același raport, pe și Pr vor fi totdeauna egale. Prin această metodă punctele traiectoriei se află foarte repede, dacă nu cumva preferăm ca în construcția a doua să descriem curba în mod mecanic.



PROPOZIȚIA XXIII. PROBLEMA XV

Să se descrie o traiectorie ce va trece prin patru puncte date și atinge o dreaptă de poziție dată.



tul de întâlnire d al dreptelor duse Cr , Bt (potrivit lemei XX) va cădea totdeauna pe traiectoria descrisă.

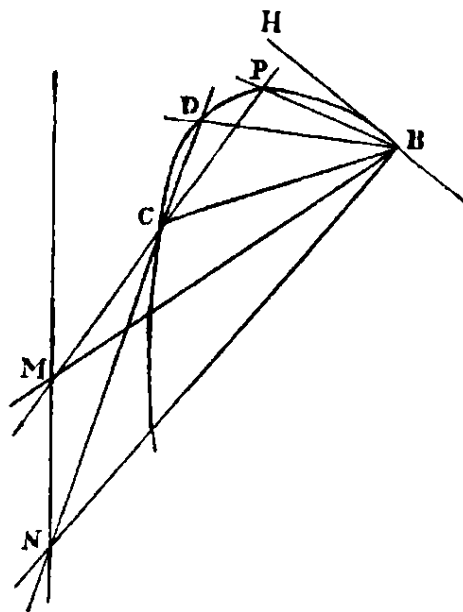
CAZUL 1. Fie dată tangenta BH punctul de contact B , și alte trei puncte C , D , P . Să unim BC , și ducând PS paralelă cu dreapta BH , și PQ paralelă cu dreapta BC , să întregim paralelogramul $BSPQ$. Să ducem BD tăind pe SP în T , și CD tăind pe PQ în R . În sfârșit ducând paralela oarecare tr la TR , din PQ , PS să tăiem Pr , Pt proporționale respectiv cu PR , PT ; și punctul de întâlnire d al dreptelor duse Cr , Bt (potrivit lemei XX) va cădea totdeauna pe traiectoria descrisă.

Aceeași altfel

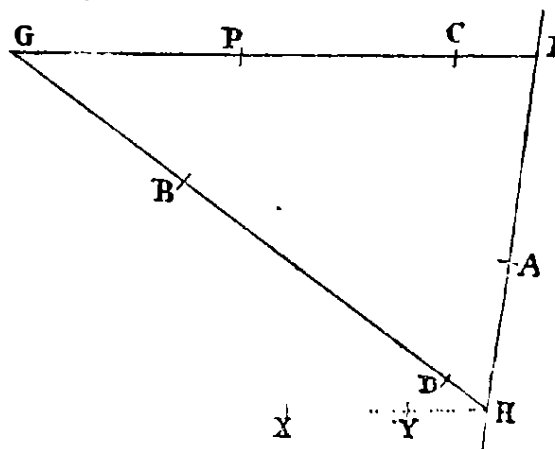
Să rotim atât unghiul de mărime dată CBH în jurul polului B , cât și o rază oarecare rectilinie și prelungită în ambele direcții DC în jurul polului C . Să notăm punctele M , N , în care brațul BC al unghiului taie raza, când celălalt braț BH se întâlnește cu acea rază în punctele P și D . Apoi pe dreapta infinită dusă MN să se întâlnească totdeauna raza CP sau CD și brațul BC al unghiului, și punctul de întâlnire al celuilalt braț BH cu raza va desena traiectoria căutată.

Căci dacă în construcțiile problemei de mai sus punctul A se apropie de punctul B , liniile CA și CB coincid, și linia AB în ultima sa poziție va fi tangenta BH ; și de aceea construcțiile făcute acolo devin identice cu construcțiile descrise aici. Deci punctul de întâlnire al brațului BH cu raza va desena secțiunea conică ce trece prin punctele C , D , P și tangentă la dreapta BH în punctul B . Q.E.F.

CAZUL 2. Fie date patru puncte B , C , D , P situate în afara tangentei HI . Să le unim două câte două prin liniile BD , CP concurente în G , și întâlnind tangenta în H și I . Să tăiem tangenta în A , așa fel ca HA către IA , să fie precum este dreptunghiul format de media proporțională între CG și GP și media proporțională între BH și HD , către dreptunghiul format



de media proporțională între DG și GB și media proporțională între PI și IC ; și A va fi punctul de contact. Căci dacă paralela HX dusă la dreapta PI taie traiectoria în punctele oarecare X și Y : punctul A va trebui așezat (după proprietățile conicelor) în așa fel ca HA^2 către AI^2 să fie într-un raport compus din raportul dreptunghiului XHY către dreptunghiul BHD , sau al dreptunghiului CGP către dreptunghiul DGB , și din raportul dreptunghiului BHD către dreptunghiul PIC . Însă o dată aflat punctul de contact A , traiectoria va fi descrisă ca în primul caz. Q.E.F.

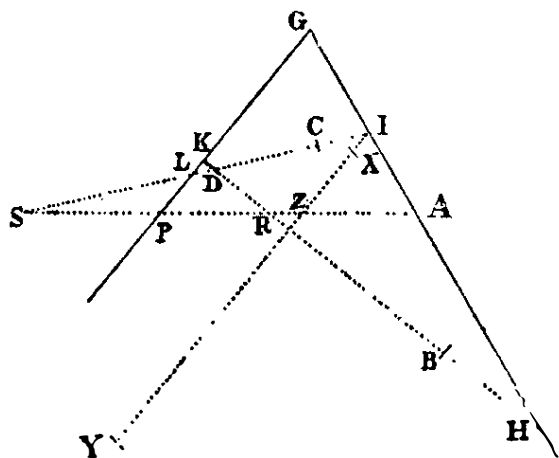


Dar punctul A se poate lua fie între punctele H și I , fie în afara lor; și de aceea traiectoria poate fi descrisă în două feluri.

PROPOZIȚIA XXIV. PROBLEMA XVI

Să se descrie o traiectorie, care va trece prin trei puncte date și va atinge două drepte de poziție dată.

Fie date tangentele HI , KL , și punctele B , C , D . Prin două puncte oarecare B , D , să ducem dreapta infinită BD întâlnind tangentele în punctele H , K . Apoi și prin alte două puncte oarecare C , D să ducem dreapta infinită CD întâlnind tangentele în punctele I , L . Să tăiem drepte astfel duse în R și S , așa fel ca să fie HR către KR precum media proporțională a lui BH și HD către media proporțională a lui BK și KD ; și IS către LS precum media proporțională a lui CI și ID către media proporțională a lui CL și LD . Să tăiem însă după voie fie între punctele K și H , I și L , fie în afara lor; să ducem apoi RS tăind tangentele în A și P , și vor fi A și P puncte



de contact. Căci dacă presupunem că A și P sînt puncte de contact situate undeva pe tangente; și printr-unul oarecare I dintre punctele H , I , K , L , situat pe una dintre cele două tangente HI ducem dreapta IY paralelă cu cealaltă tangentă KL , care întâlnește curba în X și Y , și pe aceasta luăm IZ medie proporțională între IX și IY : în conformitate cu proprietățile conicelor, vom avea dreptunghiul XIY sau IZ^2 către LP^2 precum dreptunghiul CID către dreptunghiul CLD , adică (prin construcție) după cum SI^2 către SL^2 și de aceea IZ către LP precum SI către SL . Așadar punctele S , P , Z sînt situate pe o dreaptă. Mai departe tangentele întâlnindu-se în G , vom

OD , dg către DG , și AB către AD ; și de aceea AD este egal cu $\frac{OA \times AB}{ad}$, și DG este egal cu $\frac{OA \times dg}{ad}$. Acum dacă punctul G se află pe o linie dreaptă, și de aceea într-o ecuație oarecare, prin care se exprimă o relație între abscisa AD și ordonata DG , acele nedeterminate AD și DG nu se urcă mai sus de o singură dimensiune, scriind în această ecuație $\frac{OA \times AB}{ad}$ în loc de AD , și $\frac{OA \times dg}{ad}$ în loc de DG , se va obține o nouă ecuație în care noua abscisă ad și noua ordonată dg se urcă numai la o singură dimensiune, și care astfel reprezintă o linie dreaptă. Dar dacă AD și DG , sau una dintre ele, s-ar urca la două dimensiuni în prima ecuație, la fel se urcă ad și dg la două dimensiuni în ecuația a doua. Și tot așa în trei sau mai multe dimensiuni. Nedeterminatele ad , dg în ecuația a doua și AD , DG în prima se urcă totdeauna la același număr de dimensiuni, și de aceea liniile, pe care se află punctele G , g , sînt de același ordin analitic.

Zic, afară de aceasta, că dacă o dreaptă oarecare atinge linia curbă din prima figură; această dreaptă transferată în același fel cu curba în noua figură atinge acea linie curbă în noua figură; și invers. Căci dacă două puncte oarecare ale unei curbe se apropie unul de altul și coincid în prima figură, aceleași puncte transferate se vor apropia unul de altul și vor coincide în noua figură; și dreptele care unesc aceste puncte, devin în același timp tangentele curbelor în ambele figuri.

Demonstrațiile acestor afirmații se pot face într-un fel mai geometric. Dar e mai bine să fie scurt.

Așadar dacă o figură rectilinie trebuie să fie transmutată în alta, e deajuns să transferăm intersecțiile dreptelor din care ea constă, și să ducem prin ele în noua figură linii drepte. Dar dacă se cere să transmutăm una curbilinie, trebuie să transferăm punctele, tangentele și celelalte linii drepte, prin care se definește linia curbă. Această leamnă servește însă la soluționarea problemelor mai grele, transmutînd figurile propuse în altele mai simple. Căci drepte oarecare convergente se transformă în paralele, luînd ca prima rază ordonată o linie dreaptă oarecare, ce trece prin punctul de convergență; și aceasta pentru că în acest fel punctul de convergență se îndepărtează la infinit; iar linii paralele sînt acelea, care nu se întîlnesc niciodată. Însă după ce problema se rezolvă în figura cea nouă; dacă această figură prin operații inverse se transformă în figura primă vom avea soluția căutată.

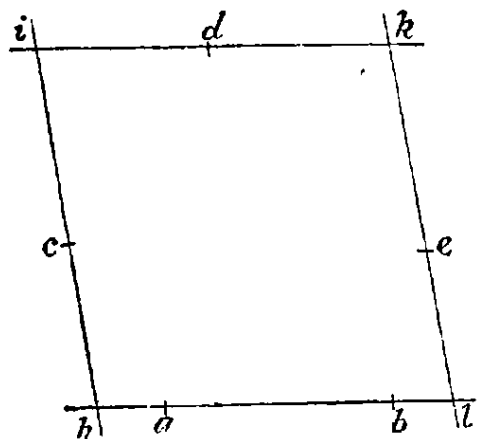
Această leamnă mai este utilă și în soluționarea problemelor solidelor. Căci de cîte ori intervin două secțiuni conice prin a căror intersecție se poate rezolva problema, e permis să transformăm una dintre ele, fie că e hiperbolă fie că e parabolă, în elipsă: apoi elipsa se transformă ușor în cerc. La fel dreapta și secțiunea conică în construcția problemelor plane se transformă în dreaptă și cerc.

PROPOZIȚIA XXV. PROBLEMA XVII

Să se descrie o traiectorie, ce va trece prin două puncte date, și atinge trei drepte de poziție dată.

Prin intersecția a două tangente oarecare una cu alta, și prin intersecția tangentei a treia cu dreapta, ce trece prin cele două puncte date, să ducem

o dreaptă infinită; și luînd-o ca prima rază ordonată să transformăm figura, conform lemei de mai sus, într-o figură nouă. În această figură cele două tangente devin paralele între ele, și a treia tangentă va fi paralelă cu dreapta

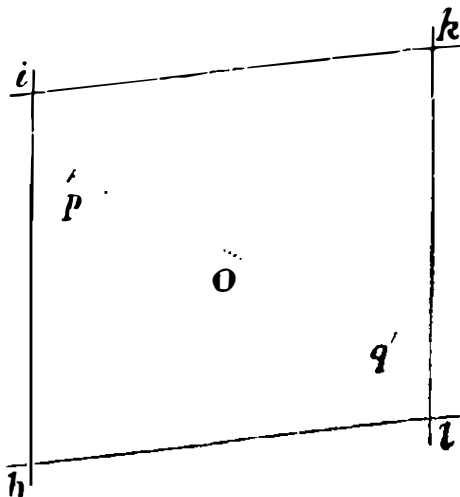


ce trece prin cele două puncte date. Fie hi , kl cele două tangente paralele, ik tangenta a treia, și hl dreapta paralelă cu aceasta trecînd prin punctele a , b , prin care trebuie să treacă secțiunea conică în această figură nouă, și $hikl$ paralelogramul completat. Să tăiem dreptele hi , ki , kl , în c , d , e , în așa fel ca hc către latura al cărei pătrat este dreptunghiul ahb , ic către id , și ke către kd să fie precum suma dreptelor hi și kl către suma celor trei linii, dintre care prima este dreapta ik și celelalte două sînt laturile ale, căror pătrate sînt dreptunghiurile ahb și alb : și c , d , e vor fi punctele de contact. Căci din proprietățile conicelor pătratul lui hc către dreptunghiul ahb și pătratul lui ic către pătratul lui id , și pătratul lui ke către pătratul lui kd , și pătratul lui el către dreptunghiul alb sînt în același raport; și de aceea hc către latura al cărei pătrat este ahb , ic către id , ke către kd și el către latura al cărei pătrat este alb sînt în raportul rădăcinii pătrate a aceluia, și compunînd, în raportul dat al tuturor antecedentelor hi și kl către toate consecventele, care sînt latura al cărei pătrat este dreptunghiul ahb , și dreapta ik , și latura al cărei pătrat este dreptunghiul alb . Prin urmare din acel raport dat avem punctele de contact c , d , e în figura cea nouă. Prin operațiile inverse ale ultimei leme aceste puncte se transferă în figura primă, și acolo (conform problemei XIV) se va descrie traiectoria. Q.E.F. De altfel în mod analog după cum punctele a , b se află fie între punctele h , l , fie înafară, trebuie să luăm punctele c , d , e fie între punctele h , i , k , l , fie în afară. Dacă vreunul din punctele a , b cade între punctele h , l , și celălalt în afară, problema e imposibilă.

PROPOZIȚIA XXVI. PROBLEMA XVIII

Să se descrie o traiectorie ce va trece printr-un punct dat și va atinge patru drepte de poziție dată.

Din intersecția comună a două tangente oarecare să ducem la intersecția comună a celorlalte două o dreaptă infinită, și luînd aceasta ca primă rază ordonată să transformăm figura (conform lemei XXII) într-o figură nouă, și două câte două tangente, care se întîlneau pe prima rază ordonată devin acum paralele. Fie acestea hi , și kl , ik și hl cuprinzînd paralelogramul $hikl$. Și fie p în această nouă figură punctul corespunzător punctului dat în prima figură. Prin centrul O al figurii să ducem pq și, Og fiind egal cu

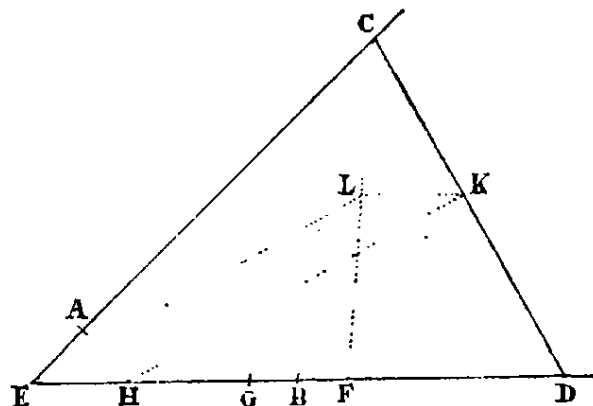


Op, q va fi celălalt punct prin care trebuie să treacă secțiunea conică în această nouă figură. Prin operația inversă a lemei XXII transferă acest punct în figura primă, și acolo vor fi două puncte prin care trebuie descrisă traiectoria. Într-adevăr prin ea se poate descrie traiectoria conform problemei XVII. Q.E.F.

LEMA XXIII

Dacă două drepte de poziție dată AC, BD se termină în punctele date A, B, și au între ele un raport dat, iar dreapta CD, care unește punctele nedeterminate C, D se taie după un raport dat în K: zic că punctul K se va afla pe o dreaptă de poziție dată.

Căci să presupunem că dreptele AC, BD se întâlnesc în E și pe BE să luăm BG către AE precum BD către AC, și fie FD totdeauna egal cu dreapta dată EG; și prin construcție va fi EC către GD, adică către EF, precum AC către BD, și deci în raportul dat, și de aceea triunghiul EFC va fi dat ca gen. Să tăiem CF în L așa fel ca CL către CF să fie în raportul lui CK către CD; și fiindcă acel raport e dat, va fi dat și triunghiul EFL ca gen; și de aceea punctul L se va afla pe dreapta EL de poziție dată. Să unim LK, și triunghiurile CLK, CFD vor fi asemenea; și fiind dat FD și fiind dat raportul lui LK către FD, va fi dat LK. Să luăm EH egal ca acesta, și ELKH va fi totdeauna un paralelogram. Deci punctul K este situat pe latura HK de poziție dată a acelui paralelogram. Q.E.D.



COROLAR. Fiind dată figura EFLC ca gen, cele trei drepte, EF, EL și EC, adică GD, HK și EC, au între ele rapoarte date.

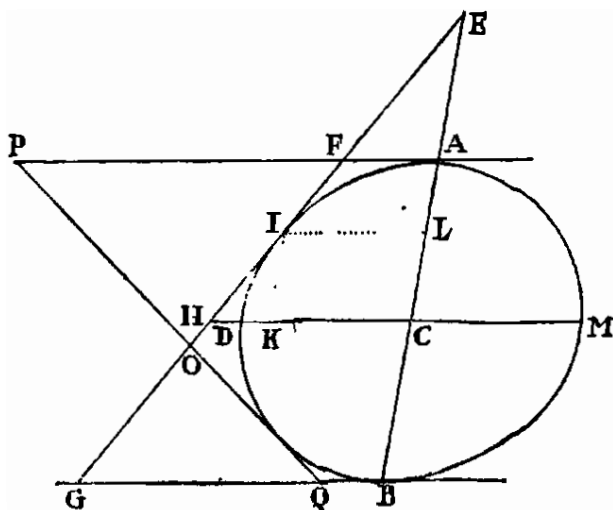
LEMA XXIV

Dacă trei drepte, dintre care două să fi paralele și de poziție dată, ating o secțiune conică oarecare: zic că semidiametrul secțiunii paralel cu cele două, este media proporțională între segmentele acestora cuprinse între punctele de contact și tangenta a treia.

Fie AF, GB două paralele atingând secțiunea conică ADB în A și B; EF dreapta a treia atingând secțiunea conică în I, și întâlnind tangentele de mai sus în F și G; și fie CD semidiametrul paralel cu tangentele figurii; zic că AF, CD, BG sînt continuu proporționale.

Căci dacă diametrii conjugăți AB, DM întâlnesc tangenta FG în E și H, și se taie reciproc în C, și se întregeste paralelogramul IKCL; din natura secțiunilor conice va fi precum EC către CA tot așa CA către CL,

și tot așa separînd $EC - CA$ către $CA - CL$, sau EA către AL , și componînd EA către $EA + AL$ sau EL după cum EC către $EC + CA$ sau EB ;



și deci din cauza asemănării triunghiurilor EAF , ELI , ECH , EBG , AF către LI precum CH către BG . Tot astfel din natura secțiunilor conice, LI sau CK către CD precum și CD către CH , și de aceea prin înmulțirea celor două proporții AF către CD după cum CD către BG . Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă două tangente FG , PQ întîlnesc tangentele paralele AF , BG în F și G , P și Q , și se întretaie în O , prin înmulțirea celor două proporții va fi AF către BQ după cum AP către

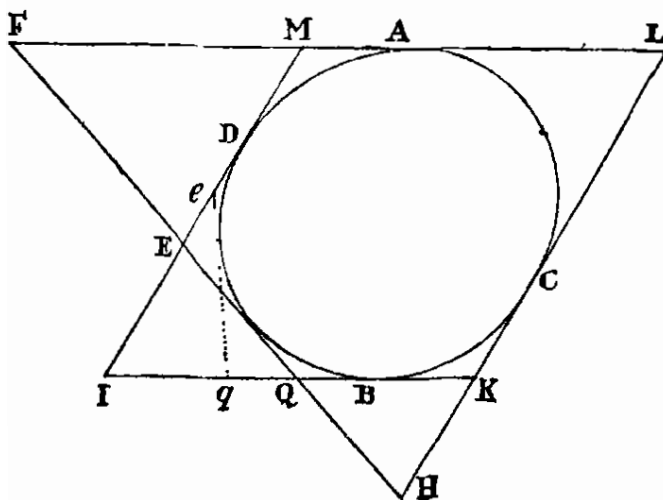
BG , și separînd după cum FP către GQ , și de aceea după cum FO către OG .

COROLARUL 2. De unde cele două drepte PG , FQ , duse prin punctele P și G , F și Q se întîlnesc pe dreapta ACB ce trece prin centrul figurii și punctele de contact A , B .

LEMA XXV

Dacă cele patru laturi ale unui paralelogram prelungite la infinit ating o secțiune conică oarecare, și sînt tăiate de o a cincea tangentă oarecare; însă se iau abscisele a două laturi oarecare coterminale terminate la unghiurile opuse ale paralelogramului; zic că fiecare abscisă este către latura din care este tăiată, precum partea celeilalte laturi coterminale aflătoare între punctul de contact și a treia latură către cealaltă abscisă.

Să presupunem că cele patru laturi ML , IK , KL , MI ale paralelogramului $MLIK$ ating secțiunea conică în A , B , C , D și că tangenta a cincea FQ taie aceste laturi în F , Q , H și E ; și se iau abscisele ME , KQ ale laturilor MI , KI sau abscisele KH , MF ale laturilor KL , ML : zic că ME este către MI precum BK către KQ ; și KH către KL precum AM către MF . Căci potrivit corolarului întâi al lemei de mai sus ME este către EI precum AM sau BK către BQ , și componînd ME către MI precum BK către KQ . Q.E.



D. La fel KH către HL precum BK sau AM către AF , și separînd KH către KL precum AM către MF . Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă se dă paralelogramul $IKLM$, descris în jurul unei secțiuni conice date, va fi dat dreptunghiul $KQ \times ME$, precum și dreptunghiul egal cu acesta $KH \times MF$. Căci acele dreptunghiuri vor fi egale din cauza asemănării triunghiurilor KQH , MFE .

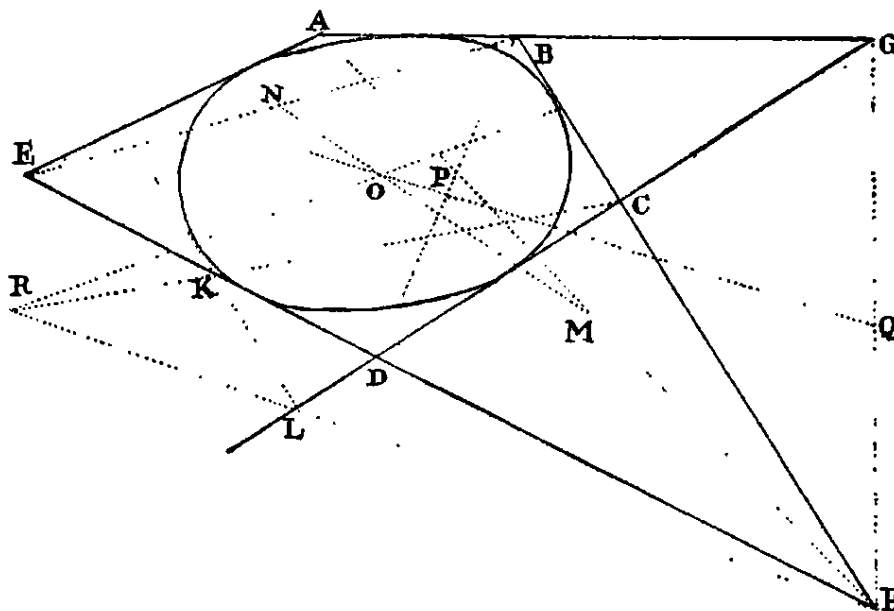
COROLARUL 2. Și dacă se duce o a șasea tangentă eq întâlnind tangentele KI , MI în q și e ; dreptunghiul $KQ \times ME$ va fi egal cu dreptunghiul $Kq \times Me$; și va fi KQ către Me precum Kq către ME , și separînd precum Qq către Ee .

COROLARUL 3. De unde și dacă Eq , eQ se unesc și se bisectează, și se duce o dreaptă prin punctele de înjumătățire, aceasta va trece prin centrul secțiunii conice. Căci deoarece Qq este către Ee precum KQ către ME , dreapta va trece prin mijlocul tuturor dreptelor Eq , eQ , MK (potrivit lemei XXIII) și mijlocul dreptei MK este centrul secțiunii.

PROPOZIȚIA XXVII. PROBLEMA XIX

Să se descrie o traiectorie care atinge cinci drepte de poziție dată.

Fie date prin poziția lor tangentele ABG , BCF , GCD , FDE , EA . Să bisectăm în M și N diagonalele AF , BE ale figurii patrulateră $ABFE$ cuprinsă de patru oarecare dintre ele, și (potrivit corolarului 3 al lemei XXV) dreapta MN dusă prin punctele de înjumătățire va trece prin centrul traiectoriei. Să bisectăm din nou în P și Q diagonalele (ca să zic așa) BD , GF ale figurii patrulateră $BGDF$ cuprinsă de alte patru tangente oarecare: și dreapta PQ dusă prin punctele de înjumătățire va trece prin centrul traiectoriei. Prin



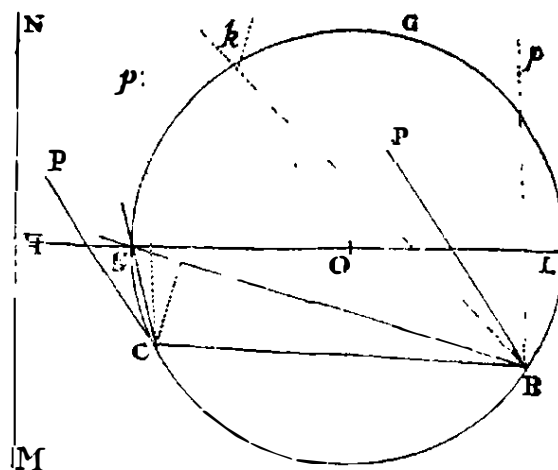
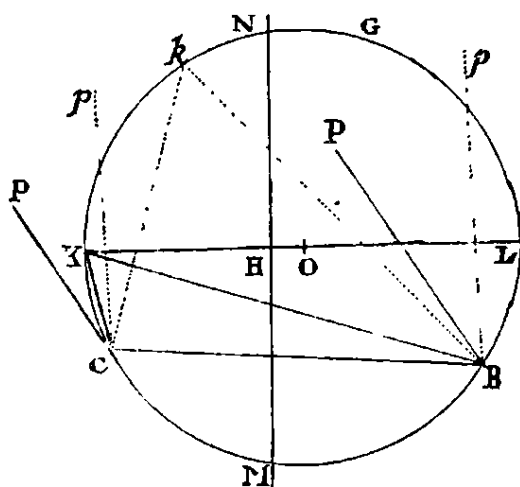
urmare centrul va fi dat în punctul de întâlnire al acestor bisectoare. Fie acela O . Să ducem KL paralelă la o tangentă oarecare BC , la o astfel de distanță încît centrul O să fie așezat la mijloc între paralele, și dreapta dusă KL să atingă traiectoria ce trebuie descrisă. Să presupunem că aceasta taie alte două tangente oarecare GCD , FDE în L și K . Prin punctele de întâlnire C și K , F și L ale acestor tangente neparalele CL , FK cu paralelele

CF, KL , să ducem CK, FL concurente în R , și dreapta OR dusă și prelungită va tăia tangentele paralele CF, KL în punctele de contact. Acest lucru este evident potrivit corolarului 2 al lemei XXIV. Prin aceeași metodă se pot afla alte puncte de contact, și atunci în sfârșit prin construcția din problema XIV se poate descrie traiectoria. Q.E.F.

SCOLIE

Problemele, în care se dau fie centrele fie asimptotele traiectoriilor, sînt cuprinse în cele precedente. Căci fiind date puncte și tangente în același timp cu centrul, se dau tot atîtea alte puncte și alte tangente la o distanță egală de centru, de cealaltă parte a lui. Însă o asimptotă trebuie concepută ca o tangentă, și extremitatea ei infinit de îndepărtat (dacă se poate vorbi astfel), ca un punct de contact. Să ne închipuim că punctul de contact al unei tangente oarecare se îndepărtează la infinit, și tangenta se schimbă în asimptotă, și construcțiile problemelor precedente se schimbă în construcții unde asimptota este dată.

După ce traiectoria a fost descrisă se pot afla axele și focarele ei prin această metodă. În construcția și figura lemei XXI să facem ca brațele BP, CP , ale unghiurilor mobile PBN, PCN , al căror punct de întâlnire descrie traiectoria, să fie paralele între ele, și păstrînd acea poziție să se rotească în jurul polilor lor B, C în aceea figură. Între timp celelalte brațe CN, BN ale acelor unghiuri să descrie prin punctele lor de întâlnire K sau k , cercul $BCKC$. Fie O centrul acestui cerc. Din acest centru să ducem la directoarea MN , pe care se întîlneau între timp celelalte laturi CN, BN , în timp ce se descria traiectoria, normala OH tăind cercul în K și L . Și dacă celelalte laturi CK, BK se întîlnesc în punctul K care e mai apropiat de directoare, primele laturi CP, BP vor fi paralele cu axa mare și perpendiculare pe cea mică; și va avea loc contrariul dacă aceleași laturi se întîlnesc în punctul mai îndepărtat L . De unde dacă se dă centrul traiectoriei se vor da axele. Acestea însă fiind date, focarele sînt ușor aflate. Dar pătratele axelor sînt între ele precum KH către LH , și de aceea e ușor să se descrie o traiectorie de un gen dat prin patru puncte date. Căci dacă două din punctele date sînt constituite din polii C, B , al treilea va da unghiurile mobile PCK, PBK ; acestea însă fiind date se poate descrie cercul $BGKC$. Atunci fiind dat genul traiectoriei, va fi dat raportul OH către OK , și deci



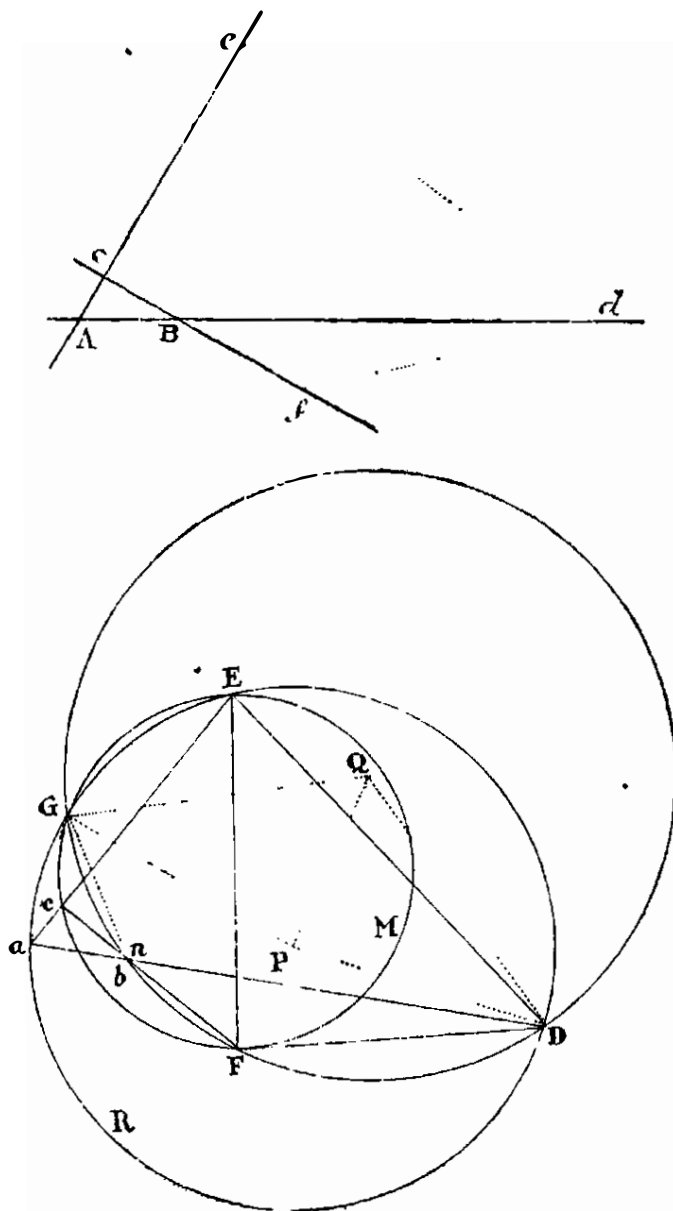
însuși OH . Din centrul O și cu intervalul OH să descriem un alt cerc și dreapta care atinge acest cerc, și care trece prin intersecția laturilor CK , BK , unde primele laturi GP , BP se întâlnesc cu al patrulea punct dat, va fi directoarea MN cu ajutorul căreia se descrie traiectoria. De unde la rîndul său se poate înscrie un trapez de un gen dat (dacă se exclude anumite cazuri imposibile) într-o secțiune conică oarecare dată.

Sînt și alte leme cu ajutorul cărora se pot descrie traiectorii de un gen dat, fiind date puncte și tangente. De felul acesta este faptul că dacă se duce o linie printr-un punct oarecare de poziție dată, care taie o secțiune conică dată în două puncte și se bisectează între valul intersecțiilor, punctul de înjumătățire atinge o altă secțiune conică de același gen cu cea precedentă și avînd axele paralele cu axele celei precedente. Dar trec la chestiuni mai folositoare.

LEMA XXVI

Să se așeze cele trei unghiuri ale unui triunghi de specie și mărime date pe tot ațtea drepte de poziție dată care nu sînt toate paralele fiecare la fiecare.

Fie date trei drepte infinite AB , AC , BC după poziția lor, și se cere să se așeze triunghiul DEF în așa fel, încît unghiul său D să atingă linia AB , unghiul E linia AC , și unghiul F linia BC . Pe DE , DF și EF să descriem trei segmente de cerc DRE , DGF , EMF care să cuprindă unghiuri egale respectiv cu unghiurile BAC , ABC , ACB . Să descriem însă aceste segmente de acele părți ale liniilor DE , DF , EF , ca literele $DRED$ să urmeze pe orbită în aceeași ordine cu literele $BACB$, literele $DGFD$ în aceeași cu literele $ABCA$, și literele $EMFE$ în aceeași cu literele $ACBA$; apoi să întregim aceste segmente în cercuri întregi. Fie G punctul unde se taie reciproc primele două cercuri, și fie centrele lor P și Q . Unind GP , PQ să luăm Ga către AB precum GP către PQ , și din centrul G cu intervalul Ga să descriem un cerc care să taie pe primul cerc DGE în a . Să unim atît aD tăind al doilea cerc DFG în b , cît și aE tăind al treilea cerc EMF în c . Și atunci se poate construi figura $ABCdef$ asemenea și egală cu figura $abcDEF$. Ceea ce fiind făcut problema e rezolvată.



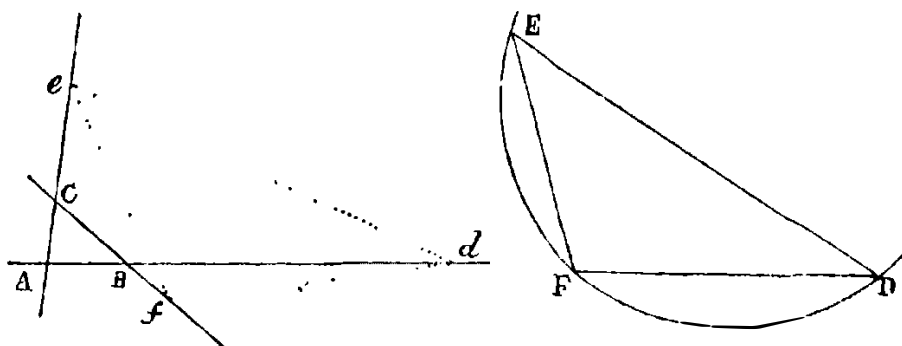
Căci să ducem Fc întâlnind pe aD în n , și să unim aG , bG , QG , QD , PD . Din construcție unghiul EaD este egal cu unghiul CAB , și unghiul acF egal cu unghiul ACB , și deci triunghiul anc isoscel cu triunghiul ABC . Prin urmare unghiul anc sau FnD este egal cu unghiul ABC și în consecință cu unghiul FbD ; și de aceea punctul n cade în punctul b . Mai departe unghiul GPQ , care e jumătatea unghiului la centru CPD , este egal cu unghiul înscris GaD ; și unghiul GQP care este jumătatea unghiului la centru CQD , este egal cu suplementul unghiului înscris GbD , și de aceea egal cu unghiul Gba ; și deci triunghiurile GPQ , Gab sînt asemenea; și Ga este către ab precum GP către PQ ; adică (prin construcție) precum Ga către AB . Așadar ab și AB sînt egale; și de aceea triunghiurile abc , ABC , care am demonstrat adineaori că sînt asemenea, sînt și egale. De unde, fiindcă unghiurile D , E , F ale triunghiului DEF ating respectiv laturile ab , ac , bc ale triunghiului abc , figura $ABCdef$ se poate întregi asemenea și egală cu figura $abcDEF$, și întregind-o se, rezolvă problema. Q.E.F.

COROLAR. De aici se poate duce o dreaptă ale cărei părți date în lungime vor fi interceptate de trei drepte de poziție dată. Să ne închipuim că, în timp ce punctul D se apropie de latura EF , și laturile DE , DF se așează în aceeași direcție, triunghiul DEF se schimbă în linie dreaptă, a cărei parte DE trebuie așezată între dreptele de poziție dată AB , AC și partea dată DF între dreptele de poziție dată AB , BC ; și aplicînd construcția precedentă la acest caz problema va fi rezolvată.

PROPOZIȚIA XXVIII. PROBLEMA XX

Să se descrie o traiectorie de specie și mărime dată, ale cărei părți date vor fi așezate între trei drepte de poziție dată.

Se cere să se descrie o traiectorie care să fie asemenea și egală cu linia curbă DEF , și care să fie tăiată de cele trei drepte AB , AC , BC de poziție dată în părțile DE , EF asemenea și egale cu părțile date ale acestora.

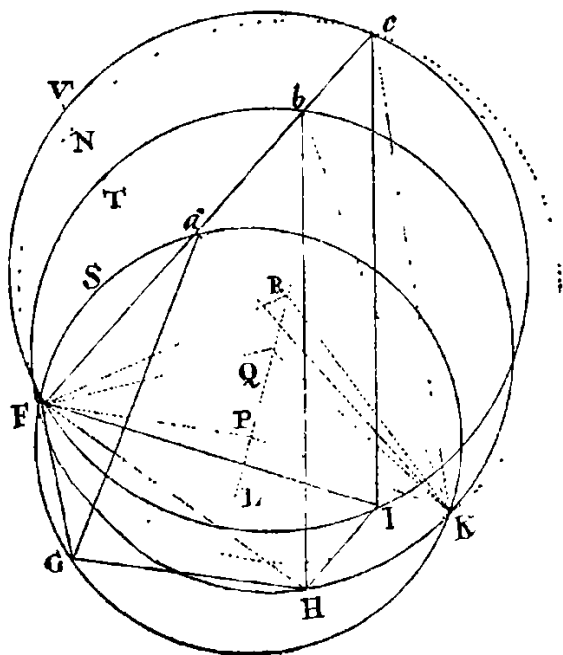
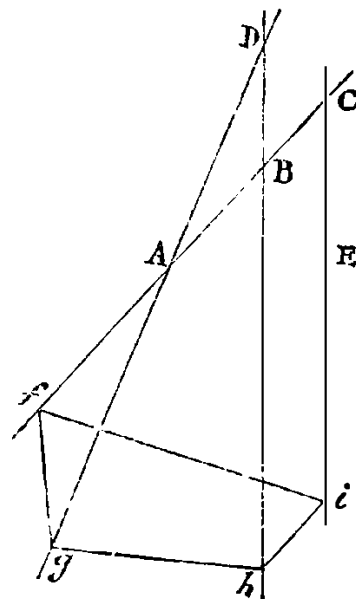


Să ducem dreptele DE , EF , DF , și să punem unghiurile D , E , F ale triunghiului DEF pe acele drepte de poziție dată (potrivit lemei XXVI) apoi în jurul triunghiului să descriem o traiectorie asemenea și egală cu curba DEF . Q.E.F.

LEMA XXVII

Să se descrie un trapez de o specie dată, ale cărui unghiuri să fie așezate respectiv pe patru drepte de poziție dată, care nici nu sînt toate paralele, și nici nu converg spre un punct comun.

Fie date după poziție patru drepte ABC , AD , BD , CE ; dintre care cea dintîi să taie pe a doua în A , pe a treia în B , și pe a patra în C : și se cere să se descrie trapezul $fghi$, care să fie asemenea cu trapezul $FGHI$; și al cărui unghi f , egal cu unghiul dat F , să atingă dreapta ABC ; și celelalte unghiuri g , h , i , egale cu celelalte unghiuri date G , H , I , să atingă respectiv celelalte linii AD , BD , CE . Să unim FH și pe FG , FH , FI să se descrie tot atîtea segmente de cerc FSG , FTH , FVI ; dintre care cel dintîi FSG să fie capabil de un unghi egal cu unghiul BAD , al doilea FTH să fie capabil de un unghi egal cu unghiul CBD , și al treilea FVI să fie capabil de un unghi egal cu unghiul ACE . Segmentele trebuie însă descrise de acele părți ale liniilor FG , FH , FI , ca ordinea circulară a literelor $FSGF$ să fie aceeași cu a literelor $BADB$, și ca literele $FTHF$ să urmeze pe orbită în aceeași ordine ca literele $CBDC$, și literele $FVIF$ în aceeași ca $ACEA$. Să completăm segmentele în cercuri întregi, și fie P centrul primului cerc FSG , și Q centrul celui de-al doilea FTH . Să unim și să prelungim de ambele părți PQ și pe ea să luăm QR în acel raport către PQ pe care-l are BC către AB . Dar să luăm QR de acele părți ale



punctului Q ca ordinea literelor P, Q, R să fie aceeași ca a literelor A, B, C : și din centrul R și cu intervalul RF să descriem al patrulea cerc FNC tăind cercul al treilea FVI în c . Să unim Fc tăind primul cerc în a , și pe al doilea în b . Să ducem aG , bH , cI și se poate construi figura $ABCfghi$ asemenea cu figura $abcFGHI$. Ceea ce fiind făcut, trapezul $fghi$ va fi tocmai acela care trebuia construit.

Căci să presupunem că primele două cercuri FSG , FTH se întretaie în K . Să unim PK , QK , RK , aK , bK , cK și să prelungim QP pînă în L . Unghiurile înscrise FaK , FbK , FcK sînt jumătăți ale unghiurilor la centru FPK , FQK , FRK , și deci egale cu jumătățile lor LPK , LQK , LRK . Prin urmare

figura $PQRK$ este echiunghică și asemenea cu figura $abcK$, și de aceea ab este către bc precum PQ către QR , adică precum AB către BC . Afară de

către fg precum FH către FG . Așadar, fiindcă și gi este către hi precum Mi către Li , adică precum GI către HI , e clar că liniile FI , fi , sînt tăiate în mod asemănător în g și h , G și H . Q.E.F.

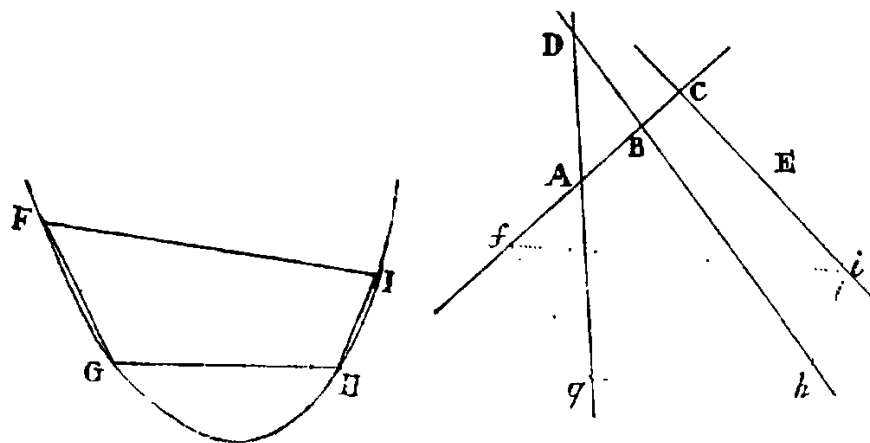
În construcția acestui corolar după ce se duce LK tăind pe CE în i , se poate prelungi iE pînă în V , ca să fie EV către Ei , precum FH către HI , și se poate duce Vf paralel cu BD . Același lucru se obține dacă din centrul i cu intervalul IH , se descrie un cerc tăind BD în X , și se prelungește iX pînă în Y , ca să fie iY egală cu IF , și se duce Yf paralel cu BD .

Alte soluții ale acestei probleme le-au aflat de multă vreme Wren și Wallis.

PROPOZIȚIA XXIX. PROBLEMA XXI

Să se descrie o traiectorie de un gen dat, care va fi tăiată de patru drepte de poziție dată în părți de ordine, specie și proporție date.

Se cere să se descrie o traiectorie, care să fie asemenea cu linia curbă $FGHI$ și ale cărei părți asemenea și proporționale cu părțile ei FG , GH , HI , să fie interceptate de dreptele AB și AD , AD și BD , BD și CE , de poziție dată, prima de primele, a doua de cele de-a doua, a treia de cele de-a treia.



Ducînd dreptele FG , GH , HI , FI , să descriem (potrivit lemei XXVII) trapezul $fgih$ care să fie asemenea cu trapezul $FGHI$, și ale cărui unghiuri f , g , h , i să atingă respectiv dreptele de poziție dată AB , AD , BD , CE , în ordinea indicată. Apoi să descriem în jurul acestui trapez o traiectorie asemenea cu linia curbă $FGHI$.

SCOLIE

Se poate construi această problemă și după cum urmează. Unind FG , GH , HI , FI să prelungim GF pînă în V și să unim FH , IG ; și să facem unghiurile CAK , DAL egale cu unghiurile FGH , VFH . Să presupunem că AK , AL se întîlnesc cu dreapta BD în K și L , și apoi să ducem KM , LN , dintre care KM să constituie unghiul AKM egal cu unghiul GHI , și să fie către AK precum este III către GH ; și LN să constituie unghiul ALN egal

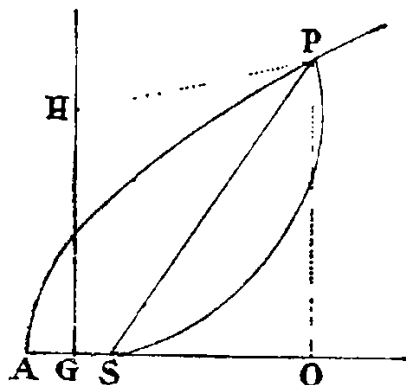
SECȚIUNEA VI

Despre aflarea mișcărilor pe orbite date

PROPOZIȚIA XXX. PROBLEMA XXII

Să se afle într-un moment anumit locul unui corp în mișcare pe o traiectorie parabolică dată.

Fie S focarul A vârful principal al parabolei, și fie $4AS \times M$ egal cu aria sectorului parabolic APS , care a fost descrisă de raza SP , fie după plecarea corpului din vârful, fie înainte de ajungerea lui la vârful. Mărimea ariei acelui sector se cunoaște din timpul proporțional cu ea. Să bisectăm AS în G , și să ridicăm perpendiculara GH egală cu $3M$, și cercul descris din centrul H cu intervalul HS va tăia parabola în locul cerut P . Căci lăsând să cadă perpendiculara PO pe axă și ducând PH , este $AG^2 + GH^2 (= HP^2 = AO - AG^2 + PO - GH^2) = AO^2 + PO^2 - 2GAO - 2GH \times PO + AG^2 + GH^2$. De unde $2GH \times PO (= AO^2 + PO^2 - 2GAO) = AO^2 + \frac{3}{4} PO^2$. În loc de AO^2 să scriem $AO \times \frac{PO^2}{4AS}$; și împărțind toți termenii



prin $3 PO$ și înmulțindu-i cu $2 AS$, vom avea $\frac{4}{3} GH \cdot AS (= \frac{1}{6} AO \times PO + \frac{1}{2} AS \times PO \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO = \text{aria } \overline{APO - SPO}) = \text{aria } APS$. Dar GH era $3M$, și de aceea $\frac{4}{3} GH \times AS$ este $4AS \times M$. Deci aria sectorului APS este egală cu aria ce trebuia tăiată $4AS \times M$. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici GH este către AS , precum timpul în care corpul a descris arcul AP către timpul în care corpul a descris arcul dintre vârful A și perpendiculara ridicată pe axă din focarul S .

COROLARUL 2. Și considerînd cercul ASP ce trece neconținut prin corpul în mișcare P , viteza punctului H este către viteza pe care a avut-o corpul în vârful A ca 3 la 8; și deci linia GH e în același raport cu linia dreaptă pe care ar descrie-o corpul în timpul mișcării sale de la A la P , cu viteza pe care a avut-o în vârful A .

COROLARUL 3. De aici invers se poate afla timpul în care corpul a descris un arc oarecare dat AP . Unește AP și în punctul său din mijloc ridică o perpendiculară întâlnind dreapta GH în H .

LEMA XXVIII

Nu există nici o figură ovală a cărei arie, tăiată de drepte după voie să se poată afla în mod general prin ecuații finite după numărul termenilor și al dimensiunilor.

În interiorul ovalei fie dat un punct oarecare, în jurul căruia ca pol să se rotească încontinuu o linie dreaptă cu o mișcare uniformă, și între

timp pe acea dreaptă să pornească un punct mobil de la pol, și să se miște totdeauna cu o viteză care să fie ca pătratul acelei drepte din interiorul ovalei. Prin această mișcare punctul va descrie o spirală cu un număr infinit de spire. Dacă acum proporția de arie ovală tăiată de acea dreaptă se poate afla printr-o ecuație finită, prin aceeași ecuație se va afla și distanța punctului de la pol, care este proporțională cu această arie, astfel că toate punctele spiralei se pot afla printr-o ecuație finită: și de aceea și intersecția oricărei drepte de poziție dată cu spirala se poate afla printr-o ecuație finită. Și orice dreaptă prelungită la infinit taie spirala într-un număr infinit de puncte, și ecuația, prin care se află o intersecție oarecare a două linii, exprimă toate intersecțiile lor prin tot atâtea rădăcini, și de aceea se ridică la tot atâtea dimensiuni câte intersecții sînt. Fiindcă două cercuri se taie reciproc în două puncte, o intersecție nu se va afla decît printr-o ecuație de două dimensiuni, prin care se află și cealaltă intersecție. Deoarece intersecțiile a două secțiuni conice pot fi patru, nici una din ele nu poate fi aflată în general, decît printr-o ecuație de patru dimensiuni, prin care se află toate deodată. Căci dacă se caută separat intersecțiile, cum legea și condiția tuturor este aceeași, calculul va fi același în fiecare caz, și de aceea concluzia totdeauna aceeași, care deci trebuie să cuprindă toate intersecțiile deodată și să le exprime în mod indiferent. De unde și intersecțiile secțiunilor conice și a curbilor de puterea a treia, deoarece ele pot fi șase, apar simultan prin ecuații de șase dimensiuni, și intersecțiile a două curbe de puterea a treia, deoarece pot fi nouă, apar simultan prin ecuații de nouă dimensiuni. Dacă aceasta nu ar fi necesar să se întîmple, toate problemele solide s-ar putea reduce la plane și cele mai mult decît solide la solide. Vorbesc aici de curbe ireductibile în putere. Căci dacă ecuația, prin care se definește curba, se poate reduce la o putere inferioară: curba nu va fi unică, ci compusă din două sau mai multe, ale căror intersecții se pot afla separat prin diverse calcule. În același mod cele două intersecții ale dreptelor și secțiunilor conice apar totdeauna prin ecuații de două dimensiuni, cele trei ale dreptelor și curbilor ireductibile de puterea a treia prin ecuații de trei, cele patru ale dreptelor și curbilor ireductibile de puterea a patra prin ecuații de patru dimensiuni, și așa la infinit. Prin urmare intersecțiile în număr infinit ale dreptei și spiralei, deoarece această curbă este simplă și ireductibilă în mai multe curbe, cer ecuații infinite ca număr al dimensiunilor și rădăcinilor, prin care toate intersecțiile se pot exprima simultan. Căci aceeași este legea și același este calculul pentru toate. Căci dacă din pol se coboară o perpendiculară pe dreapta secantă, și se rotește perpendicular împreună cu secanta în jurul polului, intersecțiile spiralelor vor trece una în alta și aceea care era cea dintîi sau cea mai apropiată, după o revoluție va fi a doua, după două a treia, și așa mai departe: și nici nu se va schimba ecuația decît dacă se schimbă mărimea cantităților prin care se determină poziția secantei. De unde fiindcă acele cantități după diversele revoluții se întorc la primele mărimi, ecuația va reveni la prima formă, și deci una și aceeași va da toate intersecțiile, și de aceea ea va avea rădăcini în număr infinit, prin care toate se pot exprima. Prin urmare în general intersecția dreptei și spiralei nu se poate afla printr-o ecuație finită, și deci nu există nici o ovală, a cărei arie tăiată prin drepte anumite, să se poată exprima în general printr-o astfel de ecuație.

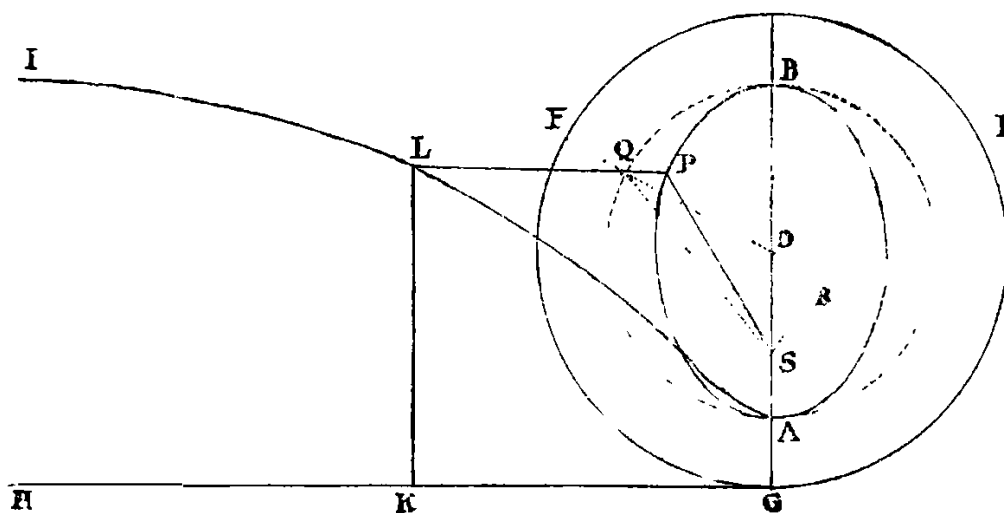
Prin același raționament, dacă intervalul dintre pol și punct, cu care se descrie spirala, se ia proporțional cu perimetrul ovalei tăiate, se poate arăta că în general lungimea perimetrului nu se poate exprima printr-o ecuație finită. Aici însă vorbesc de ovale care nu sînt atinse de figuri conjugate ce merg la infinit.

COROLAR. De aici aria elipsei care se descrie cu raza dusă din focar la corpul mobil, nu se deduce din timpul dat printr-o ecuație finită; și de aceea nu se poate determina prin descrierea curbelor geometrice raționale. Numesc curbe geometrice raționale pe acelea ale căror puncte toate pot fi determinate prin lungimi ce se definesc prin ecuații, adică, prin rapoarte complicate ale lungimilor; și pe celelalte (ca spirale cvadractice, trochoide) geometrice iraționale. Căci lungimile care sînt sau nu sînt ca un număr către un număr (ca în Cartea a X-a a Elementelor) sînt aritmetic raționale sau iraționale. Prin urmare tai o arie a elipsei proporțională cu timpul printr-o curbă geometrică irațională după cum urmează.

PROPOZIȚIA XXXI. PROBLEMA XXIII

Să se afle într-un anumit moment locul unui corp ce se mișcă pe o traiectorie eliptică dată.

Fie A vârful principal al elipsei APB , S focarul, și O centrul, și fie P locul ce trebuie aflat al corpului. Să prelungim OA pînă în G , ca să fie OG către OA precum OA către OS . Să ridicăm perpendiculara GH , și din centrul O și cu intervalul OG să descriem cîercul GEF , și pe rigla GH ca bază să înainteze roata GEF învîrtindu-se în jurul axei sale, și descriind între timp cu punctul său A trochoida ALI . Ceea ce fiind făcut, să luăm pe GK în acel raport către perimetrul $GEFG$ al roții, precum este timpul, în



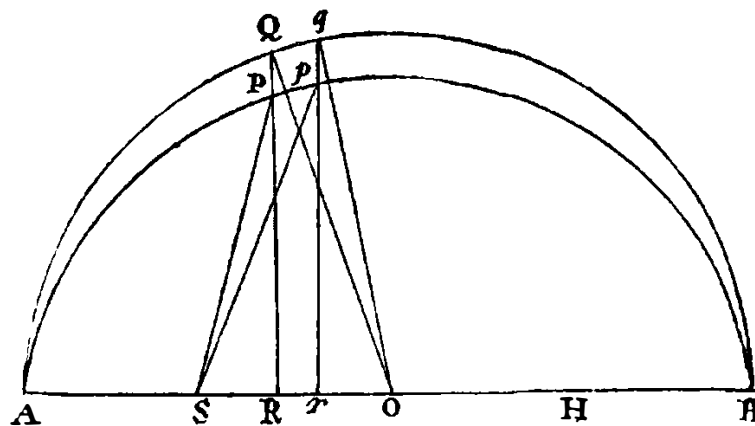
care corpul înaintînd din A a descris arcul AP , către timpul unei revoluții în elipsă. Să ridicăm perpendiculara KL întîlnind trochoida în L , și dreapta dusă LP paralelă cu KG va întîlni elipsa în locul căutat P al corpului.

Căci din centrul O , cu intervalul OA să descriem semicercul AQB , și fie Q intersecția arcului AQ cu dreapta LP , prelungită dacă e necesar, și să unim SQ , OQ . Fie F intersecția arcului EFQ cu OQ , și pe aceeași OQ

să coborîm perpendiculara SR . Aria APS este ca aria AQS , adică precum diferența între sectorul OQA și triunghiul OQS , sau precum diferența dreptunghiurilor $\frac{1}{2} OQ \times AQ$ și $\frac{1}{2} OQ \times SR$, adică, fiind dat $\frac{1}{2} OQ$, precum diferența între arcu AQ și dreapta SR , și de aceea (fiindcă aceleași sînt rapoartele date SR către sinusul arcu AQ , OS către OA , OA către OG , AQ către GF , și prin separare $AQ - SR$ către $GF - \text{sinusul arcu } AQ$) precum GK diferența între arcu GF și sinusul arcu AQ . Q.E.D.

SCOLIE

De altfel, deoarece descrierea acestei curbe este dificilă, e preferabil să dăm o soluție cu adevărat aproximativă. Să se afle atît un unghi oarecare



B , care să fie către unghiul de 57.29578 grade, pe care-l subîntinde un unghi egal cu raza, precum e distanța focarelor SH către diametrul AB al elipsei; cît și o lungime oarecare L ; care să fie către rază în același raport invers. Care odată fiind aflate, problema poate fi apoi soluționată prin următoarea analiză. Printr-o construcție oarecare, sau făcînd vreo conjectură, să

se afle locul P al corpului foarte apropiat de locul lui adevărat p . Și ducînd la axa elipsei ordonata PR , din proporția diametrelor elipsei, va fi dată ordonata RQ a cercului circumscris AQB , care este sinusul unghiului AOQ fiind AO raza; și care taie elipsa în P . Este deajuns să aflăm acel unghi printr-un calcul rudimentar în numere apropiate. Să presupunem că cunoaștem și unghiul proporțional cu timpul, adică acela care să fie către patru drepte, după cum este timpul, în care corpul a descris arcu Ap , către timpul unei revoluții pe elipsă. Fie acest unghi N . Atunci să luăm și unghiul D către unghiul B , precum este sinusul unghiului AOQ către rază, și unghiul E către unghiul $N - AOQ + D$, precum este lungimea L către aceeași lungime L micșorată cu cosinusul unghiului AOQ , cînd acest unghi e mai mic decît unul drept, mărită cînd e mai mare. Apoi să luăm atît unghiul F către unghiul B , precum este sinusul unghiului $AOQ + E$ către rază, cît și unghiul G către unghiul $N - AOQ - E + F$ precum este lungimea L către aceeași lungime micșorată cu cosinusul unghiului $AOQ + E$ cînd unghiul este mai mic ca unul drept, mărită cînd e mai mare. A treia oară, să luăm unghiul H către unghiul B după cum este sinusul unghiului $AOQ + E + G$ către rază; și unghiul I către unghiul $N - AOQ - E - G + H$, precum e lungimea L către aceeași lungime micșorată cu cosinusul unghiului $AOQ + E + G$, cînd unghiul este mai mic decît unul drept, mărită cînd e mai mare. Și așa se poate continua la infinit. În sfîrșit, să se ia unghiul AOq egal cu unghiul $AOQ + E + G + I + \text{etc.}$ Și din cosinusul său Or și ordonata pr , care este către sinusul său qr precum axa mai mică a elipsei către axa mai mare,

se va avea locul corect p al corpului. Când unghiul $N - AOQ + D$ este negativ, semnul $+$ al lui E trebuie schimbat pretutindeni în $-$ și semnul $-$ în $+$. Același lucru trebuie să se înțeleagă despre semnele lui G și I când unghiurile $N - AOQ - E + F$, și $N - AOQ - E - G + H$ devin negative. Dar seria infinită $AOQ + E + G + I + \text{etc.}$ convergează cât se poate de repede astfel că abia va fi vreodată necesar să se meargă dincolo de al doilea termen E . Și calculul se întemeiază pe teorema, că aria APS este precum diferența între arcu AQ și dreapta coborâtă din focarul S perpendicular pe raza OQ .

Printr-un calcul asemănător se rezolvă problema în hiperbolă. Fie O centrul ei, A vârful, S focarul și OK asimptotă. Presupunem că cunoaștem cantitatea ariei ce trebuie tăiată proporțional cu timpul. Fie ea A , și să presupunem că cunoaștem prin conjectură poziția dreptei SP care taie o arie APS foarte apropiată de cea adevărată. Să unim OP , și de la A și P să se ducă la asimptotă AI , PK paralele cu cealaltă asimptotă, și prin

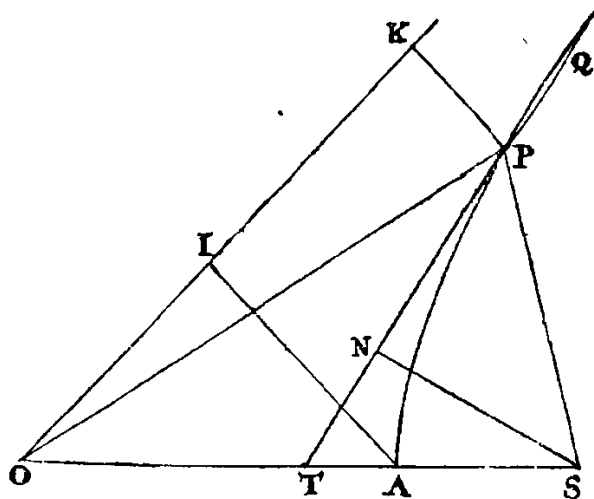
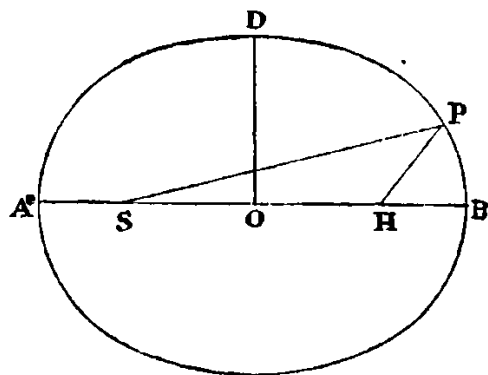


tabela de logaritmi se va da aria $AIKP$, și aria OPA egală cu ea, pe care scăzând-o din triunghiul OPS va rămâne aria tăiată APS . Aplicând diferența dublă $2APS - 2A$, sau $2A - 2APS$ dintre aria de tăiat A , și aria tăiată APS la linia SN , care e perpendiculară din focarul S pe tangenta TP , se va naște lungimea coardei PQ . Să înscriem însă coarda PQ între A și P , dacă aria tăiată APS este mai mare ca aria de tăiat A , și de partea contrară a punctului P în caz contrariu: și punctul Q va fi locul mai



precis al corpului. Și repetînd calculul se va afla locul cu o precizie din ce în ce mai mare.

Și prin aceste calcule problema se rezolvă în general în mod analitic. Într-adevăr pentru scopurile astronomice este mai potrivit calculul particular ce urmează. Fiind AO , OB , OD semiaxele elipsei și L parametrul ei, și D diferența între semiaxa mică OD și jumătatea $\frac{1}{2}L$ a parametrului; să căutăm atît unghiul Y , al cărui sinus să fie către rază precum este dreptunghiul format de diferența D , și semisuma axelor $AO + OD$ către pătratul axei mari AB ; cît și unghiul Z , al cărui sinus să fie către rază precum este dreptunghiul dublu format de distanța SH a focarelor și diferența D către triplul pătrat al semiaxei mari AO . Aceste unghiuri o dată aflate, locul corpului se va determina apoi astfel. Să luăm unghiul T proporțional cu timpul în care a fost descris arcu BP , sau egal cu mișcarea medie cum se spune: și fie unghiul V prima ecuație a mișcării medii, către unghiul Y , prima

ecuație maximă, precum sinusul unghiului dublu T către rază; și unghiul X , ecuația a doua, către unghiul Z , ecuația a doua maximă, precum este cubul sinusului unghiului T către cubul razei. Să luăm unghiul BHP , mișcarea medie egalată, egal sau cu suma $T + X + V$ a unghiurilor T , V , X , dacă unghiul T este mai mic decât unul drept, sau cu diferența $T + X - Y$ dacă el este mai mare decât unul drept și mai mic decât două drepte; și dacă HP întâlnește elipsa în P , dreapta dusă SP va tăia aria BSP aproape proporțional cu timpul. Această practică pare destul de expeditivă, deoarece e suficient să se afle primele două sau trei cifre ale unghiurilor foarte mici V și X exprimate dacă vrem, în secunde. Dar e de ajuns de precisă și pentru teoria planetelor. Căci chiar în orbita lui Marte, a cărei ecuație maximă a centrului este de zece grade, eroarea abia va întrece o secundă. Însă aflat fiind unghiul BHP al mișcării medii egalate, unghiul BSP al mișcării adevărate și distanța SP se obțin imediat prin metoda foarte cunoscută.

Pînă aici despre mișcarea corpurilor în linii curbe. Se poate însă înîmpla ca mobilul să se coboare sau să se urce pe o dreaptă; și acum trec la expunerea celor ce privesc acest fel de mișcări.

SECȚIUNEA VII

Despre urcarea și coborîrea rectilinie a corpurilor

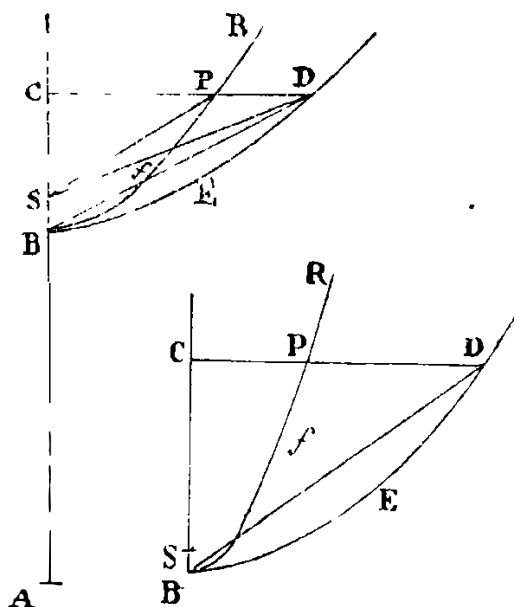
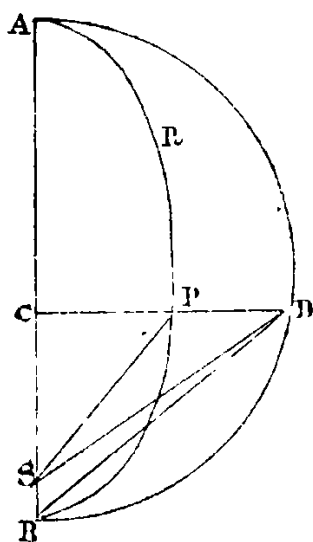
PROPOZIȚIA XXXII. PROBLEMA XXIV

Admițînd că forța centripetă este invers proporțională cu pătratul distanței locurilor de la centru, să se definească spațiile pe care le descrie un corp căzînd pe o dreaptă în timpuri date.

CAZUL 1. Dacă corpul nu cade perpendicular, el va descrie (potrivit corolarului 1, propoziția XIII) o secțiune conică oarecare al cărei focar coincide cu centrul forțelor. Fie $ARPB$ secțiunea conică și S focarul ei. Și mai întîi dacă figura e o elipsă; deasupra axei ei mari să descriem semicercul ADB ; și prin corpul ce cade să ducem dreapta DPC perpendiculară pe axă; și ducînd DS , PS , aria ASD va fi proporțională cu aria ASP , și deci și cu timpul. Menținînd axa AB , să micșorăm încontinuu lățimea elipsei, și aria ASB va rămîne totdeauna proporțională cu timpul. Să micșorăm lățimea la infinit: și acum orbita APB coincidînd cu axa AB și focarul S cu capătul B al axei, corpul va coborî pe dreapta AC , și aria ABD va deveni proporțională cu timpul. Astfel va fi dat spațiul AC , pe care-l descrie corpul căzînd perpendicular din locul A într-un timp dat, dacă se ia aria ABD proporțională cu timpul, și din punctul D se coboară pe dreapta AB perpendiculară DC . Q.E.I.

CAZUL 2. Dacă figura RPB este o hiperbolă, să descriem pe același diametru principal AB hiperbola dreptunghiulară BED ; și fiindcă ariile CSP , $CBfP$, $SPfB$ sînt respectiv către ariile CSD , $CBED$, $SDEB$, în raportul dat al înălțimilor CP , CD ; și aria $SPfB$ e proporțională cu timpul în care corpul P se va mișca pe arcul PfB ; și aria $SDEB$ va fi proporțională cu același timp. Să micșorăm parametrul hiperbolei RPB la infinit menținînd constantă latura transversă, și arcul PB va coincide cu dreapta CB și focarul S cu vîrfurile B și dreapta SD cu dreapta BD . De aceea aria $BDEB$ va fi proporțională cu timpul în care corpul C coborînd drept descrie linia CB . Q.E.I.

CAZUL 3. Și printr-un raționament analog dacă figura RPB este o parabolă, și din același vîrf principal B se descrie o altă parabolă BED , care totdeauna rămîne dată, în timp ce parabola de mai înainte, pe al cărei perimetru se mișcă corpul P , micșorînd și reducînd la

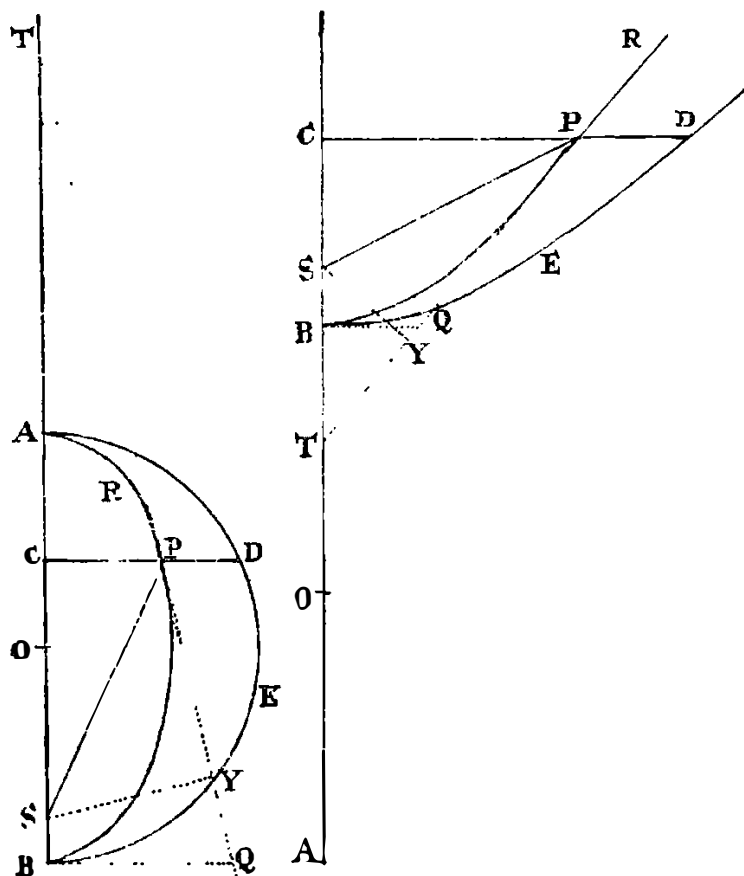


zero parametrul său coincide cu linia CB ; segmentul parabolic $BDEB$ va fi proporțional cu timpul în care acel corp P sau C coboară la centrul S sau B . Q.E.I.

PROPOZIȚIA XXXIII. TEOREMA IX

Presupunînd acestea aflate, zic că viteza corpului în cădere într-un loc oarecare

C este către viteza unui corp ce descrie un cerc descris din centrul B cu intervalul BC , ca rădăcina pătrată a raportului lui AC , distanța corpului de la vârful A mai îndepărtat al cercului sau hiperbolei dreptunghiulare, către $\frac{1}{2} AB$, semidiametrul principal al figurii.



parametrul figurii este L . Din corolarul IX, propoziția XVI rezultă că viteza corpului ce se mișcă pe linia RPB în jurul centrului S într-un loc oarecare P este către viteza corpului ce descrie cercul cu intervalul SP în jurul aceluiași centru ca rădăcina pătrată a raportului dreptunghiului $\frac{1}{2} L \times SP$ către pătratul lui SY . Dar din proprietățile conicelor ACB către CP^2 , precum $2AO$ către L , și de aceea $\frac{2CP^2 \times AO}{ACB}$ este egal cu L . Prin urmare vitezele sînt între ele ca rădăcina pătrată a raportului lui $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{ACB}$ către SY^2 . Apoi din proprietățile conicelor CO este către BO precum BO către TO , și prin compunere sau separare precum CB către BT . De unde fie separînd fie compunînd devine BO — sau $+CO$ către BO precum CT către BT , adică AC către AO precum CP către BQ ; și de aici $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{ACB}$ este egal cu $\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Acum să micșorăm la infinit lățimea CP a figurii RPB , astfel ca punctul P să coincidă cu punctul C , și punctul S cu punctul B , și linia SP cu linia BC , și linia SY cu linia BQ ; și acum viteza corpului ce se coboară pe linia dreaptă CB va fi către viteza corpului ce descrie un

cerc din centrul B cu intervalul BC , ca rădăcina pătrată a raportului lui $\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$ către SY^2 , adică (neglijînd rapoartele de egalitate SP către BC și BQ^2 către SY^2) ca rădăcina pătrată a raportului lui AC către AO adică $\frac{1}{2}AB$. Q.E.D.

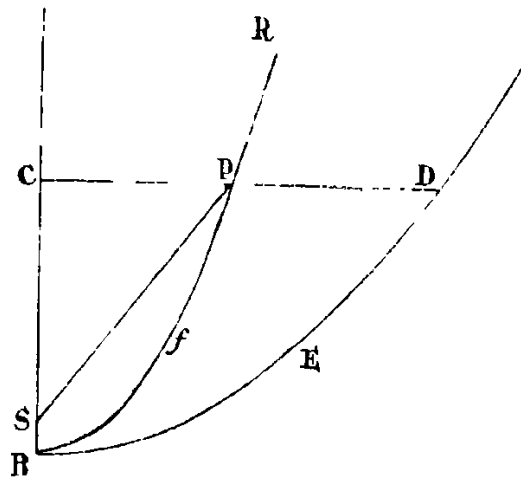
COROLARUL 1. Coincizînd punctele B și S , avem TC către TS precum AC către AO .

COROLARUL 2. Corpul ce se rotește pe un cerc oarecare la o distanță dată de la centru, prin mișcarea sa îndreptată în sus se va urca la distanța dublă de la centru.

PROPOZIȚIA XXXIV. TEOREMA X

Dacă figura BED este o parabolă, zic că viteza corpului ce cade într-un loc oarecare C este egală cu viteza cu care un corp poate descrie în mod uniform un cerc în jurul centrului B cu jumătatea intervalului său BC .

Căci viteza unui corp ce descrie o parabolă RPB în jurul centrului S într-un loc oarecare P (potrivit corolarului VII, propoziția XVI) este egală cu viteza corpului ce descrie în mod uniform un cerc cu jumătatea intervalului SP în jurul aceluiași centru S . Să micșorăm lățimea CP a parabolei la infinit, astfel ca arcul parabolic PfB să coincidă cu dreapta CB , centrul S cu vîrfurile B și intervalul SP cu intervalul BC , și propoziția va fi evidentă. Q.E.D.



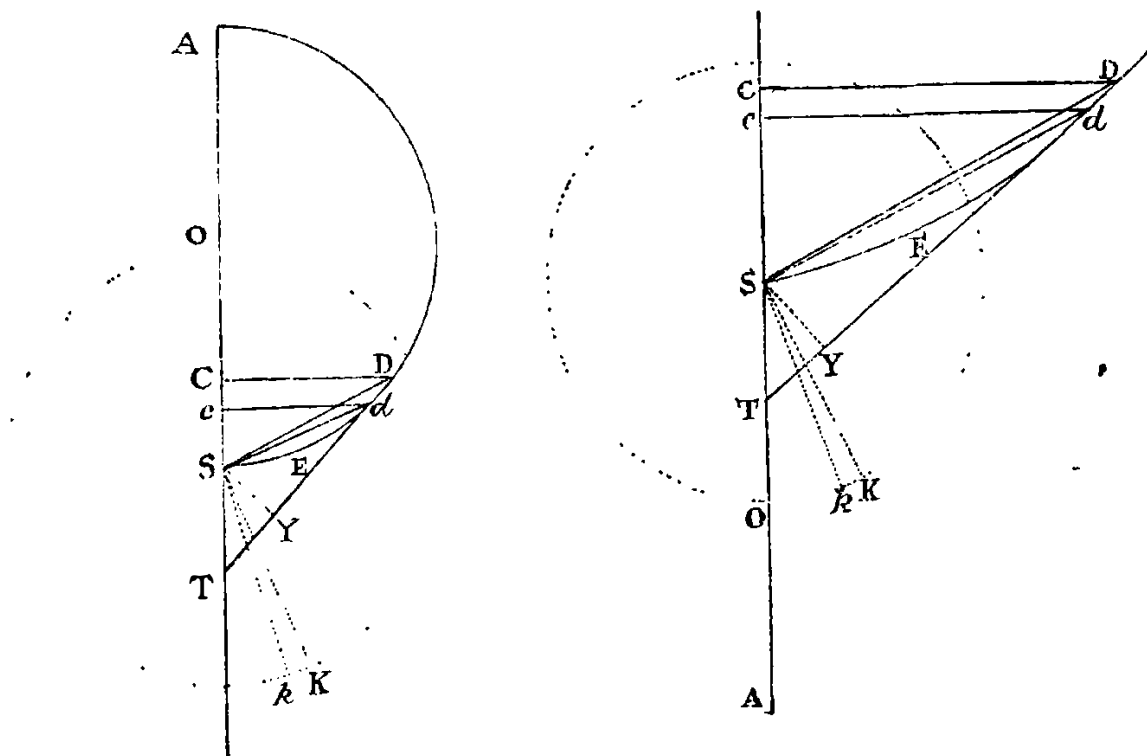
PROPOZIȚIA XXXV. TEOREMA XI

Aceleași lucruri fiind presupuse, zic că aria figurii DES , descrisă cu raza indefinită SD , este egală cu aria pe care un corp o poate descrie în același timp, rotindu-se în mod uniform în jurul centrului S cu o rază egală cu jumătatea parametrului figurii DES .

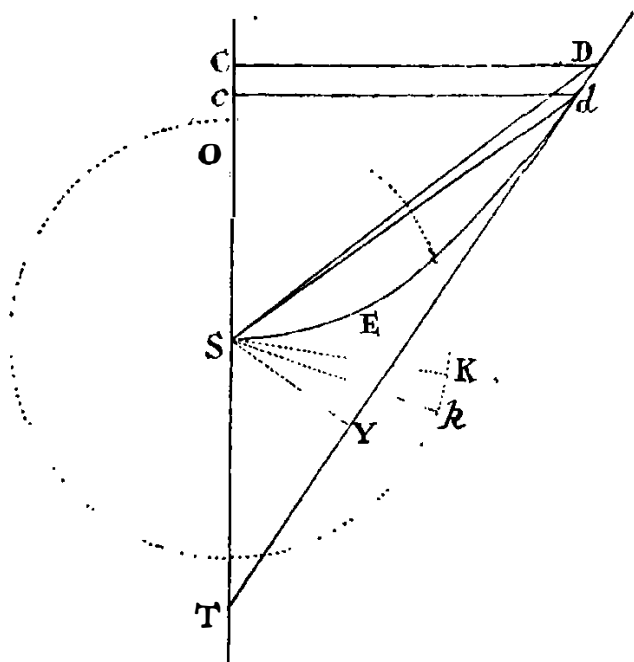
Căci să ne închipuim că corpul C căzînd într-un interval de timp cît se poate de mic descrie linioara Cc , și între timp un alt corp K , rotindu-se în mod uniform pe cercul OKk în jurul centrului S descrie arcul Kk . Să ridicăm perpendicularele CD , cd întîlnind figura DES în D , d . Să unim SD , Sd , SK , Sk și să ducem Dd întîlnind axa AS în T , și să coborîm pe ea perpendiculara SY .

CAZUL 1. Acum dacă figura DES este un cerc sau o hiperbolă rectangulară să bisectăm diametrul ei transversal AS în O , și SO va fi jumătatea parametrului. Și fiindcă TC către TD e precum Cc către Dd și TD către TS precum CD către SY , prin egalitate va fi TC către TS precum $CD \times Cc$ către $SY \times Dd$. Dar (potrivit corolarului 1, propoziția XXXIII) TC este

către TS precum AC către AO , anume dacă la coincidența punctelor D, d se iau rapoartele ultime ale liniilor. Deci AC este către AO sau SK precum $CD \times Cc$ către $SY \times Dd$. Apoi viteza corpului descendent în C este către viteza corpului ce descrie un cerc cu intervalul SC în jurul centrului S ca rădăcina pătrată a raportului lui AC către AO sau SK (potrivit propoziției XXXIII).



Și această viteză este către viteza corpului ce descrie cercul OKk precum rădăcina pătrată a raportului lui SK către SC (potrivit corolarului VI, propoziția IV) și prin egalitate viteza primă către ultima, adică linioara Cc către arcul Kk precum rădăcina pătrată a raportului lui AC către SC , adică în raportul lui AC către CD . Din care cauză $CD \times Cc$ este egal cu $AC \times Kk$, și de aceea AC către SK precum $AC \times Kk$ către $SY \times Dd$, și de



aici $SK \times Kk$ egal cu $SY \times Dd$ și $\frac{1}{2} SK \times Kk$ egal cu $\frac{1}{2} SY \times Dd$, adică aria KSk egală cu aria SDd . Prin urmare în diversele intervale de timp se nasc particulele KSk și SDd a două arii, care dacă mărimea lor se micșorează și numărul crește la infinit, obțin un raport de egalitate și de aceea (potrivit corolarului lemei IV) ariile întregi născute deodată sînt totdeauna egale. Q.E.D.

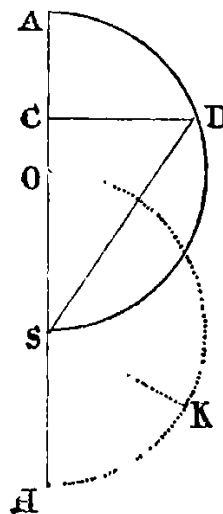
CAZUL 2. Dar dacă figura DES este o parabolă, se va afla că este ca mai sus $CD \times Cc$ către $SY \times Dd$ precum TC către TS , adică precum

2 către 1, și astfel $\frac{1}{4} CD \times Cc$ este egal cu $\frac{1}{2} SY \times Dd$. Dar viteza corpului descendent în C este egală cu viteza cu care poate fi descris în mod uniform un cerc cu intervalul $\frac{1}{2} SC$ (potrivit propoziției XXXIV). Și această viteză este către viteza cu care se poate descrie cercul de rază SK , adică linioara Cc către arcul Kk (potrivit corolarului VI, propoziția IV) este precum rădăcina pătrată a raportului lui SK către $\frac{1}{2} SC$, în raportul lui SK către $\frac{1}{2} CD$. Din care cauză $\frac{1}{2} SK \times Kk$ este egal cu $\frac{1}{4} CD \times Cc$, și deci egal cu $\frac{1}{2} SY \times Dd$, adică aria KSk egală cu aria SDD , ca mai sus. Q.E.D.

PROPOZIȚIA XXXVI. PROBLEMA XXV

Să se determine timpurile de coborîre ale unui corp ce cade dintr-un loc dat.

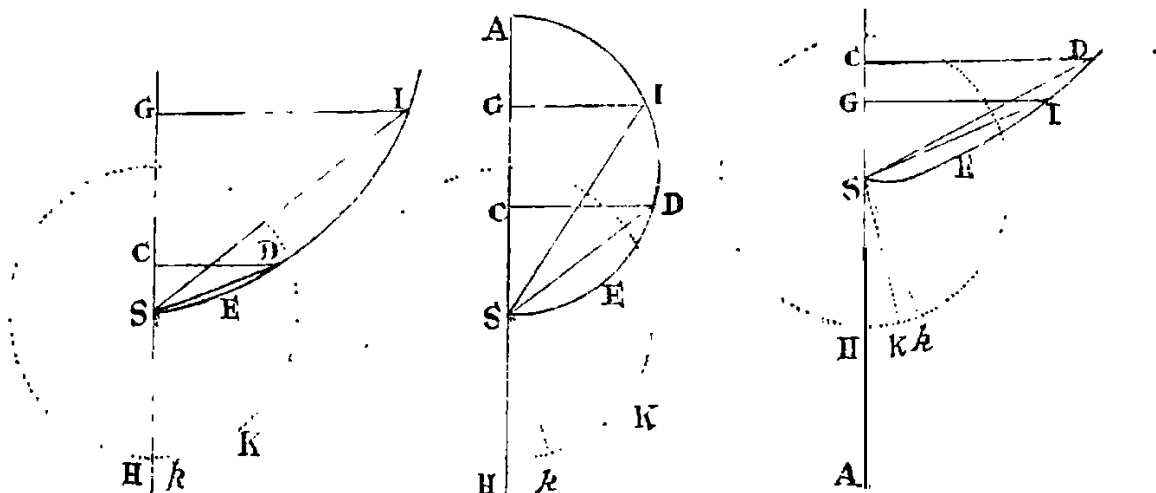
Pe diametrul AS , distanța corpului de la centru la început, să descriem semicercul ADS , precum și semicercul OKH egal cu acesta în jurul centrului S . Dintr-un loc oarecare C al corpului să ridicăm ordonata CD . Să unim SD , și să facem sectorul OSK egal cu aria ASD . Din propoziția XXXV este evident că corpul căzînd va descrie spațiul AC în același timp în care un alt corp, învîrtindu-se în mod uniform în jurul centrului S , poate descrie cercul OK . Q.E.F.



PROPOZIȚIA XXXVII. PROBLEMA XXVI

Să se definească timpurile de urcare sau coborîre ale unui corp aruncat dintr-un loc dat în sus sau în jos.

Să presupunem că corpul pleacă din locul dat G după linia GS cu o viteză oarecare. Să luăm GA către $\frac{1}{2} AS$ ca pătratul raportului acestei viteze către viteza uniformă în cerc, cu care corpul se poate roti la inter-



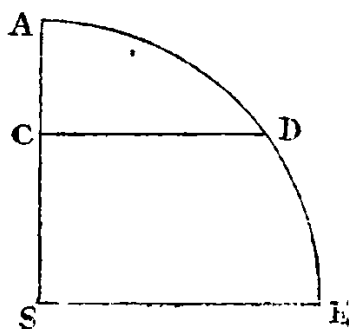
valul dat SG în jurul centrului S . Dacă acel raport este ca al numărului doi către unitate, punctul dat este la o distanță infinită, în care caz trebuie să se descrie parabola cu vârful S , axa SG , cu un parametru oarecare. Aceasta este evident din propoziția XXXIV. Dacă însă raportul este mai mic sau mai mare decât 2 către 1, în primul caz trebuie să descriem un cerc, în cel din urmă o hiperbolă dreptunghiulară pe diametrul SA . Este evident acest lucru din propoziția XXXIII. Atunci din centrul S cu un interval egal cu jumătatea parametrului să descriem cercul HkK , și la locul G al corpului descendent sau ascendent, și la un alt loc oarecare C , să ridicăm perpendicularele GI , CD întâlnind secțiunea conică sau cercul în I și D . Apoi unind SI , SD , fie sectoarele HSK , HSk egale cu segmentele $SEIS$, $SEDS$, și potrivit propoziției XXXV corpul G va descrie spațiul GC în același timp în care corpul K poate descrie arcul Kk . Q.E.F.

PROPOZIȚIA XXXVIII. TEOREMA XII

Presupunînd că forța centripetă este proporțională cu înălțimea sau cu distanța locurilor de la centru, zic că timpurile, vitezele și spațiile descrise ale corpurilor ce cad sînt respectiv proporționale cu arcele, și cu sinusurile arcelor și cu sinus versus-urile.

Să presupunem că un corp cade dintr-un loc oarecare A de-a lungul dreptei AS ; și din centrul S al forțelor, cu intervalul AS , să descriem cadrantul AE al cercului, și fie CD sinusul unui arc oarecare AD ; și corpul A , în timpul AD , căzînd descrie spațiul AC , și în locul C va cîștiga viteza CD .

Se demonstrează din propoziția X în același fel cum s-a demonstrat propoziția XXXII din propoziția XI.



COROLARUL 1. De aici sînt egale timpurile, în care un corp căzînd din locul A ajunge la centrul S , și un alt corp mișcîndu-se descrie arcul cadrantului ADE .

COROLARUL 2. Deci sînt egale toate timpurile în care cad corpurile din locuri oarecare pînă la centru. Căci toate timpurile periodice ale corpurilor ce se rotesc (potrivit corolarului III, propoziția IV) sînt egale.

PROPOZIȚIA XXXIX. PROBLEMA XXVII

Fiind dată o forță centripetă de un gen oarecare, și admițînd cvadraturile figurilor curbilinii, se caută atît viteza în diversele locuri ale unui corp ascendent sau descendent pe o dreaptă, cît și timpul în care corpul va ajunge la un loc oarecare și invers.

Să presupunem că dintr-un loc oarecare A corpul E cade în lungul dreptei $ADEC$, și din locul lui E să ridicăm totdeauna perpendiculara EG proporțională cu forța centripetă în acel loc tinzînd către centrul C : și fie BFG linia

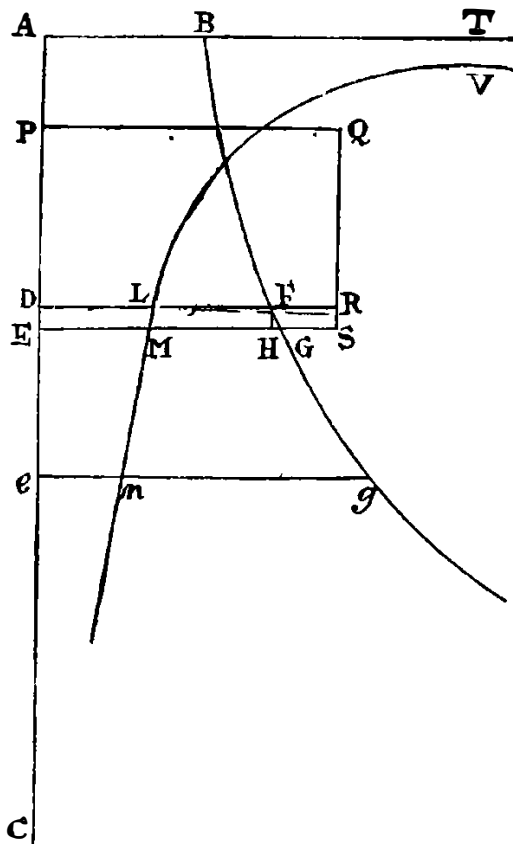
curbă pe care punctul G o atinge încontinuu. Dar să presupunem că EG coincide chiar la începutul mișcării cu perpendiculara AB și va fi viteza corpului într-un loc oarecare E pecum dreapta al cărei pătrat este egal cu aria curbilinie $ABGE$. Q.E.I.

Pe EG să luăm EM invers proporțional cu dreapta, al cărei pătrat este egal cu aria $ABGE$, și fie VLM linia curbă, pe care se află punctul M încontinuu, și a cărei asimptotă este dreapta AB prelungită; și timpul, în care corpul căzînd descrie linia AE , va fi precum aria curbilinie $ABTVME$. Q.E.I.

Căci pe dreapta AE să luăm linia cît se poate de mică DE de lungime dată, și fie DLF locul liniei EMG , cînd corpul se afla în D ; dacă forța centripetă e astfel ca dreapta, al cărei pătrat este egal cu aria $ABGE$, este ca viteza corpului descendent: aria însăși va fi ca pătratul vitezei, adică, dacă în locul vitezelor în D și E , se scriu V și $V + I$, aria $ABFD$ va fi ca VV , și aria $ABGE$ ca $VV + 2VI + II$, și prin separare aria $DFGE$ ca $2VI + II$ și astfel $\frac{DFGE}{DE}$ ca $\frac{2VI + II}{DE}$, adică, dacă se adună primele rapoarte ale cantităților născînde, lungimea DF precum cantitatea $\frac{2VI}{DE}$, și de aceea și precum jumătatea cantității $\frac{I \times V}{DE}$. Timpul însă, în care corpul căzînd descrie linioara DE , este proporțional cu acea linioară și invers proporțional cu viteza V , și forța este proporțională cu creșterea I a vitezei și invers proporțională cu timpul, și de aceea dacă luăm primele rapoarte ale celor născînde, precum $\frac{I \times V}{DE}$, adică precum lungimea DF . Prin urmare forța proporțională cu DF sau EG face să descindă corpul cu acea viteză care să fie ca dreapta al cărei pătrat este egal cu aria $ABGE$. Q.E.D.

Afară de aceea fiindcă timpul în care se descrie o linioară oarecare DE de o lungime dată este în raport invers cu viteza și deci în raport invers cu dreapta al cărei pătrat este egal cu aria $ABFD$; și deoarece DL , și astfel aria născîndă $DLME$, este în raport invers cu aceeași dreaptă: timpul va fi ca aria $DLME$, și suma tuturor timpurilor ca suma tuturor ariilor, adică (potrivit corolarului, lema IV) timpul întreg în care se descrie linia AE ca aria întreagă $ATVME$. Q.E.D.

COROLARUL 1. Fie P locul de unde trebuie să cadă corpul astfel ca sub influența unei oarecare forțe centripete cunoscute, uniforme (care de obicei se presupune a fi gravitatea) să cîștige în locul D o viteză egală cu viteza pe care un alt corp căzînd sub influența altei forțe oarecare a cîștigat-o în același loc D , și pe perpendiculara DF să luăm DR , care să fie către DF ca acea forță uniformă către cealaltă forță în locul D , și să completăm



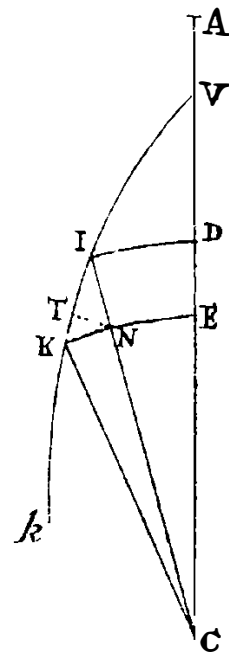
SECȚIUNEA VIII

Despre aflarea orbitelor în care se rotesc corpuri acționate de forțe centripete oarecare.

PROPOZIȚIA XL. TEOREMA XIII

Dacă un corp, constrâns de o forță centripetă oarecare, se mișcă oarecum, și un alt corp se urcă sau se coboară pe o dreaptă, și vitezele lor sînt egale într-un caz oarecare de înălțimi egale, vitezele lor vor fi egale la toate înălțimile egale.

Să presupunem că un corp oarecare descinde din A prin D , E , spre centrul C , și un alt corp se mișcă din V pe linia curbă $VIKk$. Din centrul C cu intervale oarecare să se descrie cercurile concentrice DI , EK întîlnind dreapta AC în D și E , și curba VIK în I și K . Să unim IC întîlnind KE în N ; și pe IK să coborîm perpendiculara NT ; și fie intervalul DE sau IN al circumferințelor cercurilor cît se poate de mic, și corpurile în D și I să aibe viteze egale. Deoarece distanțele CD , CI sînt egale, forțele centripete în D și I vor fi egale. Să exprimăm aceste forțe prin linioarele egale DE , IN ; și dacă o forță IN (potrivit corolarului 2 al legilor) se descompune în două NT și IT , forța NT , acționînd după linia NT perpendiculară pe cursul ITK al corpului, nu va schimba de loc viteza corpului în cursul său, ci numai va abate corpul de la cursul rectiliniu, și va face ca el să se îndepărteze într-una de tangenta orbitei și să-și continue drumul curbiliniu $ITKk$. În producerea acestui efect se va consuma întreagă acea forță: dar cealaltă forță IT , acționînd după cursul corpului, întreagă îl va accelera, și într-un timp dat cît se poate de scurt va produce o accelerație proporțională cu sine însăși. Deci accelerațiile corpurilor în D și I făcute în timpuri egale (dacă luăm primele rapoarte ale liniilor născînde DE , IN , IK , IT , NT) sînt precum liniile DE , IT : iar în timpuri neegale precum liniile și timpurile luate împreună. Timpurile însă în care se descriu DE și IK , din cauza egalității vitezelor sînt precum drumurile descrise de DE și IK și deci accelerațiile, în cursul corpurilor prin liniile DE și IK , sînt ca DE și IT , DE și IK luate împreună, adică precum DE^2 și dreptunghiul $IT \times IK$. Dar dreptunghiul $IT \times IK$ este egal cu pătratul lui IN , adică egal cu DE^2 și de aceea în trecerea corpurilor de la D și I la E și K se nasc accelerații egale. Așadar vitezele corpurilor în E și K sînt egale; și prin același raționament totdeauna se vor afla egale la distanțele egale următoare. Q.E.D.



Dar și prin același raționament corpurile de viteză egală și la distanță egală de centru, în urcarea la distanțe egale vor fi întîrziate în mod egal. Q.E.D.

COROLARUL I. De aici dacă un corp sau oscilează atîrnînd de un fir, sau printr-o piedică foarte netedă și perfect alunecoasă e forțat să se miște

mai înainte în I . În aceleași condiții ca cele din propoziția XXXIX, linioara IK , descrisă într-un timp dat cât se poate de scurt, va fi ca viteza, și deci ca dreapta al cărei pătrat este egal cu aria $ABFD$, și triunghiul ICK proporțional cu timpul va fi dat și deci KN va fi invers proporțional cu înălțimea IC , adică, dacă se dă o cantitate oarecare Q și înălțimea IC se numește A , precum $\frac{Q}{A}$. Această cantitate $\frac{Q}{A}$ să o numim Z , și să presupunem că mărimea lui Q este așa fel încât într-un caz oarecare \sqrt{ABFD} către Z precum IK către KN , și în toate cazurile va fi \sqrt{ABFD} către Z precum IK către KN , și $ABFD$ către ZZ după cum IK^2 către KN^2 ; și separînd $AFD - ZZ$, către ZZ precum IN^2 către KN^2 și deci $\sqrt{ABFD - ZZ}$ către Z sau $\frac{Q}{A}$ precum IN către KN , și de aceea $A \times KN$ egal cu $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. De unde fiindcă $YX \times XC$ este către $A \times KN$ precum CX^2 către AA , dreptunghiul $XY \times XC$ va fi egal cu $\frac{Q \times IN \times CX^2}{AA \sqrt{ABFD - ZZ}}$. Prin urmare dacă pe perpendiculara DF se iau totdeauna DI , Dc egale respectiv cu $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$, $\frac{Q \times CX^2}{2AA \cdot \sqrt{ABFD - ZZ}}$ și se descriu liniile curbe ab , ac , pe care se află totdeauna punctele b , c , și din punctul V se ridică pe linia AC perpendiculara Va tăind ariile curbilinii $VDba$, $VDca$, și se ridică și ordonatele Ez , Ex : deoarece dreptunghiul $Dd \times IN$ sau $DbzE$ este egal cu jumătatea dreptunghiului $A \times KN$ sau cu triunghiul ICK ; și dreptunghiul $Dc \times IN$ sau $DC \times E$ este egal cu jumătatea dreptunghiului $YX \times XC$, sau cu triunghiul XCy ; adică, deoarece părțilele născînde $DdzE$, ICK sînt totdeauna egale cu ariile $VDba$, VIC și părțilele născînde $Dc \times E$, XCy sînt totdeauna egale cu ariile $VDca$, VCX , aria născută $VDba$ va fi egală cu aria născută VIC , și deci proporțională cu timpul și aria născută $VDca$ egală cu sectorul născut VCX . Prin urmare fiind dat un timp oarecare în decursul căruia corpul s-a coborît din locul V , va fi dată aria $VDba$ proporțională cu el însuși și deci va fi dată înălțimea CD sau CI a corpului, și aria $VDca$, și sectorul VCX egal cu ea împreună cu unghiul ei VCI . Dar fiind date unghiul VCI și înălțimea CI se dă locul I , unde se va afla corpul la sfîrșitul acelui timp. Q.E.I.

COROLARUL 1. De aici se pot afla ușor înălțimile maxime și minime ale corpurilor, adică, apsidele traiectoriilor. Căci apsidele sînt punctele în care dreapta IC dusă prin centru cade perpendicular pe traiectoria VIK : ceea ce se întîmplă cînd dreptele IK și NK sînt egale, și deci cînd aria $ABFD$ este egală cu ZZ .

COROLARUL 2. Dar și unghiul KIN , în care traiectoria taie undeva linia IC , se află ușor din înălțimea dată IC a corpului: anume luînd sinusul ei către rază precum KN către IK , adică precum Z către latura al cărei pătrat este aria $ABFD$.

COROLARUL 3. Dacă din centrul C și cu vîrful principal V se descrie o secțiune conică oarecare VRS ; și dintr-un punct oarecare R al ei se duce tangenta RT întîlnind axa CV prelungită la infinit în punctul T ; apoi unind CR se duce dreapta CP care să fie egală cu abscisa CT , și să formeze unghiul VCP proporțional cu sectorul VCR ; și dacă o forță centripetă invers pro-

e mai întâi împins în I , precum DR către DF . Să presupunem însă că corpul înaintează spre k ; și din centrul C , și cu intervalul Ck să descriem cercul ke întâlnind dreapta PD în e și să ridicăm ordonatele eg , ev , ew ale curbelor BFg , abc , acw . Din dreptunghiul dat $BDRQ$ și din legea forței centripete dată, prin care primul corp este acționat, se dă linia curbă BFg , prin construcția problemei XXVII și corolarul 1 al ei. Apoi din unghiul dat CIK se dă proporția celor născînde IK , KN , și de aici, prin construcția problemei XXVIII se dă cantitatea Q , împreună cu liniile curbe abv , acw : și deci, la sfîrșitul unui timp oarecare $D\dot{b}ve$, se dă atît înălțimea Ce sau Ck a corpului, cît și aria $Dcwe$, și sectorul XCy egal cu ea, și unghiul ICk , și locul k în care se va afla atunci corpul. Q.E.I.

Presupunem însă în aceste propoziții că forța centripetă la o distanță oarecare de centru variază după o lege oarecare pe care cineva și-o poate imagina, la distanțe însă egale de centru ea este pretutindeni aceeași. Dar pînă aici am considerat mișcarea corpurilor în orbite imobile. Mai rămîne să adăugăm cîte ceva despre mișcarea pe orbite care se învîrtesc în jurul centrului forțelor.

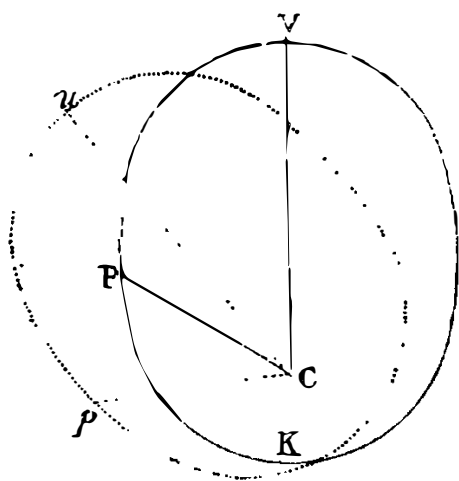
SECȚIUNEA IX

Despre mișcarea corpurilor pe orbite mobile, și despre mișcarea apsidelor

PROPOZIȚIA XLIII. PROBLEMA XXX

Se cere să facem ca un corp să se poată mișca pe o traiectorie oarecare ce se rotește în jurul centrului forțelor întocmai ca un alt corp pe aceeași traiectorie în repaus.

Să presupunem că pe orbita VPK de poziție dată se rotește un corp P înaintînd de la V spre K . Din centrul C să ducem totdeauna Cp , care să fie egal cu CP , și să formeze unghiul VCp proporțional cu unghiul VCP ; și aria, pe care o descrie linia Cp , va fi către aria VCP , pe care o descrie simultan linia CP , precum viteza liniei descriitoare Cp către viteza liniei



descriitoare CP ; adică, precum unghiul VCp către unghiul VCP , și deci într-un raport dat, și de aceea proporțională cu timpul. Fiindcă aria pe care o descrie linia Cp într-un plan imobil este proporțională cu timpul, este evident că corpul, influențat de o forță centripetă de mărime potrivită, se poate roti împreună cu punctul p pe linia curbă pe care o descrie în planul imobil același punct p din motivul chiar acum expus. Fie unghiul VCu egal cu unghiul PCp , și linia Cu cu linia CV , și figura uCp cu figura VCP , și corpul fiind totdeauna în p se va mișca pe perimetrul figurii rotitoare uCp , și va descrie arcul său up în același timp în

care un alt corp P poate descrie arcul VP asemenea și egal cu el în figura ce se află în repaus VPK . Să se caute așadar prin corolarul 5 al propoziției VI forța centripetă prin acțiunea căreia corpul se poate roti pe linia curbă pe care o descrie punctul p în planul imobil și problema va fi rezolvată. Q.E.F.

PROPOZIȚIA XLIV. TEOREMA XIV

Diferența forțelor cu care se pot mișca în mod egal un corp pe o orbită în repaus, și un alt corp pe aceeași orbită în rotație, este în raport invers cu cubul înălțimii comune.

Să presupunem că părțile up , pk ale orbitei în rotație sînt asemenea și egale cu părțile VP , PK ale orbitei în repaus; că distanța punctelor P , K este cît se poate de mică. Să coborîm din punctul k pe dreapta pC perpendiculara kr și să o prelungim pînă în m , ca să fie mr către kr precum unghiul VCp către unghiul VCP . Deoarece înălțimile corpurilor PC și pC , KC și kC sînt totdeauna egale, este evident că incrementele sau decrementele liniilor

A geometric diagram showing two intersecting circles. The upper circle has a vertical diameter with endpoints *V* (top) and *C* (bottom). A point *R* is on the upper circle's circumference, and a line segment *CR* is drawn. A point *K* is on the lower circle's circumference, and a line segment *CK* is drawn. A point *P* is on the upper circle's circumference, and a line segment *PK* is drawn. A point *u* is on the upper circle's circumference, and a line segment *uP* is drawn. A point *s* is on the lower circle's circumference, and a line segment *sk* is drawn. A point *r* is on the lower circle's circumference, and a line segment *rk* is drawn. A point *k* is on the lower circle's circumference, and a line segment *ck* is drawn. A point *m* is on the lower circle's circumference, and a line segment *cm* is drawn. A point *n* is on the lower circle's circumference, and a line segment *cn* is drawn. A point *p* is on the lower circle's circumference, and a line segment *cp* is drawn. A point *t* is on the lower circle's circumference, and a line segment *ct* is drawn. A point *u* is on the upper circle's circumference, and a line segment *cu* is drawn. A point *s* is on the lower circle's circumference, and a line segment *cs* is drawn. A point *r* is on the lower circle's circumference, and a line segment *cr* is drawn. A point *k* is on the lower circle's circumference, and a line segment *ck* is drawn. A point *m* is on the lower circle's circumference, and a line segment *cm* is drawn. A point *n* is on the lower circle's circumference, and a line segment *cn* is drawn. A point *p* is on the lower circle's circumference, and a line segment *cp* is drawn. A point *t* is on the lower circle's circumference, and a line segment *ct* is drawn.

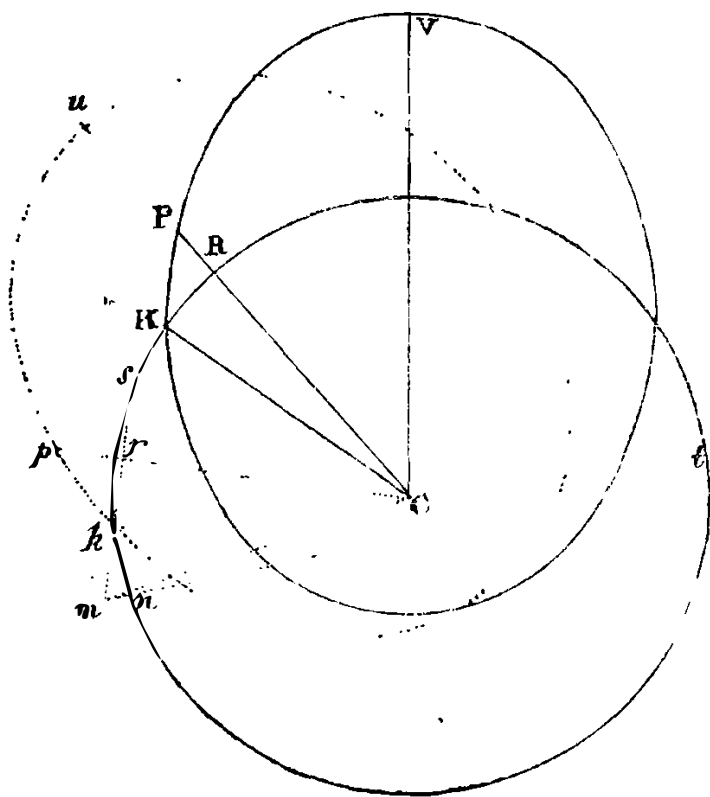
Cum însă triunghiurile pCk , pCn , într-un timp dat sînt date în mărime, kr și mr și diferența lor mk și suma lor ms sînt în raport invers cu înăl-

Cum însă triunghiurile pCk , pCn , într-un timp dat sînt date în mărime, kr și mr și diferența lor mk și suma lor ms sînt în raport invers cu înăl-

țimea pC și deci dreptunghiul $mk \times ms$ este în raport invers cu pătratul înălțimii pC . Și mt este proporțional cu $\frac{1}{2} mt$, adică, precum înălțimea pC . Acestea sînt primele rapoarte ale liniilor născînde; și de aici $\frac{mk \times ms}{mt}$, adică linioara născîndă mn , și diferența forțelor proporțională cu ea este în raport invers cu cubul înălțimii pC . Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici diferența forțelor în locurile P și p , sau K și k , este către forța cu care corpul se poate roti cu o mișcare circulară de la R la K în același timp în care corpul P pe o orbită imobilă descrie arcul PK , precum linioara născîndă mn către sinus versus-ul arcului născînd RK , adică precum $\frac{mk \times ms}{mt}$ către $\frac{rk^2}{2kC}$, sau precum $mk \times ms$ către pătratul lui rk ; adică, dacă luăm cantități date F, G , în acel raport între ele, pe care-l are unghiul VCP către unghiul VCp , precum $GG-FF$ către FF . Și de aceea, dacă din centrul C cu un interval oarecare CP sau Cp descrie un sector circular egal cu aria întreagă VPC , pe care corpul P rotindu-se într-un timp oarecare pe o orbită imobilă o descrie cu raza dusă la centru; diferența forțelor cu care se rotește corpul P pe o orbită imobilă și corpul p pe o orbită mobilă, va fi către forța centripetă, cu care un corp oarecare, cu raza la centru, ar fi putut descrie în mod uniform acel sector în același timp, în care a fost descrisă aria VPC precum $GG-FF$ către FF . Căci acel sector și aria pCk sînt între ele precum timpurile în care sînt descrise.

COROLARUL 2. Dacă orbita VPK este o elipsă avînd focarul C și apsidă



cea mai înaltă V ; și să presupunem că elipsa upk este asemenea și egală cu ea, în așa fel ca pC să fie totdeauna egal cu PC , și unghiul VCp să fie către unghiul VCP în raportul dat al lui G către F ; dar în locul înălțimii PC , sau pC să scriem A , și în locul parametrului elipsei să punem $2R$: forța cu care corpul poate fi adus să se rotească pe o elipsă mobilă va fi precum $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$ și invers.

Căci să exprimăm forța cu care un corp se rotește pe o elipsă nemișcată prin cantitatea $\frac{FF}{AA}$, și forța în V va fi $\frac{FF}{CV^2}$.

Forța însă cu care un corp se poate învîrți pe un cerc la distanța CV cu viteza, pe

care un corp rotindu-se pe o elipsă o are în V , este către forța cu care un corp rotindu-se pe o elipsă e acționat în apsidă V , precum jumătatea parametrului elipsei către semidiametrul CV al cercului, și deci este egal cu $\frac{RFF}{CV^3}$: și forța care este către aceasta precum $GG-FF$ către FF

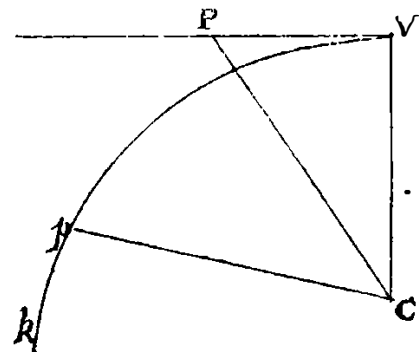
este egală cu $\frac{RGG - RFF}{CV^3}$: și această forță (potrivit corolarului 1 al acesteia) este diferența forțelor în V cu care se rotește corpul P pe elipsa nemișcată VPK , și corpul p pe elipsa mobilă upk . De unde fiindcă (potrivit acestei propoziții) acea diferență la o altă înălțime oarecare A este către ea însăși la înălțimea CV precum $\frac{1}{A^3}$ către $\frac{1}{CV^3}$, aceeași diferență la orice înălțime A va avea valoarea $\frac{RGG - RFF}{A^3}$. Deci la forța $\frac{FF}{AA}$ cu care corpul se poate învîrți pe elipsa imobilă VPK , să adunăm excesul $\frac{RGG - RFF}{A^3}$ și să se compună forța toată $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$ cu care se poate roti corpul pe elipsa mobilă upk în aceleași timpuri.

COROLARUL 3. În același fel se află că, dacă orbita imobilă VPK este o elipsă avînd centrul în centrul C al forțelor; și dacă presupunem de asemenea egală și concentrică cu ea elipsa mobilă upk ; și fie $2R$ parametrul principal al acestei elipse, și $2T$ latura transversă sau axa mare; și fie unghiul VCp totdeauna către unghiul VCP precum G către F ; forțele cu care corpurile se pot roti pe o elipsă imobilă și mobilă în timpuri egale, vor fi respectiv ca $\frac{FFA}{T^3}$ și $\frac{FFA}{T^3} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$.

COROLARUL 4. Și în general, dacă înălțimea maximă CV a corpului se numește T , și raza curburii pe care o are orbita VPK în V , adică raza unui cerc curbat în mod egal se numește R ; și forța centripetă, cu care un corp se poate roti pe o traiectorie oarecare imobilă VPK în locul V , să o numim $\frac{VFF}{TT}$, și în alte locuri P să o numim în mod nedefinit X , la înălțimea CP numită A , și să luăm G către F în raportul dat al unghiului VCp către unghiul VCP : forța centripetă cu care același corp poate face aceeași traiectorie upk mișcată în mod circular în aceleași timpuri, va fi precum suma forțelor $X + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$.

COROLARUL 5. Fiind dată așadar mișcarea unui corp pe o orbită oarecare imobilă, mișcarea lui unghiulară în jurul centrului forțelor se poate mări sau micșora într-un raport dat, și de aici se pot afla noi orbite imobile în care corpurile să se rotească cu noi forțe centripete.

COROLARUL 6. Prin urmare dacă pe dreapta CV de poziție dată se ridică perpendiculara VP de lungime nedeterminată, și se unește CP , și se duce Cp egală cu ea, formînd unghiul VCp , care să fie către unghiul VCP într-un raport dat; forța cu care corpul se poate roti pe curba Vpk pe care punctul p se află încontinuu, va fi în raport invers cu cubul înălțimii Cp . Căci corpul P prin forța de inerție, nefiind acționat de nici o altă forță, poate progresa în mod uniform pe dreapta VP . Să adunăm forța dirijată spre centrul C , invers proporțională cu cubul înălțimii CP sau Cp și (din cele deja demonstrate) mișcarea rectilinie se va îndoi în linia curbă Vpk . Dar această curbă Vpk este aceeași curbă VPQ aflată în corolarul 3, propoziția XLI, în care am spus acolo că corpurile atrase de astfel de forțe se urcă în mod oblic.



PROPOZIȚIA XLV. PROBLEMA XXXI

Se caută mișcările apsidelor ale orbitelor care sînt foarte apropiate de cercuri.

Problema se rezolvă în mod aritmetic făcînd ca orbita, pe care un corp rotindu-se pe o elipsă mobilă (ca în corolarul 2 sau 3 al propoziției de mai sus) o descrie într-un plan imobil, să se apropie de forma orbitei ale cărei apside se caută, și căutînd apsidele orbitei pe care o descrie corpul într-un plan imobil. Orbitale însă capătă aceeași formă dacă forțele centripete sub acțiunea cărora sînt descrise, comparate între ele, la înălțimi egale sînt făcute proporționale. Fie punctul V apsida cea mai înaltă, și să scriem T în locul înălțimii maxime CV , A în locul altei înălțimi oarecare CP sau Cp , și X în locul diferenței $CV-CP$ a înălțimilor; și forța cu care se mișcă corpul pe o elipsă ce se învîrtește în jurul focarului său C (ca în corolarul 2), și care în corolarul 2 era precum $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$, adică precum $\frac{FFA + RGG - RFF}{A^3}$, substituind $T-X$ în locul lui A , va fi precum $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A^3}$.

La fel trebuie redusă oricare altă forță centripetă la fracția al cărei numitor să fie A^3 și numărătorii, făcînd asemănarea termenilor omologi, trebuie făcuți analogi. Lucrul va deveni clar prin exemple.

EXEMPLUL 1. Să presupunem că forța centripetă este uniformă și deci ca $\frac{A^3}{A^3}$; adică (scriind în numărător $T-X$ în loc de A) precum $\frac{T^3 - 3TTX + 3TXX - X^3}{A^3}$; și comparînd termenii corespunzători ai numărătorilor, anume cei dați cu cei dați și cei nedați cu cei nedați, fie $RGG - RFF + TFF$ către T^3 precum $-FFX$ către $-3TTX + 3TXX - X^3$ sau precum $-FF$ către $-3TT + 3TX - XX$. Dar fiindcă luăm orbita cît se poate de apropiată de cerc, să presupunem că orbita coincide cu cercul; și fiindcă R , T sînt făcute egale și X micșorată la infinit, rapoartele ultime vor fi RGG către T^3 precum $-FF$ către $-3TT$, sau GG către TT precum FF către $3TT$, și la rîndul său GG către FF precum TT către $3TT$, adică precum 1 la 3; și deci G către F , adică unghiul VCp către unghiul VCP precum 1 către $\sqrt{3}$. Prin urmare fiindcă corpul coborînd pe o elipsă imobilă, de la apsida cea mai de sus la apsida cea mai de jos, formează unghiul VCP (ca să zic așa) de 180 de grade; un alt corp coborînd pe o elipsă mobilă și deci pe orbita imobilă de care vorbim, de la apsida cea mai înaltă la apsida cea mai de jos va face unghiul VCp de $180/\sqrt{3}$ grade: aceasta din cauza asemănării orbitei, pe care o descrie corpul sub acțiunea unei forțe uniforme centripete și a orbitei pe care corpul făcîndu-și rotațiile pe o elipsă ce se învîrtește o descrie într-un plan în repaus. Din cauza asemănării de mai sus a termenilor, aceste orbite sînt făcute asemenea, nu în general, ci atunci cînd se apropie cît se poate de mult de forma circulară. Deci un corp învîrtindu-se cu o forță centripetă uniformă pe o orbită aproape circulară, va face totdeauna între apsida cea mai de sus și apsida cea mai de jos unghiul de $180/\sqrt{3}$ grade, sau $103^\circ 55' 23''$ la centru; ajungînd de la apsida cea mai de sus la apsida cea mai de jos cînd o dată a descris acest unghi și de aici reîntorcîndu-se la apsida cea mai de sus cînd din nou a făcut același unghi; și așa mai departe la infinit.

EXEMPLUL 2. Să presupunem că forța centripetă este precum o putere oarecare A^{n-3} sau $\frac{A^n}{A^3}$ a înălțimii A : unde $n-3$ și n înseamnă indicii oarecare ai puterilor întregi sau fracționari, raționali sau iraționali, afirmativi sau negativi. Numărătorul A^n sau $\overline{T-X}^n$ redus la o serie nedeterminată prin metoda noastră a seriilor convergente, devine $T^n - nXT^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}XXT^{n-2}$ etc. Și comparînd termenii acestuia cu termenii celuilalt numărător $RGG - RFF + TFF - FFX$, devine $RGG - RFF + TFF$ către T^n precum $-FF$ către $-nT^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}XT^{n-2}$ etc. Și luînd rapoartele ultime cînd orbitele se apropie de forma circulară, avem RGG către T^n precum $-FF$ către $-nT^{n-1}$, sau GG către T^{n-1} precum FF către nT^{n-1} , și la rîndul său GG către FF precum T^{n-1} către nT^{n-1} , adică precum 1 către n ; și deci G către F , adică unghiul VCp către unghiul VCP , precum 1 către \sqrt{n} . Din care cauză, cum unghiul VCP descris în căderea corpului de la apsida cea mai de sus la apsida cea mai de jos într-o elipsă, este de 180 de grade, se va forma unghiul VCp , în coborîrea unui corp de la apsida cea mai de sus la apsida cea mai de jos, într-o orbită aproape circulară pe care o descrie un corp oarecare cu o forță centripetă proporțională cu puterea A^{n-1} , egal cu unghiul de $180/\sqrt{n}$ grade; și acest unghi fiind repetat corpul se va întoarce de la apsida cea mai de jos la apsida cea mai de sus, și așa mai departe la infinit. Astfel dacă forța centripetă este precum distanța corpului de la centru, adică, precum A sau $\frac{A^4}{A^3}$, va fi n egal cu 4 și \sqrt{n} egal cu 2; și deci unghiul între apsida cea mai de sus și apsida cea mai de jos egal cu $180/2^\circ$ sau 90° . Așadar corpul terminînd a patra parte a unei revoluții va ajunge la apsida cea mai de jos, și terminînd un alt sfert la apsida cea mai de sus și așa mai departe alternativ la infinit. Ceea ce este evident și din propoziția X . Căci corpul fiind acționat de această forță centripetă se va învîrți pe o elipsă imobilă, al cărei centru este în centrul forțelor. Căci dacă forța centripetă este în raport invers cu distanța, adică proporțională cu $1/A$ sau $\frac{A^2}{A^3}$, n va fi egal cu 2, și deci unghiul dintre apsida cea mai de sus și cea mai de jos va fi de $180/\sqrt{2}$ grade sau $127^\circ 16' 45''$, și de aceea corpul învîrtindu-se cu o astfel de forță, prin repetarea continuă a acestui unghi, prin schimbări alternative de la apsida cea mai de sus la cea mai de jos și de la cea mai de jos la cea mai de sus va ajunge în infinit. Apoi dacă forța centripetă este în raport invers cu rădăcina a patra a puterii a 11-a a înălțimii, adică în raport invers cu $A^{\frac{11}{4}}$, și deci proporțională cu $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ sau cu $\frac{A^4}{A^3}$ va fi n egal cu $\frac{1}{4}$ și $180/\sqrt{n}^\circ$ egal cu 360° și de aceea corpul îndepărtîndu-se de apsida cea mai de sus, și apoi, coborînd încontinuu, va ajunge la apsida cea mai de jos, va termina o revoluție întreagă, apoi printr-o urcare perpetuă completînd o altă revoluție întreagă, se va întoarce la apsida cea mai de sus: și așa alternativ la infinit.

EXEMPLUL 3. Luînd m și n ca indici oarecare ai puterilor înălțimii, și b , c , ca numere oarecare date, să presupunem că forța centripetă este ca

$\frac{bA^m + cA^n}{3}$ adică, precum $\frac{b(T-X)^m + c(T-X)^n}{3}$ sau (prin aceeași metodă a noastră a seriilor convergente) precum

$\frac{bT^m + cT^n - mbxT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}c,XXT^{n-2}}{A^3}$ etc. și comparînd

termenii numărătorilor va fi $RGG - RFF + TFF$ către $bT^m + cT^n$ precum $-FF$ către $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}b \times T^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ etc. Și luînd rapoartele ultime care se obțin cînd orbitele se apropie de forma circulară avem GG către $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ precum FF către $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, și la rîndul său GG către FF , precum $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ către $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Care proporție, exprimînd înălțimea maximă CV sau T în mod aritmetic prin unitate, devine GG către FF precum $b + c$ către $mb + nc$, și deci precum 1 către $\frac{mb + nc}{b + c}$. De unde G către F , adică unghiul VCp către unghiul VCP precum 1 către $\sqrt{\frac{mb + nc}{b + c}}$. Și de aceea fiindcă unghiul VCP între apsida cea mai de sus și apsida cea mai de jos pe elipsa imobilă este de 180° unghiul VCp va fi între aceleași apsidge, pe orbita pe care o descrie corpul cu o forță centripetă proporțională cu cantitatea $\frac{bA^m + cA^n}{A^3}$, egal cu

unghiul de $180 \sqrt{\frac{b + c}{mb + nc}}$ grade. Și prin același raționament dacă forța centripetă este precum $\frac{bA^m - cA^n}{A^3}$, unghiul între apsidge va fi de $180 \sqrt{\frac{b - c}{mb - nc}}$ grade.

La fel se va rezolva problema în cazuri mai grele. Cantitatea cu care forța centripetă este proporțională trebuie totdeauna dezvoltată în serii convergente avînd numitorul A^3 . Apoi partea dată a numărătorului care provine din acea operație către partea sa nedată, trebuie să fie în același raport precum partea dată a numărătorului $RGG - RFF + TFF - FFX$ către partea sa nedată: Și ștergînd cantitățile superflue, și scriind unitatea în locul lui T , se va obține proporția lui G către F .

COROLARUL 1. De aici dacă forța centripetă este ca o putere oarecare a înălțimii, se poate afla acea putere din mișcarea apsidelor; și invers. Adică dacă mișcarea circulară întregă cu care corpul revine la aceeași apsidă, este către mișcarea unghiulară a unei revoluții, sau de 360 de grade, ca un număr oarecare m către un alt număr n , și înălțimea este denumită A : forța va fi ca acea putere a înălțimii $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ al cărei indice este $\frac{nn}{mm} - 3$.

Ceea ce este evident prin exemplul al doilea. De unde e clar că cu îndepărtarea de la centru forța nu poate descrește într-un raport mai mare decît cubul raportului înălțimii: corpul învîrtindu-se cu o astfel de forță și îndepărtîndu-se de apsidă, dacă ar începe să se coboare niciodată nu ar ajunge la apsida cea mai de jos sau la înălțimea cea mai mică, ci se va coborî pînă la centru, descriind linia curbă pe care am tratat-o în corolarul 3, propoziția XLI. Dacă însă pornind din apsidă ar începe să se urce cît de puțin; el se va urca la infinit și niciodată nu va ajunge la apsida cea mai de sus. Căci va descrie linia curbă de care s-a vorbit în același corolar și în corolarul VI, propoziția XLIV. Astfel și cînd forța cu îndepărtarea de centru, descrește într-un raport mai mare decît cu cubul înălțimii corpul îndepărtîndu-se de apsidă sau va coborî pînă la centru sau se va urca la infinit, după

cum începe să se coboare sau să se urce. Dar dacă forța, cu îndepărtarea de centru, sau descrește într-un raport mai mic decât cu cubul înălțimii sau crește într-un raport oarecare al înălțimii, corpul nu se va coborî niciodată pînă la centru, ci va ajunge cîndva la apsidă cea mai de jos: și invers, dacă corpul coborînd și urcînd alternativ de la apsidă la apsidă nu ajunge niciodată la centru: forța în îndepărtarea de centru sau va crește, sau va descrește într-un raport mai mic decât cu cubul înălțimii: și cu cît corpul se va întoarce mai repede de la apsidă la apsidă, cu atît se va îndepărta mai mult raportul forțelor de cubul aceluia raport. Astfel dacă corpul se va întoarce de la apsidă cea mai de sus la apsidă cea mai de jos printr-o coborîre și urcare alternativă de 8, sau 4, sau 2, sau $1\frac{1}{2}$ revoluții, adică, dacă m către n va fi ca 8, sau 4, sau 2, sau $1\frac{1}{2}$ către 1, și deci $\frac{nn}{mm} - 3$ ar fi $\frac{1}{64} - 3$ sau $\frac{1}{16} - 3$ sau $\frac{1}{4} - 3$ sau $\frac{4}{9} - 3$: forța va fi precum $A^{\frac{1}{64}-3}$ sau $A^{\frac{1}{16}-3}$ sau $A^{\frac{1}{4}-3}$ sau $A^{\frac{4}{9}-3}$ adică în raport invers cu $A^{3-\frac{1}{64}}$ sau $A^{3-\frac{1}{16}}$ sau $A^{3-\frac{1}{4}}$ sau $A^{3-\frac{4}{9}}$. Dacă corpul după diverse revoluții se va întoarce la cea apsidă nemișcată; m va fi către n ca 1 către 1 și deci $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ egal cu A^{-2} sau $\frac{1}{AA}$; și de aceea descreșterea forțelor va fi în raportul cu pătratul înălțimii după cum s-a demonstrat în cele precedente. Dacă corpul se va întoarce la aceeași apsidă după trei sferturi de revoluții sau două treimi sau o treime sau o pătrime de revoluție; m va fi către n precum $\frac{3}{4}$ sau $\frac{2}{3}$ sau $\frac{1}{3}$ sau $\frac{1}{4}$ către 1, și deci $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ va fi egal cu $A^{\frac{16}{9}-3}$ sau $A^{\frac{9}{4}-3}$ sau A^{9-3} sau A^{16-3} ; și de aceea forța va fi sau în raport invers cu $A^{\frac{11}{9}}$ sau cu $A^{\frac{3}{4}}$ sau proporțională cu A^6 și cu A^{13} . În sfîrșit dacă corpul mergînd de la apsidă cea mai de sus la apsidă cea mai de jos ar face o revoluție întreagă și afară de aceasta încă trei grade, și deci în fiecare revoluție a corpului apsidă ar avansa cu trei grade; m va fi către n precum 363° către 360° adică precum 121 către 120 și deci $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ va fi egal cu $A^{-\frac{29523}{14641}}$, și de aceea forța centripetă va fi în raport invers cu $A^{-\frac{29523}{14641}}$ sau aproximativ în raport invers cu $A^{\frac{2^4}{243}}$. Așadar forța centripetă descrește într-un raport ceva mai mare decât raportul pătratic dar care este cam de $59\frac{3}{4}$ ori mai aproape de raportul pătratic decât de cel cubic.

COROLARUL 2. De aici și dacă corpul acționat de o forță centripetă în raport invers cu pătratul înălțimii se rotește pe o elipsă avînd focarul în centrul forțelor, și acestei forțe i se adună sau se scade o altă forță externă oarecare; se poate cunoaște (prin exemplul al treilea) mișcarea apsidelor care se va naște din acea forță externă; și invers. Astfel dacă forța cu care corpul se învîrtește pe elipsă este ca $\frac{1}{AA}$, și forța externă scăzută precum cA , și deci forța rămasă ca $\frac{A-cA^4}{A^3}$; va fi (ca în exemplul al treilea) b egal cu 1, m egal cu 1, și n egal cu 4, și deci unghiul de revoluție

între apside egal cu unghiul de $180^\circ \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ grade. Să presupunem că forța externă este de 357,45 ori mai mică decît forța cu care corpul se învîrtește pe elipsă, adică c este $\frac{100}{35745}$, A sau T fiind egal cu 1, și atunci $180^\circ \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ va deveni $180^\circ \sqrt{\frac{35645}{35345}}$, sau $180^\circ.7623$, adică $180^\circ 45' 44''$. Prin urmare corpul plecînd de la apsidea cea mai de sus, va ajunge la apsidea cea mai de jos cu o mișcare unghiulară de $180^\circ 45' 44''$, și repetînd această mișcare va reveni la apsidea cea mai de sus: și deci apsidea cea mai de sus va avansa cu fiecare revoluție cu $1^\circ 31' 28''$. Apsida Lunii este aproximativ de două ori mai rapidă.

Atît despre mișcarea corpurilor pe orbite ale căror plane trec prin centrul forțelor. Mai rămîne să determinăm și mișcările în plane excentrice. Căci scriitorii care tratează mișcarea corpurilor grele obișnuiesc să considere urcările și coborîrile greutăților, atît pe plane oblice oarecare, cît și pe cele perpendiculare: și cu același drept vom avea de considerat aici mișcările corpurilor sub acțiunea unor forțe oarecare îndreptate spre centre, corpurile menținîndu-se în plane excentrice. Presupunem însă că planele sînt foarte netede și absolut alunecoase ca să nu întîrzie mișcările corpurilor. Mai mult, în aceste demonstrații, în locul planelor de-a lungul cărora corpurile cad și pe care le ating căzînd, folosim plane paralele cu acestea, în care centrele corpurilor se mișcă și mișcîndu-se descriu orbite. Și apoi determinăm după aceeași lege mișcările corpurilor efectuate pe suprafețe curbe.

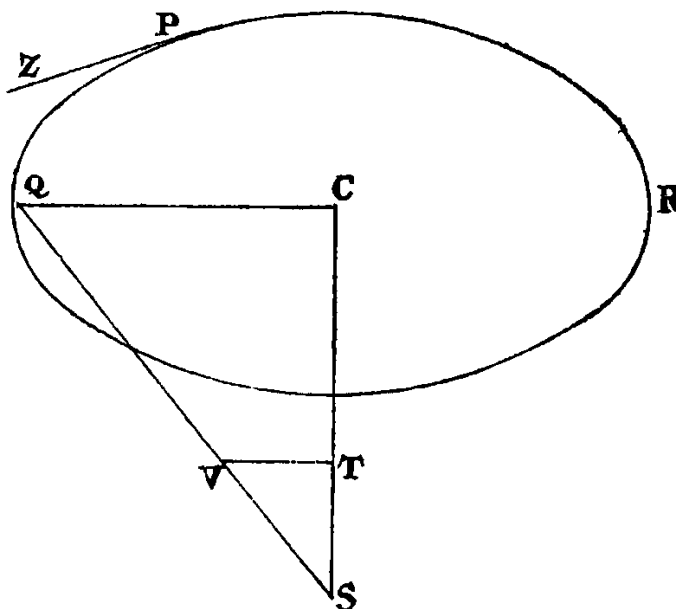
SECȚIUNEA X

Despre mișcarea corpurilor pe suprafețe date, și despre mișcarea oscilatoare a pendulelor.

PROPOZIȚIA XLVI. PROBLEMA XXXII

Fiind dată o forță centripetă de un gen oarecare, și fiind dat atît centrul forțelor cît și un plan oarecare în care se rotește corpul, și admițînd cvadraturile figurilor curbilinii: se cere mișcarea unui corp ce pornește dintr-un loc dat, cu o viteză dată, în direcția unei drepte din acel plan dat.

Fie S centrul forțelor, SC distanța minimă a acestui centru de la planul dat, P corpul ce pleacă din locul P în direcția dreptei PZ , Q același corp rotindu-se pe traiectoria sa, și PQR traiectoria, descrisă în planul dat, care trebuie aflată. Să unim CQ , QS , și dacă pe QS luăm SV proporțional cu forța centripetă cu care corpul este atras spre centrul S , și ducem VT care este paralel cu CQ și întâlnește pe SC în T : forța SV se descompune (potrivit corolarului II al legilor) în forțele ST , TV ; dintre care ST trăgînd corpul în direcția unei linii perpendiculare pe plan, nu-i schimbă de loc mișcarea în acest plan. Forța cealaltă însă TV lucrînd de-a lungul poziției planului, atrage corpul direct spre punctul C în planul dat, și deci face, ca



corpul să se miște în acest plan, ca și cînd forța ST ar fi înlăturată și corpul s-ar roti în jurul centrului C într-un spațiu liber acționat fiind numai de forța TV . Dată fiind însă forța centripetă TV cu care se rotește corpul Q într-un spațiu liber în jurul centrului dat C , se dă (prin propoziția XLII) atît traiectoria PQR , pe care o descrie corpul, cît și locul Q , în care corpul se va afla la un timp dat oarecare, cît și în sfîrșit viteza corpului în acel loc Q ; și invers. Q.E.I.

PROPOZIȚIA XLVII. TEOREMA XV

Admițînd că forța centripetă este proporțională cu distanța corpului de la centru; toate corpurile ce se rotesc în plane oarecare descriu elipse, și efectuează revoluțiile în timpuri egale; și acelea care se mișcă în linii drepte, alergînd înainte și înapoi, termină diversele perioade de dus și întors în aceleași timpuri.

Căci, menținînd cele din poziția de mai sus, forța SV , cu care corpul Q învîrtindu-se într-un plan oarecare PQR este atras spre centrul S , este

precum distanța SQ ; și deci SV și SQ , TV și CQ fiind proporționale cu forța TV , cu care corpul este atras spre punctul dat C în planul orbitei, este precum distanța CQ . Deci forțele, cu care corpurile aflătoare în planul PQR sînt atrase spre punctul C , sînt în privința raportului distanțelor egale cu forțele cu care aceleași corpuri sînt atrase de oriunde spre centrul S și de aceea; corpurile se vor mișca în aceleași timpuri, în aceleași figuri, într-un plan oarecare PQR în jurul punctului C , și în spații libere în jurul centrului S ; și deci (potrivit corolarului 2, propoziției X și corolarului 2, propoziției $XXXVIII$) în timpuri totdeauna egale, fie că descriu elipse în acel plan în jurul centrului C , fie că vor completa perioade de mișcare încoace și încolo în linii drepte duse în acel plan prin centrul C . Q.E.D.

SCOLIE

Înrudite cu acestea sînt urcarea și coborîrea corpurilor pe suprafețe curbe. Să ne închipuim că se descriu linii curbe într-un plan apoi că se rotesc în jurul unor axe oarecare date ce trec prin centrul forțelor, și prin acea revoluție descriu suprafețe curbe; apoi că corpurile se mișcă în așa fel ca centrele lor să se afle totdeauna pe aceste suprafețe. Dacă corpurile urcînd și coborînd oblic aleargă încoace și încolo; mișcările lor au loc în plane ce trec prin axă și deci în linii curbe prin a căror revoluție s-au născut acele suprafețe curbe. Așadar în aceste cazuri este suficient să considerăm mișcarea pe aceste linii curbe.

PROPOZIȚIA XLVIII. TEOREMA XVI

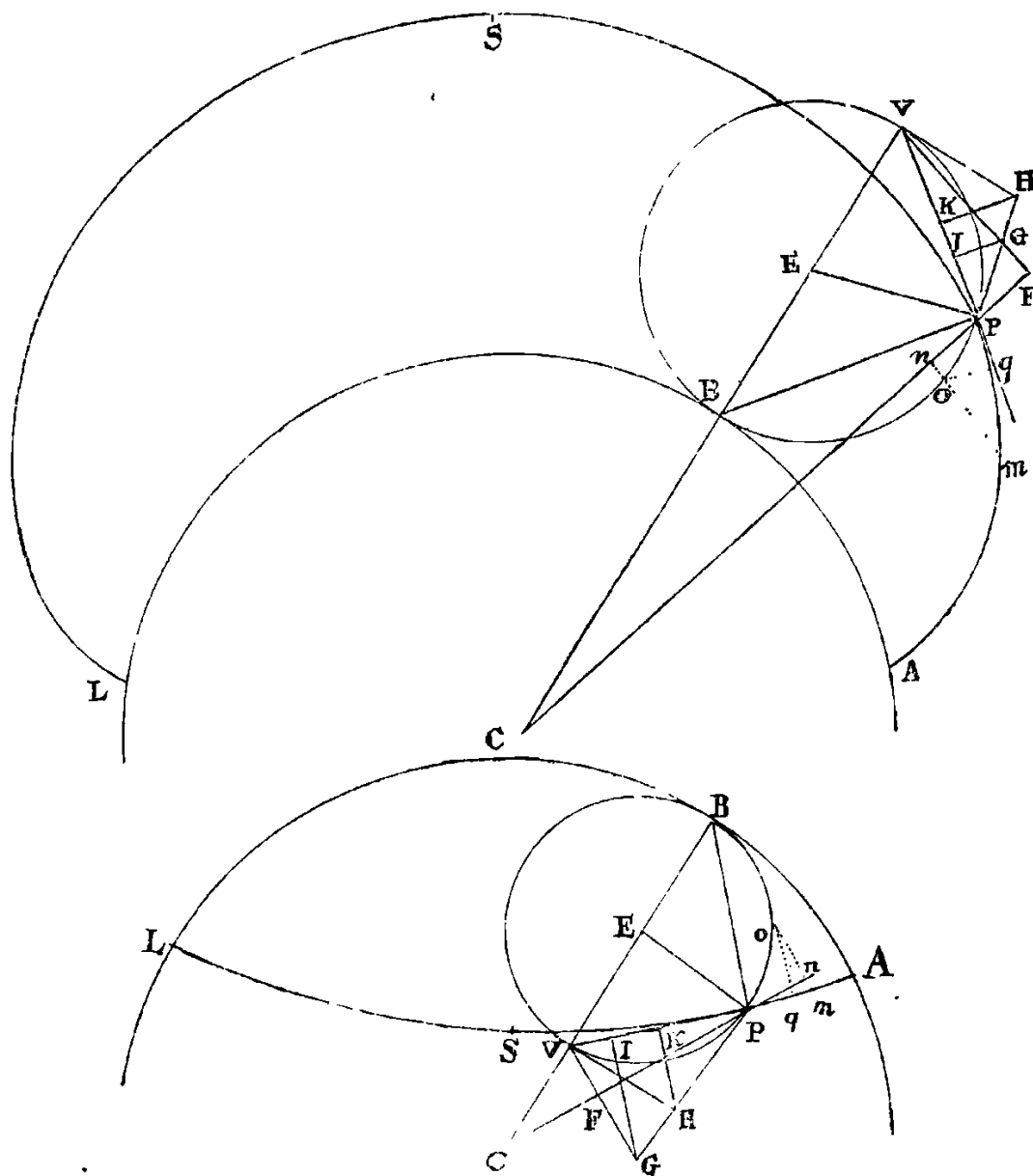
Dacă o roată stă în afara unei sfere sub unghiuri drepte și învîrtindu-se în felul roților înaintează pe un cerc maxim, lungimea drumului curbiliniu pe care-l face un punct oarecare dat pe perimetrul roții de cînd a atins sfera, și care se poate numi cicloidă sau epicicloidă, va fi către dublul sinus versus-ului jumătății de arc care din acel timp a atins sfera, precum suma diametrelor sferei și al roții către semidiametrul sferei.

PROPOZIȚIA XLIX. TEOREMA XVII

Dacă o roată se află în lăuntru unei sfere sub unghiuri drepte și învîrtindu-se înaintează pe un cerc maxim; lungimea drumului curbiliniu pe care-l face un punct oarecare dat de perimetrul roții, de cînd a atins sfera, va fi către dublul sinus versus-ului jumătății de arc care în tot acest timp a atins sfera, precum diferența diametrelor sferei și roții către semidiametrul sferei.

Fie ABL sfera, C centrul ei, BPV roata ce stă pe ea, E centrul roții, B punctul de contact, și P punctul dat pe perimetrul roții. Să ne închipuim că această roată înaintează pe cercul maxim ABL de la A prin B spre L , și între timp se rotește astfel încît arcele AB , PB sînt totdeauna egale între ele, și punctul P dat pe perimetrul roții descrie în acel timp drumul curbiliniu AP . Fie însă AP întreg drumul curbiliniu descris din momentul cînd

roata a atins sfera în A , și lungimea AP a acestui drum va fi către dublul sinus versus-ului arcului $\frac{1}{2}PB$, precum $2CE$ către CB . Căci să presupunem că dreapta CE (prelungită dacă este necesar) întâlnește roata în V și să unim CP , BP , EP , VP și pe CP prelungită să coborâm normala VF . Să presupunem că PH , VH care se înîlnesc în H ating cercul în P și V și că PH taie pe VF în G , și să coborâm normalele GI , HK , pe VP . La fel din centrul C și cu



un interval oarecare să descriem cercul $n o m$ tăind dreapta CP în n , perimetrul roții BP în o , și drumul curbiliniu AP în m ; și din centrul V și cu intervalul Vo să descriem un cerc tăind în a pe VP prelungit. Deoarece roata mergînd totdeauna se rotește în jurul punctului de contact B , este evident că dreapta BP este perpendiculară pe linia curbă AP pe care o descrie punctul P al roții, și deci că dreapta VP va atinge această curbă în punctul P . Mărind sau micșorînd în mod gradat, raza cercului $n o m$ va deveni în sfîrșit egală cu distanța CP ; și din cauza figurii disparente $P n o m q$ și a figurii $PFGVI$, raportul ultim al linioarelor disparente Pm , Pn , Po , Pq , adică rapor-

tul schimbărilor momentane a curbei AP , a dreptei CP , a arcului circular BP , și a dreptei VP , va fi respectiv același ca ale liniilor PV , PF , PC , PI . Cum însă VF este perpendiculară pe CF și VH pe CV , de aceea și unghiurile HFG , VCF sînt egale; și unghiul VHG (din cauză că unghiurile din V și P ale patrulaterului $HVEP$ sînt drepte) este egal cu unghiul CEP , triunghiurile VHG , CEP vor fi asemenea; și de aici va fi după cum EP către CE tot așa HG către HV sau HP , și tot așa KI către KP , și compunînd sau separînd, după cum CB către CE tot așa PI către PK , și dublînd consecventele, după cum CB către $2CE$ tot așa PI către PV , și tot așa Pq către Pm . Prin urmare descreșterea liniei VP , adică creșterea liniei $BV - VP$ către creșterea liniei curbe AP este în raportul dat CB către $2CE$, și de aceea (potrivit corolarului, lema IV) lungimile $BV - VP$ și AP , născute de acele creșteri sînt în același raport. Dar BV fiind raza, VP este cosinusul unghiului BVP sau $\frac{1}{2}BEP$, și deci $BV - VP$ este sinus versus-ul acelui unghi; și de aceea în această roată, a cărei rază este $\frac{1}{2}VB$, $BV - VP$ va fi dublul sinus versus-ul arcului $\frac{1}{2}BP$. Așadar AP este către dublul sinus versus-ului arcului $\frac{1}{2}BP$ precum $2CE$ către CB . Q.E.D.

Iar pentru a le distinge vom numi linia AP din propoziția de mai înainte cicloida din afara sferei, pe cealaltă din cea din urmă cicloida din interiorul sferei.

COROLARUL 1. De aici dacă descriem cicloida întreagă ASL și o bisectăm în S , lungimea părții PS va fi către lungimea VP (care este dublul sinusului unghiului VBP , EB fiind raza) precum $2CE$ către CB și deci într-un raport dat.

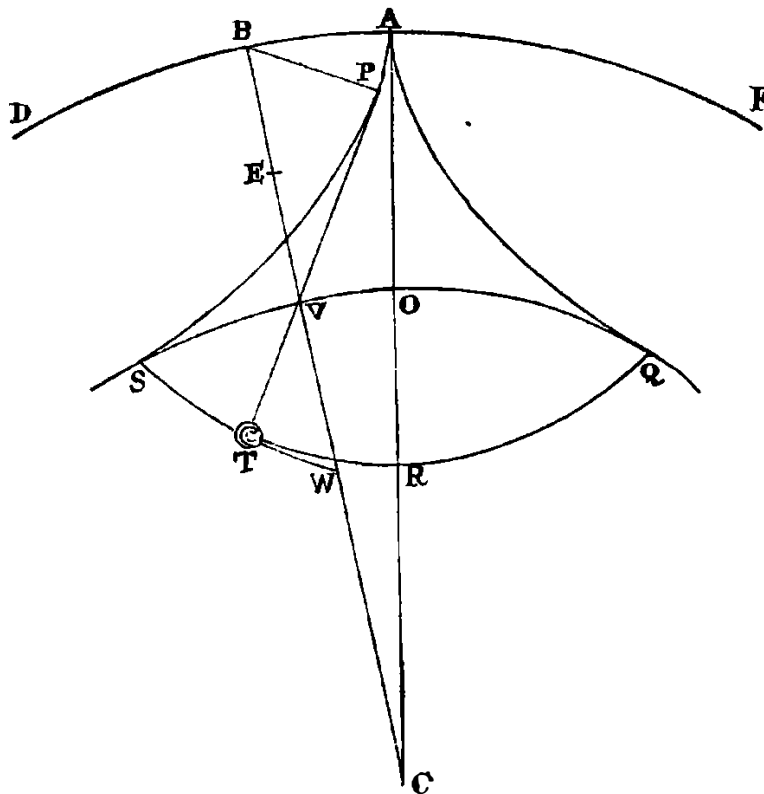
COROLARUL 2. Și lungimea semiperimetului cicloidei AS va fi egală cu linia dreaptă care este către diametrul BV al roții precum $2CE$ către CB .

PROPOZIȚIA L. PROBLEMA XXXIII

Să facem un corp pendular să oscileze pe o cicloidă dată.

În interiorul sferei QVS , descrisă cu centrul C , fie dată cicloida QRS bisectată în R și întîlnind în punctele sale extreme Q și S suprafața sferei de ambele părți. Să ducem CR bisectînd arcul QS în O și să o prelungim pînă în A , astfel ca să avem CA către CO precum CO către CR . Din centrul C cu intervalul CA să descriem sfera exterioară DAF , și în interiorul acestei sfere cu o roată, al cărei diametru fie AO , să descriem două semicicloide AQ , AS care ating sfera interioară în Q și S și întîlnesc sfera exterioară în A . Din punctul A , de firul APT egal cu lungimea AR să atîrne corpul T , și să oscileze între semicicloidele AQ , AS , astfel ca de cîte ori pendulul se îndepărtează pe perpendiculara AR , firul cu partea lui superioară AP să se aplice la acea semicicloidă APS spre care tinde mișcarea; și să se îndoiască în jurul ei ca în jurul unui obstacol, și partea rămasă PT care nu atinge încă semicicloida, să rămînă întinsă în linie dreaptă; și greutatea T va oscila pe cicloida dată QRS . Q.E.F.

Căci să presupunem că firul PT întâlnește atît cicloida QRS în T cît și cercul QOS în V , și să ducem CV ; și la partea rectilinie PT a firului din punctele extreme P și T să ridicăm perpendicularele BP , TW , întîlnind dreapta CV în B și W . Este evident din construcția și nașterea figurilor asemenea AS , SR că perpendicularele PB , TW taie din CV lungimile VB , VW egale cu diametrele OA , OR ale roților. Prin urmare TP este către VP (care este dublul sinusului unghiului VBP raza fiind $\frac{1}{2}BV$) precum BW către BV , sau $AO+OR$ către AO , adică (deoarece CA este proporțional cu CO , CO cu CR și separînd AO cu OR) precum $CA+CO$ către CA , sau dacă se bisectează BV prin E , precum $2CE$ către CB . Deci (potrivit corolarului 1, propoziția XLIX) lungimea părții rectilinii a firului PT este totdeauna egală cu arcul PS al cicloidei, și firul întreg APT este totdeauna egal cu jumătatea arcului APS al cicloidei, adică (potrivit corolarului 2, propoziției XLIX) cu lungimea AR . Și de aceea la rîndul său dacă firul rămîne totdeauna egal cu lungimea AR , punctul T se va mișca pe cicloida dată QRS . Q.E.D.



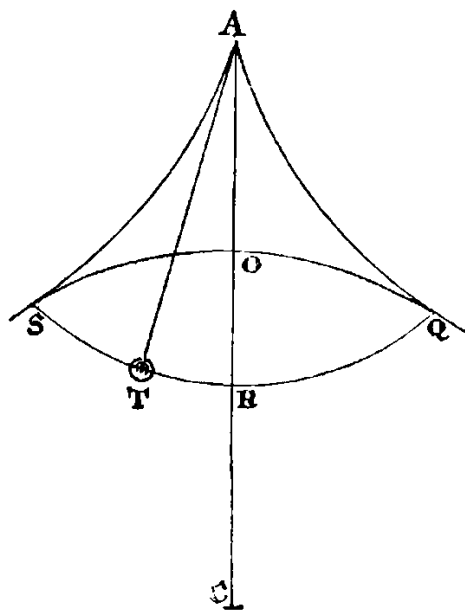
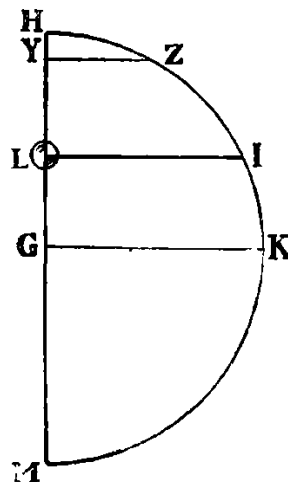
COROLAR. Firul AR este egal cu semicicloida AS , și deci are către semidiametrul AC al sferei exterioare același raport ca semicicloida asemenea SR către semidiametrul CO al sferei interioare.

PROPOZIȚIA LI. TEOREMA XVIII

Dacă o forță centripetă tinzînd din toate părțile către centrul C al unei sfere este în diversele locuri precum distanța unui loc oarecare de la centru, și acționînd numai această forță corpul T va oscila (în felul deja descris) pe perimetrul cicloidei QRS : zic că oscilațiile oricît de neegale vor fi efectuate în timpuri egale.

Căci să ducem pe tangenta prelungită la infinit TW a cicloidei perpendiculara CX și să unim CT . Deoarece forța centripetă cu care corpul T este împins spre C este precum distanța CT , și aceasta (potrivit corolarului II al legilor) se împarte în părțile CX , TX dintre care CX împingînd corpul direct din P întinde firul PT și prin rezistența lui este total folosită fără să

sferei QOS tinzînd spre centrul ei; și în același timp în care pendulul T este lăsat să cadă din locul cel mai înalt S , un corp oarecare L este lăsat să cadă din H pînă în G : deoarece forțele cu care corpurile sînt acționate sînt la început egale și totdeauna proporționale cu spațiile TR și LG ce trebuie descrise, și deci, dacă TR și LG sînt egale, ele sînt egale în locurile T și L ; este evident că acele corpuri descriu spațiile ST , HL egale la început, și deci după aceea își continuă drumul fiind acționate în mod egal și descriu spații egale. Din care cauză (potrivit propoziției XXXVIII) timpul în care corpul descrie arcul ST este către timpul unei oscilații, precum arcul HI , timpul în care corpul H va ajunge în L , către semiperiferia HKM , timpul în care corpul H va ajunge în M . Și viteza corpului pendular în locul T este către viteza lui în locul cel mai de jos R (adică viteza corpului H în locul L către viteza lui în locul G , sau creșterea momentană a liniei HL către creșterea momentană a liniei HG , arcele HI , HK crescînd cu un flux egal) precum ordonata LI către raza GK , sau precum $\sqrt{SR^2 - TR^2}$ către SR . De unde fiindcă, în oscilații neegale, în timpuri egale se descriu arce proporționale cu arcele întregi ale oscilațiilor; se obțin, din timpurile date, și vitezele și arcele descrise în toate oscilațiile. Care trebuiau aflate mai întîi.



Să presupunem acum că oarecare corpuri pendulare oscilează pe cicloide diverse descrise în sfere diverse, ale căror forțe absolute de asemenea sînt diferite: și, dacă forța absolută a unei sfere oarecare QOS se numește V , forța acceleratoare cu care este acționat pendulul pe circumferința acestei sfere, cînd începe să se miște direct spre centrul ei va fi ca distanța corpului pendular și forța absolută a sferei luate împreună, adică precum $CO \times V$. Așadar linioara HY , care este ca această forță acceleratoare $CO \times V$, va fi descrisă într-un timp dat; și, dacă se ridică normala YZ întîlnind circumferința în Z , arcul născînd HZ va indica acel timp dat. Dar acest arc născînd HZ este precum rădăcina pătrată a dreptunghiului GHY , și deci

ca $\sqrt{GH \times CO \times V}$. De unde timpul unei oscilații întregi în cicloida QRS (deoarece este ca semiperiferia HKM , care înseamnă oscilația întreagă; și în raport invers cu arcul HZ care înseamnă de asemenea timpul dat) va fi precum GH și în raport invers cu $\sqrt{GH \times CO \times V}$, adică, deoarece GH și SR

sînt egale, precum $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$ sau (potrivit corolarului propoziția L) precum

$\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. În consecință oscilațiile în toate sferele și cicloidele, făcute cu forțe absolute oarecare, sînt într-un raport care se compune dintr-unul direct

cu rădăcina pătrată a lungimii firului, și unul invers cu rădăcina pătrată a distanței dintre punctul de suspensiune și centrul sferei și în raport invers și cu rădăcina pătrată a forței absolute a sferei. Q.E.I.

COROLARUL 1. De aici se pot asemăna între ele și timpurile celor oscilante, căzătoare și rotitoare. Căci dacă diametrul roții, cu care se descrie cicloida în interiorul sferei, se ia egal cu semidiametrul sferei, cicloida va deveni o linie dreaptă trecînd prin centrul sferei, și oscilația va fi o coborîre și apoi o urcare pe această dreaptă. De unde se dă atît timpul de coborîre dintr-un loc oarecare la centru, cît și timpul egal cu acesta în care corpul rotindu-se în mod uniform în jurul centrului sferei la o distanță oarecare descrie un arc al unui cadran. Căci acest timp (potrivit cazului al doilea) este către timpul unei semioscilații pe o cicloidă oarecare QRS precum 1 către $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

COROLARUL 2. De aici mai urmează și cele aflate de Wren și Huygens despre cicloida ordinară. Căci dacă diametrul sferei crește la infinit, iar suprafața ei sferică se va schimba într-un plan, și forța centripetă va acționa în mod uniform în direcția unor linii perpendiculare pe acest plan, și cicloida noastră va trece într-o cicloidă ordinară. În acest caz însă lungimea arcului cicloidei între acel plan și punctul ce descrie, va deveni egală cu de patru ori sinus versus-ul jumătății arcului roții între același plan și punctul ce descrie, după cum a aflat Wren. Și pendulul între două astfel de cicloide va oscila pe o cicloidă asemenea și egală în timpuri egale, după cum a demonstrat Huygens. Dar și căderea corpurilor grele, în timpul unei oscilații va fi aceea pe care a expus-o Huygens.

Propozițiile demonstrate de noi se adaptează însă la constituția adevărată a Pămîntului, întrucît roțile mergînd pe cercurile lui maxime descriu prin mișcările cuielor, fixate în perimetrele lor, cicloide în afara sferei; și pendulele suspendate mai jos în minele și cavernele Pămîntului, trebuie să oscileze pe cicloide înlăuntrul sferelor, ca toate oscilațiile să devină izocrone. Căci greutatea (după cum se va arăta în Cartea a III-a) descrește prin îndepărtarea de suprafața Pămîntului, în sus în raportul pătratului distanțelor de la centrul lui, iar în jos într-un raport simplu.

PROPOZIȚIA LIII. PROBLEMA XXXV

Admițînd cvadraturile figurilor curbilinii, să se afle forțele cu care corpurile efectuează în linii curbe date oscilații totdeauna izocrone.

- Să presupunem că corpul T oscilează pe o linie curbă oarecare $STRQ$, a cărei axă să fie AR trecînd prin centrul C al forțelor. Să ducem TX care să atingă acea curbă într-un loc oarecare T al corpului și pe această tangentă TX să luăm TY egal cu arcul TR . Căci lungimea acelui arc se cunoaște din cvadraturile figurilor, prin mijloace obișnuite. Din punctul Y să ducem dreapta YZ perpendiculară pe tangentă. Să ducem CT întîlnind perpendiculara în Z , și forța centripetă va fi proporțională cu dreapta TZ . Q.E.I.

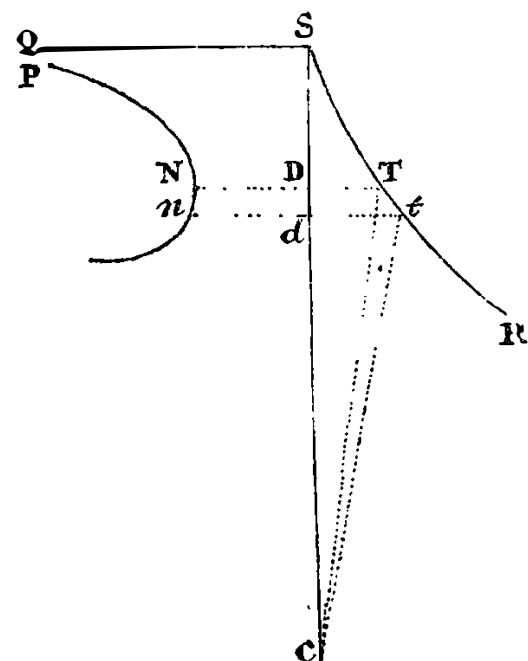
Căci dacă forța, cu care corpul este atras din T spre C , se reprezintă prin dreapta TZ luată proporțional cu ea, aceasta se va descompune în forțele

COROLARUL 2. Și de aceea în orologii, dacă forțele imprimare de o mașină asupra pendulului pentru conservarea mișcării se pot compune în așa fel cu forța greutatei, ca întreaga forță în jos să fie totdeauna precum linia ce se naște aplicând dreptunghiul format de arcul TR și raza AR către sinusul TN , toate oscilațiile vor fi izocrone.

AdmiŃînd cvadraturile figurilor curbilinii, sã se afle timpurile în care corpurile se urcã şi se coboară acŃionate de o forŃã centripetã oarecare în linii curbe oarecare, descrise într-un plan ce trece prin centrul forŃelor.

Să presupunem că corpul se coboară dintr-un loc oarecare S , pe o linie curbă oarecare $STtR$ dată într-un plan trecînd prin centrul C al forțelor. Să unim CS și să o împărțim în nenumărate părți egale, și fie Dd una oare-

care din acele părți. Din centrul C cu intervalele CD , Cd să descriem cercurile DT , dt , întâlnind curba $STtR$ în T și t . Și fiind dată atît legea forței centripete, cît și înălțimea CS de la care a căzut corpul; va fi dată viteza corpului la o altă înălțime oarecare CT (potrivit propoziției XXXIX). Timpul însă, în care corpul descrie linioara Tt , este ca lungimea acestei linioare, adică proporțională cu secanta unghiului tTC ; și în raport invers cu viteza. Să presupunem că ordonata DN proporțională cu acest timp este perpendiculară pe dreapta CS în punctul D , și fiind Dd dat, dreptunghiul $Dd \times DN$, adică aria $DNnd$, va fi proporțională cu același timp. Prin urmare dacă PNn este linia curbă pe care se află punctul N încontinuu, și asimptota ei este dreapta SQ stînd perpendicular pe dreapta CS : aria $SQPNd$ va

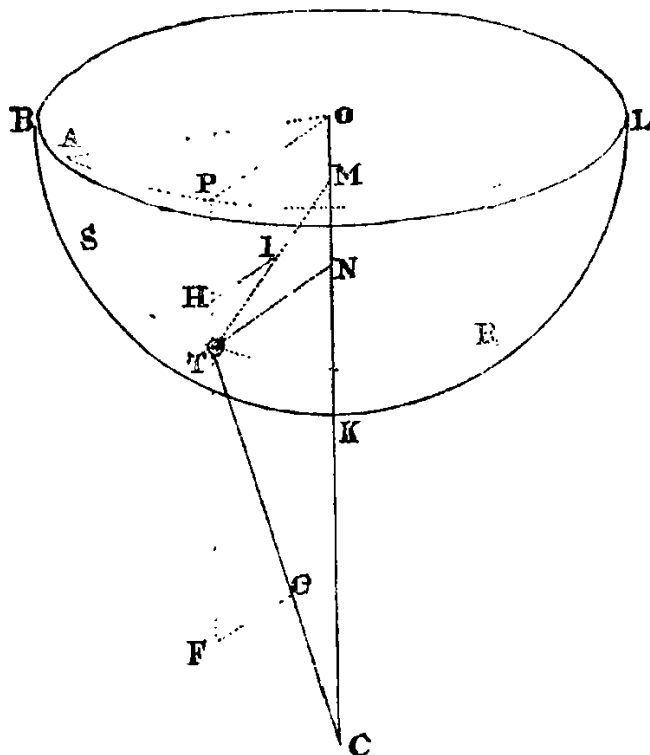


fi proporțională cu timpul în care corpul coborînd a descris linia ST ; și deci fiind aflată acea arie timpul va fi dat. Q.E.I.

PROPOZIȚIA LV. TEOREMA XIX

Dacă un corp se mișcă pe o suprafață curbă oarecare, a cărei axă trece prin centrul forțelor, și de la corp se duce o perpendiculară pe axă, și se duce o paralelă cu ea și egală dintr-un punct oarecare dat al axei: zic că acea paralelă va descrie o arie proporțională cu timpul.

Fie BKL suprafața curbă, T un corp ce se mișcă pe ea, STR traiectoria pe care o descrie corpul pe ea, S începutul traiectoriei, OMK axa suprafeței curbe, TN dreapta dusă perpendicular de la corp pe axă, OP dreapta paralelă și egală cu ea dusă din punctul O , care este dat pe axă; AP urma traiectoriei descrisă de punctul P în planul AOP al liniei mobile OP , A începutul urmei corespunzător punctului S ; TC dreapta dusă de la corp la centru; TG partea ei proporțională cu forța centripetă, cu care corpul



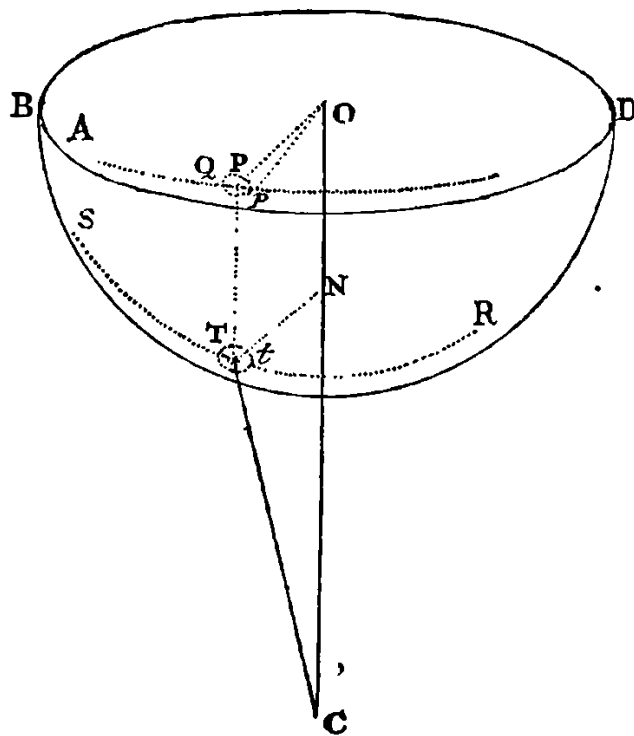
este împins spre centrul C ; TM dreapta perpendiculară pe suprafața curbă; TI partea ei proporțională cu forța presiunii, cu care corpul apasă suprafața și la rîndul său este apăsător spre M de către suprafață; PTF dreapta paralelă cu axa trecînd prin corp, și GF , IH drepte duse din G și I perpendicular pe paralela $PHTF$. Zic acum că aria AOP , descrisă cu raza OP de la începutul mișcării, este proporțională cu timpul. Căci forța TG (potrivit corolarului II al legilor) se descompune în forțele TF , FG și forța TI în forțele TH , HI : Dar forțele TF , TH acționînd de-a lungul liniei PF perpendiculară pe planul AOP schimbă numai mișcarea corpului întrucît ea este perpendiculară pe acest plan. Și deci mișcarea lui întrucît este făcută după poziția planului; adică, mișcarea punctului P prin care se descrie urma AP a traiectoriei în acest plan, este aceeași ca și cînd forțele TF , TH ar fi înlăturate și corpul ar fi acționat numai de forțele FG , HI ; adică aceeași ca și cînd corpul ar descrie curba AP în planul AOP , cu o forță centripetă tinzînd spre centrul O , și egală cu suma forțelor FG și HI . Dar cu o astfel de forță se va descrie aria AOP (potrivit propoziției I) proporțională cu timpul. Q.E.D.

COROLAR. Prin același raționament, dacă un corp acționat de forțe ce tind spre două sau mai multe centre pe aceeași dreaptă oarecare dată CO , ar descrie într-un spațiu liber o linie curbă oarecare ST ; aria AOP va fi totdeauna proporțională cu timpul.

PROPOZIȚIA LVI. PROBLEMA XXXVII

Admițînd cvadraturile figurilor curbilinii, și fiind date atît legea forței centripete tinzînd spre un centru dat, cît și suprafața curbă a cărei axă trece prin acel centru; se cere să se afle traiectoria pe care o va descrie pe aceeași suprafață un corp ce pornește dintr-un loc dat, cu o viteză dată, într-o direcție dată pe acea suprafață.

Menținînd cele construite în propoziția de mai sus, să presupunem că corpul T pornește din locul dat S în direcția unei drepte de poziție dată pe traiectoria ce trebuie aflată STR , a cărei urmă în planul BLO fie AB . Și fiind dată viteza corpului la înălțimea SC , va fi dată viteza lui la orice altă înălțime TC . Să presupunem că cu acea viteză într-un timp dat cît se poate de scurt corpul descrie păticea Tt a traiectoriei sale, și fie Pp urma ei descrisă în planul AOP . Să unim Op , și fie elipsa PQ urma pe planul AOP a unui mic cerc descris pe suprafața curbă din centrul T cu intervalul Tt . Și fiind dată mărimea micului cerc Tt , și fiind dată dis-



tanța sa TN sau PO la axa CO , va fi dată elipsa pQ după gen și mărime, precum și după poziția față de dreapta PO . Și cum aria POp este proporțională cu timpul, și deci este dată fiind dat timpul, unghiul POp va fi dat. Și de aici va fi dată intersecția comună p a elipsei și a dreptei Op , împreună cu unghiul OPp în care urma APp a traiectoriei taie linia OP . De aici în adevăr (comparând propoziția XLI cu corolarul său 2) felul determinării curbei APp apare ușor. Atunci din diversele puncte T ale urmei, ridicând pe planul AOP perpendicularele PT întâlnind suprafața curbă în T , vor fi date diversele puncte T ale traiectoriei. Q.E.I.

SECTIUNEA XI

Despre mișcarea corpurilor ce tind unul spre altul cu forțe centripete.

Pînă acum am expus mișcările corpurilor atrase spre un centru imobil, care totuși abia există în natura lucrurilor. Căci atracțiunile obișnuiesc a fi între corpuri; și acțiunile corpurilor atrăgătoare și atrase sînt totdeauna reciproce și egale, potrivit legii a treia; astfel că nici cel atrăgător nu poate fi în repaus nici cel atras, dacă sînt două corpuri, ci amîndouă (potrivit corolarului IV al legilor) se rotesc ca printr-o atracție mutuală în jurul centrului comun de greutate; și dacă sînt mai multe corpuri, care sau sînt atrase de unul singur, și la rîndul lor ele îl atrag, sau toate se atrag reciproc, acestea se vor mișca între ele în așa fel, ca centrul comun de greutate sau să fie în repaus sau să se miște uniform în direcție. Din care cauză trec la expunerea mișcării corpurilor ce se atrag mutual, considerînd forțele centripete ca atracții, deși poate dacă vorbim fizicește, se pot numi mai corect impulsuri. Căci acum ne aflăm în domeniul matematic și de aceea lăsînd la o parte controversele fizice, ne folosim de un limbaj familiar, prin care ne putem face mai ușor înțeleși de cititorii matematicieni.

PROPOZIȚIA LVII. TEOREMA XX

Două corpuri care se atrag reciproc descriu, atît în jurul centrului comun de greutate, cît și unul în jurul celuilalt, figuri asemenea.

Căci distanțele corpurilor de la centrul comun de greutate sînt invers proporționale cu corpurile; și de aceea într-un raport dat între ele și compunînd într-un raport dat către distanța întreagă dintre corpuri. Însă aceste distanțe sînt purtate în jurul extremității lor comune cu o mișcare unghiulară egală, fiindcă aflîndu-se totdeauna în aceeași direcție nu-și schimbă înclinarea reciprocă. Liniile drepte însă, care sînt între ele într-un raport dat, și sînt purtate în jurul extremităților lor cu o mișcare unghiulară egală, descriu figuri cu totul asemenea în jurul acelorași extremități în plane, care sau se află în repaus împreună cu aceste extremități, sau se mișcă cu o mișcare neunghiulară. Prin urmare figurile descrise cu aceste distanțe purtate împrejur sînt asemenea. Q.E.D.

PROPOZIȚIA LVIII. TEOREMA XXI

Dacă două corpuri se atrag reciproc cu forțe oarecare și în același timp se învîrtesc în jurul centrului comun de greutate: zic că se poate descrie cu aceleași forțe în jurul unuia din cele două corpuri considerat ca imobil o figură asemenea și egală cu figurile pe care le descriu corpurile astfel mișcate unul în jurul altuia.

Să presupunem că corpurile S , P se rotesc în jurul centrului comun de greutate C , mergînd de la S la T și de la P la Q . Dintr-un punct dat s să ducem sp , sq totdeauna egale și paralele cu SP , TQ ; și curba pqv pe

centrului comun de greutate, cît și unul în jurul celuilalt, elipse concentrice; și viceversa, dacă se descriu astfel de figuri, forțele sînt proporționale cu distanțele.

COROLARUL 2. Și două corpuri, atrăgîndu-se cu forțe invers proporționale cu pătratul distanței descriu (potrivit propoziției XI, XII, XIII) atît în jurul centrului comun de greutate, cît și unul în jurul celuilalt, secțiuni conice avînd focarul în centrul, în jurul căruia se descriu figurile. Și viceversa, dacă se descriu astfel de figuri, forțele centripete sînt invers proporționale cu pătratul distanței.

COROLARUL 3. Două corpuri oarecare rotindu-se în jurul centrului comun de greutate descriu cu razele duse la acel centru și la fiecare dintre ele arii proporționale cu timpurile.

PROPOZIȚIA LIX. TEOREMA XXII

Timpul periodic a două corpuri S și P , care se învîrtesc în jurul centrului comun de greutate C , este către timpul periodic al unuia din cele două corpuri P , care se învîrtește în jurul celuilalt S imobil și descriind o figură asemenea și egală cu figurile pe care le descriu corpurile unul în jurul celuilalt, precum rădăcina pătrată a celuilalt corp S către aceea a sumei corpurilor $S + P$.

Căci, din demonstrația propoziției de mai sus, timpurile, în care se descriu arce oarecare PQ și pq asemenea, sînt ca rădăcinile pătrate ale distanțelor CP și SP sau sp , adică în raportul rădăcinii pătrate a corpului S către aceea a sumei corpurilor $S + P$. Și compunînd, sumele timpurilor în care se descriu toate arcele asemenea PQ și pq , adică, timpurile întregi, în care se descriu figurile întregi asemenea, sînt în același raport al rădăcinilor pătrate. Q.E.D.

PROPOZIȚIA LX. TEOREMA XXIII

Dacă două corpuri S și P , care se atrag reciproc cu forțe invers proporționale cu pătratul distanței lor, se învîrtesc în jurul centrului comun de greutate; zic că axa principală a elipsei pe care o descrie unul din cele două corpuri P în această mișcare în jurul celuilalt S , va fi către axa principală a elipsei, pe care același corp P ar putea-o descrie în jurul celuilalt în repaus S în același timp periodic, precum suma a două corpuri $S + P$ către cea dintîi dintre cele două medii proporționale între această sumă și celălalt corp S .

Căci dacă elipsele descrise sînt egale între ele, timpurile periodice (potrivit teoremei de mai sus) vor fi în raportul rădăcinii pătrate a corpului S către aceea a sumei corpurilor $S + P$. Să micșorăm în acest raport timpul periodic în elipsa din urmă, și timpurile periodice vor deveni egale; axa principală a elipsei însă (potrivit propoziției XV) se va micșora într-un raport care este puterea $\frac{3}{2}$ a celui precedent, adică într-un raport care este cubul raportului lui S către $S + P$; și deci va fi către axa principală a celeilalte elipse, ca prima dintre cele două medii proporționale între $S + P$ și S către $S + P$. Și

invers, axa principală a elipsei descrisă în jurul corpului mobil va fi către axa principală descrisă în jurul celui imobil precum $S + P$ către cea dintâi dintre cele două medii proporționale între $S + P$ și S . Q.E.D.

PROPOZIȚIA LXI. TEOREMA XXIV

Dacă două corpuri atrăgându-se reciproc cu forțe oarecare, și nefiind agitate sau împiedicate altfel, se mișcă într-un mod oarecare; mișcările lor vor fi aceleași ca și când nu s-ar atrage reciproc, ci ambele ar fi atrase cu aceleași forțe de un al treilea corp situat în centrul comun de greutate: Și legea forțelor de atracție va fi aceeași cu privire la distanțele corpurilor de la centrul comun de greutate și cu privire la distanța întreagă dintre corpuri.

Căci acele forțe, cu care corpurile se atrag reciproc, tinzând spre corpuri, tind spre centrul comun de greutate intermediar; și deci sînt aceleași, ca și când ar emana de la un corp intermediar. Q.E.D.

Și fiindcă este dat raportul distanței fiecărui corp de la centrul comun către distanța dintre corpuri, se va da raportul oricărei puteri a distanței unuia către aceeași putere a distanței celuilalt; precum și raportul unei cantități oarecare care derivă dintr-o distanță și cantitățile date într-un mod oarecare către o altă cantitate care derivă la fel din cealaltă distanță și tot atîtea cantități date și avînd acel raport dat al distanțelor către cele de mai înainte. Prin urmare dacă forța, cu care este atras un corp de către altul, este în același raport sau în raport invers cu distanța corpurilor între ele; sau ca o putere oarecare a acestei distanțe; sau în sfîrșit ca o cantitate derivată într-un mod oarecare din această distanță și din cantitățile date: atunci aceeași forță cu care același corp este atras spre centrul comun de greutate, va fi la fel în același raport sau în raport invers cu distanța corpului atras de la centrul comun, sau precum aceeași putere a acestei distanțe, sau în sfîrșit precum cantitatea derivată în mod analog din această distanță și cantitățile analoge date. Adică, legea forței de atracție va fi aceeași cu privire la ambele distanțe. Q.E.D.

PROPOZIȚIA LXII. PROBLEMA XXXVIII

Să se determine mișcările a două corpuri, care se atrag reciproc cu forțe invers proporționale cu pătratul distanței lor, și sînt lăsate libere din locuri date.

Corpurile (potrivit ultimei teoreme) se vor mișca la fel ca și când ar fi atrase de un al treilea corp așezat în centrul comun de greutate; și prin ipoteză acel centru va fi în repaus chiar la începutul mișcării și de aceea va fi (potrivit corolarului IV al legilor) totdeauna în repaus. Trebuie deci să determinăm mișcările corpurilor (potrivit problemei XXV) ca și când ar fi acționate de forțe tinzînd spre acel centru și se vor obține mișcările corpurilor care se atrag reciproc. Q.E.I.

PROPOZIȚIA LXIII. PROBLEMA XXXIX

Să se determine mișcările a două corpuri care se atrag reciproc cu forțe invers proporționale cu pătratul distanței lor și pornesc din locuri date, după drepte date, cu viteze date.

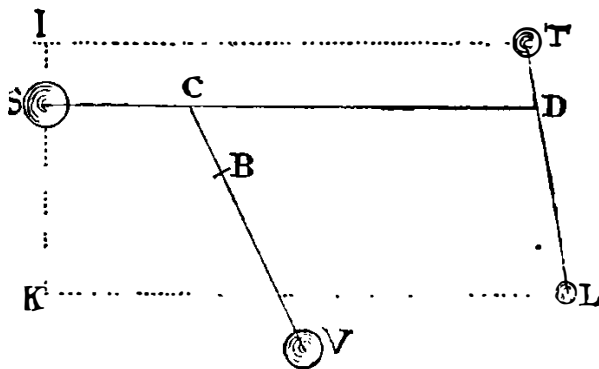
Fiind date mișcările corpurilor la început, se dă mișcarea uniformă a centrului comun de greutate, ca și mișcarea spațiului, care împreună cu acest centru se va mișca uniform în direcție precum și mișcările inițiale ale corpurilor față de acest spațiu. Mișcările următoare însă (potrivit corolarului V al legilor și ultimei teoreme) vor avea loc în acest spațiu, ca și când spațiul împreună cu centrul comun de greutate ar fi în repaus, și corpurile nu s-ar atrage reciproc, ci ar fi atrase de un al treilea corp situat în acel centru. Așadar mișcarea în acest spațiu mobil a unuia din cele două corpuri ce pornește dintr-un loc dat, după o dreaptă dată, cu o viteză dată, și acționat de o forță centripetă tinzând spre acel centru, trebuie determinată prin problema a noua și a douăzeci și șasea: și se va avea simultan mișcarea celui alt corp în jurul aceluiași centru. Cu această mișcare trebuie compusă mișcarea progresivă uniformă aflată mai sus a sistemului spațiului și corpurilor ce se învîrtesc în el, și se va avea mișcarea absolută a corpurilor în spațiul imobil. Q.E.I.

PROPOZIȚIA LXIV. PROBLEMA XL

Presupunînd că forțele cu care corpurile se atrag reciproc cresc în raportul simplu al distanțelor de la centru: se caută mișcările mai multor corpuri între ele.

Să considerăm mai întîi două corpuri T și L avînd centrul comun de greutate D . Acestea vor descrie (potrivit primului corolar al teoremei XXI) elipse avînd centrele în D , a căror mărime se cunoaște din problema V.

Căci să presupunem acum că un al treilea corp S atrage pe cele două dinainte T și L cu forțele acceleratoare ST , SL , și că la rîndul său este atras de ele. Forța ST (potrivit corolarului II al legilor) se descompune în forțele SD , DT ; și forța SL în forțele SD , DL . Dar forțele DT , DL , care sînt ca suma lor TL , și deci ca forțele acceleratoare cu care se atrag reciproc corpurile T și L , adunate la aceste forțe ale corpurilor T și L , cea dintîi la cea dintîi și cea din urmă la cea din urmă, compun forțe proporționale cu distanțele DT și DL , ca mai sus, dar mai mari ca forțele de mai sus și deci (potrivit corolarului I, propoziției X și corolarului I și 8, propoziției IV) fac ca acele corpuri să descrie elipse ca mai sus, dar cu o mișcare mai rapidă. Forțele acceleratoare rămase SD și SD , prin acțiunile motoare $SD \times T$ și $SD \times L$, care sînt precum corpurile atrăgînd acele corpuri în mod egal și după liniile TI , LK paralele cu DS , nu schimbă întru nimic situația



lor una către alta, ci fac ca ele să se apropie în mod egal de linia IK ; pe care trebuie să ne-o închipuim dusă prin mijlocul corpului S și perpendiculară pe linia DS . Dar această apropiere de linia IK va fi împiedicată făcând ca sistemul corpurilor T și L pe de o parte, și corpul S pe de alta, să se rotească cu viteze potrivite în jurul centrului comun de greutate C . Printr-o astfel de mișcare corpul S , deoarece suma forțelor motoare $SD \times T$ și $SD \times L$ proporționale cu distanța CS tinde spre centrul C , descrie o elipsă în jurul aceluiași C ; și punctul D , deoarece CS , CD sînt proporționale, va descrie o elipsă asemenea. Dar corpurile T și L atrase cu forțele motoare $SD \times T$ și $SD \times L$ cel dintîi de cea dintîi, cel din urmă de cea din urmă, în mod egal și după liniile paralele TI și LK , după cum s-a spus, continuă (potrivit corolarului V și VI al legilor) să descrie elipsele lor în jurul centrului mobil D ca mai înainte. Q.E.I.

Să adunăm acum corpul al patrulea V și printr-un raționament analog se va deduce că acesta și punctul C vor descrie elipse în jurul centrului comun de greutate B , menținînd mișcările corpurilor de mai sus T , L și S în jurul centrelor D și C , dar accelerate. Și prin aceeași metodă va fi permis să se adune mai multe corpuri. Q.E.I.

Acestea se comportă la fel și dacă corpurile T și L se atrag reciproc cu forțe acceleratoare mai mari sau mai mici decît cu care atrag corpurile rămase în raport cu distanțele.

Fie atracțiunile mutuale ale tuturor precum distanțele duse la corpurile atrăgătoare; din cele precedente se deduce ușor că toate corpurile descriu în timpuri periodice egale elipse diferite în jurul centrului comun de greutate B , într-un plan imobil. Q.E.D.

PROPOZIȚIA LXV. TEOREMA XXV

Mai multe corpuri ale căror forțe descresc ca pătratele distanțelor de la centrele lor, se pot mișca între ele pe elipse; și cu razele duse la focare pot descrie arii foarte aproape proporționale cu timpurile.

În propoziția de mai sus s-a demonstrat cazul cînd mai multe mișcări au loc exact pe elipse. Cu cît se abate mai mult legea forțelor de la legea presupusă acolo, cu atît vor perturba mai mult corpurile mișcările reciproce și nu se poate ca corpurile, atrăgîndu-se după legea presupusă aici, să se miște exact pe elipse, decît dacă păstrează o anumită proporție a distanțelor între ele. În cazurile următoare însă nu se vor abate mult dela elipse.

CAZUL 1. Să presupunem că mai multe corpuri mai mici se rotesc în jurul vreunui mai mare la distanțe diferite de la acela și spre fiecare tind forțe absolute proporționale cu acele corpuri. Și fiindcă centrul comun de greutate al tuturor (potrivit corolarului IV al legilor) sau este în repaus sau se mișcă uniform în direcție să ne închipuim că corpurile mai mici sînt atît de mici, încît corpul cel mai mare nu va fi niciodată la o distanță sensibilă de acest centru: și cel mare sau va fi în repaus sau se va mișca uniform în direcție, fără abatere sensibilă; iar cele mai mici se vor învîrți în jurul acestuia mare pe elipse, și cu razele duse la el vor descrie arii proporționale

cu timpurile; dacă nu cumva se introduc erori, fie prin îndepărtarea celui mai mare de la centrul comun de greutate, fie prin acțiunile corpurilor mai mici între ele. Dar corpurile mai mici pot fi micșorate pînă ce această eroare și acțiunile reciproce sînt mai mici decît oricare date; și deci pînă ce orbitele cadrează cu elipsele și ariile corespund timpurilor fără eroare care să nu fie mai mică decît una oarecare dată. Q.E.O.

CAZUL 2. Să ne închipuim acum un sistem de corpuri mai mici rotindu-se în felul deja descris în jurul unuia foarte mare sau un alt sistem oarecare de două corpuri rotindu-se unul în jurul altuia că progresează uniform în direcție, și în același timp este împins într-o parte prin forța altuia cu mult mai mare și situat la o mare distanță. Și fiindcă forțe acceleratoare egale prin care corpurile sînt acționate după linii paralele, nu schimbă situația corpurilor între ele, ci fac ca întreg sistemul să se transforme simultan, păstrînd mișcările părților între ele: este evident că, prin atracțiunile spre corpul cel mai mare nu se va mai naște nici o schimbare a mișcării corpurilor atrase între ele, decît sau prin neegalitatea atracțiilor acceleratoare sau prin înclinarea liniilor între ele după care se fac atracțiile. Să presupunem deci că toate atracțiunile acceleratoare spre corpul cel mai mare sînt între ele în raport invers cu pătratele distanțelor; și mărim distanța corpului celui mai mare, pînă ce diferențele dreptelor duse de la acesta la celelalte față de lungimile lor și înclinările lor reciproce sînt mai mici, decît oricare dată; mișcările părților sistemului între ele vor persevera fără erori care nu sînt mai mici decît oricare date. Și fiindcă din cauza distanței reciproce foarte mici a acelor părți, sistemul întreg este atras la fel ca un singur corp, el va fi mișcat prin această atracție ca un singur corp; adică centrul său de greutate va descrie în jurul corpului celui mare o secțiune conică oarecare (anume o iperbolă sau parabolă printr-o atracțiune slabă, elipsă în cazul uneia mai intense) și cu raza dusă la corpul cel mai mare va descrie arii proporționale cu timpul, fără erori, afară de acelea pe care sînt în stare să le producă distanțele părților, care fără îndoială sînt foarte mici și se pot micșora după voie. Q.E.O.

Printr-un raționament analog se poate proceda în cazuri mai complicate la infinit.

COROLARUL 1. În al doilea caz, cu cît se apropie mai mult corpul cel mai mare dintre toate de sisteme de două sau mai multe, cu atît mai mult vor fi perturbate mișcările părților sistemului între ele; fiindcă cu cît este mai mare înclinarea reciprocă a liniilor duse de la corpul cel mai mare la acestea, cu atît este mai mare inegalitatea proporției.

COROLARUL 2. Dar vor fi mai mult perturbate, presupunînd că atracțiile acceleratoare ale părților sistemului, spre corpul cel mai mare, nu sînt între ele în raport invers cu pătratele distanțelor de la corpul cel mai mare; mai ales dacă inegalitatea acestei proporții este mai mare ca inegalitatea proporției distanțelor de la corpul cel mai mare. Căci dacă forța acceleratoare, acționînd în mod egal și după linii paralele, nu perturbă de loc mișcările între ele, este necesar, ca din inegalitatea acțiunii să se nască o perturbație și să fie mai mare sau mai mică după cum inegalitatea este mai mare sau mai mică. Excesele impulsurilor mai mari, acționînd asupra unor corpuri și neacționînd asupra altora, își vor schimba în mod necesar poziția între ele. Și această perturbație adunată la perturbația, care se naște din înclinarea și neegalitatea liniilor, va face mai mare perturbația întreagă.

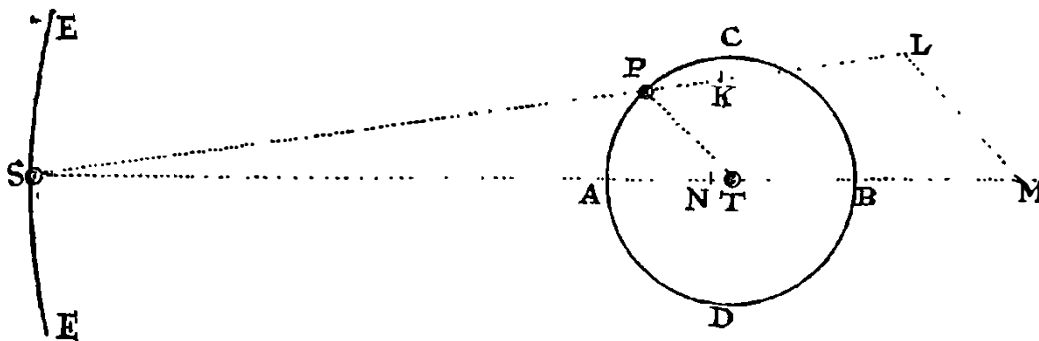
COROLARUL 3. De unde dacă părțile acestui sistem se mișcă pe elipse, sau pe cercuri fără perturbație importantă; este evident, că ele sau nu sînt acționate decît foarte puțin de către forțe acceleratoare, ce tind spre alte corpuri sau sînt acționate în mod aproape egal, și după linii paralele.

PROPOZIȚIA LXVI. TEOREMA XXVI

Dacă trei corpuri, ale căror forțe descresc în raport cu pătratul distanțelor, se atrag reciproc; și atracțiile acceleratoare a oricăror două dintre ele spre un al treilea sînt în raport invers cu pătratele distanțelor; iar cele mai mici se rotesc în jurul celui mai mare: zic că corpul interior va descrie în jurul celui mai dinlăuntru și celui mai mare, cu razele duse la el arii mai proporționale cu timpul și o figură mai apropiată de forma elipsei avînd focarul la întîlnirea razelor, dacă corpul cel mai mare va fi agitat de aceste atracții, decît dacă corpul cel mai mare sau nefiind atras de cele mai mici este în repaus, sau atras fiind cu mult mai puțin sau cu mult mai mult, va fi agitat cu mult mai puțin sau cu mult mai mult.

Aceasta este aproape evident din demonstrația corolarului al doilea al propoziției precedente; dar se poate arăta printr-un raționament cu mult mai distinct și mai convingător astfel.

CAZUL 1. Să presupunem că în același plan în jurul corpului mai mare T se rotesc corpurile mai mici P și S , dintre care P descrie orbita interioară PAB și S cea exterioară ESE . Fie SK distanța medie a corpurilor P și S ; și atracția acceleratoare a corpului P spre S , la distanța medie să se exprime prin aceeași. Să luăm SL către SK precum pătratul lui SK către SP și SL va fi atracția acceleratoare a corpului P spre S la o distanță oarecare SP . Să unim PT și să ducem LM paralelă cu ea întîlnind pe ST în



M ; și să descompunem atracțiunea SL (potrivit corolarului II al legilor) în atracțiunile SM , LM . Și astfel corpul P va fi acționat de o forță acceleratoare triplă. Una din forțe tinde către T , și se naște din atracțiunea mutuală a corpurilor T și P . Sub influența numai a acestei forțe corpul P ar trebui să descrie în jurul corpului T , fie nemișcat, fie agitat de această atracție, cu raza PT și arii proporționale cu timpurile și o elipsă al cărei centru este în centrul corpului T . Aceasta este evident din propoziția XI și corolarele 2 și 3, teorema XXI. Cealaltă forță este cea de atracție LM , care fiindcă

este îndreptată de la P spre T suprapusă la forța cea dintâi va coincide cu ea și astfel va face ca să se descrie și acum arii proporționale cu timpurile potrivit corolarului 3 teorema XXI. Dar fiindcă nu este invers proporțională cu pătratul distanței PT , ea va alcătui cu forța precedentă o forță ce deviază de la această proporție, și anume cu atât mai mult, cu cât proporția acestei forțe către forța precedentă este mai mare, celelalte mărimi fiind identice. Prin urmare cum (potrivit propoziției XI și corolarului 2, teorema XXI) forța, cu care se descrie elipsa în jurul focarului T , ar trebui să tindă spre acel focar, și să fie invers proporțională cu pătratul distanței PT ; acea forță compusă, deviind de la această proporție, va face ca orbita PAB să devieze de la forma unei elipse avînd focarul în T ; și anume cu atât mai mult, cu cât este mai mare deviația de la această proporție; și de aceea cu cât este mai mare proporția forței a doua LM către forța dintâi, celelalte mărimi fiind egale. Dar acum forța a treia SM , atrăgînd corpul P într-o direcție paralelă cu ST , va compune cu forțele dintâi o forță, care nu mai este dirijată de la P spre T ; și care se abate cu atât mai mult de la această determinare cu cât este mai mare proporția acestei a treia forțe către primele forțe, celelalte mărimi fiind egale: și de aceea care va face ca corpul P cu raza TP , să nu mai descrie arii proporționale cu timpurile, și ca deviația de la această proporționalitate să fie cu atât mai mare, cu cât este mai mare proporția forței a treia către celelalte forțe. Această a treia forță însă va mări aberația orbitei PAB de la forma eliptică menționată dintr-un motiv dublu, atât fiindcă nu este dirijată de la P la T , cât și fiindcă nu este invers proporțională cu pătratul distanței PT . Ceea ce fiind înțeles, este evident, că ariile atunci sînt mai proporționale cu timpurile, cînd forța a treia, menținînd forțele celelalte, este minimă și că orbita PAB atunci se apropie mai mult de forma eliptică menționată, cînd atât forța a doua cât și a treia, dar îndeosebi forța a treia este minimă, prima forță fiind menținută.

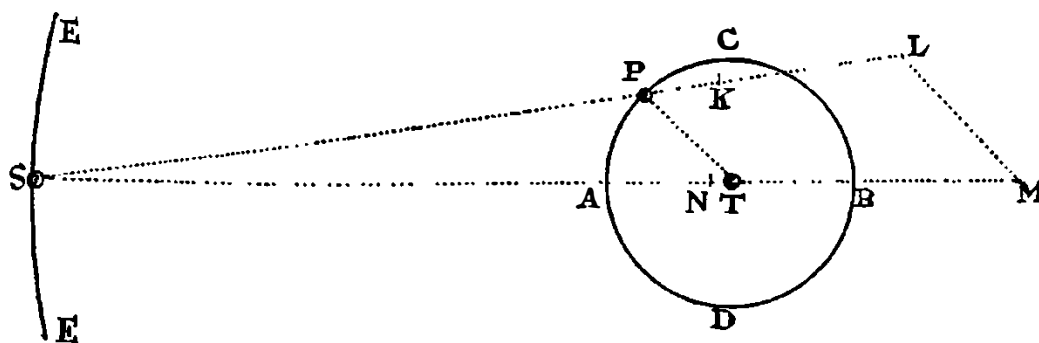
Să exprimăm atracția acceleratoare a corpului T spre S prin linia SN ; și dacă atracțiunile acceleratoare SM , SN sînt egale; acestea atrăgînd corpurile T și P în mod egal și după linii paralele, nu vor schimba situația lor reciprocă. Căci mișcările corpurilor între ele vor fi aceleași (potrivit corolarului VI al legilor) ca și cînd aceste atracțiuni ar fi înlăturate. Și printr-un raționament analog dacă atracția SN este mai mică decît atracțiunea SM , ea va suprima partea SN a atracțiunii SM , și va rămîne numai partea MN , prin care s-ar perturba proporționalitatea timpurilor și ariilor și forma eliptică a orbitei. Și la fel dacă atracția SN este mai mare ca atracțiunea SM , se va naște din diferența singură MN perturbația proporționalității și a orbitei. Astfel prin atracția SN se reduce totdeauna atracția a treia de mai sus SM la atracția MN , atracțiunea întîi și a doua rămînînd complet neschimbate: și de aceea ariile și timpurile se apropie de proporționalitate, și orbita PAB de forma eliptică menționată cu atât mai mult, cu cât atracția MN este sau nulă sau cît se poate de mică; adică, cînd atracțiunile acceleratoare ale corpurilor P și T , spre corpul S se apropie cît se poate de egalitate; adică cînd atracția SN nu este nulă, nici mai mică decît cea mai mică dintre toate atracțiile SM , ci aproape media între cea mai mare și cea mai mică dintre toate atracțiunile SM , adică nu este cu mult mai mare nici cu mult mai mică decît atracția SK . Q.E.D.

CAZUL 2. Căci să presupunem că corpurile mai mici P , S se rotesc în jurul celui mai mare T în plane diferite și forța LM , acționînd după linia

tății. Căci dacă orbita corpului P este excentrică, excentricitatea ei (după cum se va arăta îndată în corolarul 9 al acesteia) va deveni maximă când apsidele sînt în syzigii; și deci se poate întîmpla ca corpul P , apropiindu-se de apsidea cea mai depărtată, se îndepărtează mai mult de corpul T în syzigii decît în cvadraturi.

COROLARUL 6. Deoarece forța centripetă a corpului central T , cu care corpul P este reținut pe orbita sa, este mărită în cvadraturi prin adunarea forței LM , și micșorată în syzigii prin scăderea forței KL , și din cauza mărimii forței KL , este mai mult micșorată decît mărită; iar forța centripetă (potrivit corolarului 2 propoziția IV) este proporțională cu raza TP și invers proporțională cu pătratul timpului periodic: este evident că acest raport compus se micșorează prin acțiunea forței KL ; și deci timpul periodic, dacă raza TP a orbitei ar rămîne aceeași, s-ar mări și anume ca rădăcina pătrată a raportului în care se micșorează forța centripetă: și deci această rază mărimdu-se sau micșorîndu-se, timpul periodic va crește mai mult sau se va micșora mai puțin decît în puterea $\frac{3}{2}$ a razei (potrivit corolarului 6, propoziția IV). Dacă forța corpului central ar scădea încetul cu încetul corpul P totdeauna mai mic și mai puțin atras încontinuu se va îndepărta mai mult de centrul T , și invers, dacă forța ar crește, s-ar apropia mai mult. Așadar dacă acțiunea corpului foarte îndepărtat S , prin care acea forță se micșorează se va mări și micșora alternativ: raza PT de asemenea se va mări și se va micșora alternativ; și timpul periodic se va mări și micșora într-un raport compus din puterea $\frac{3}{2}$ a razei și rădăcina pătrată a raportului în care forța centripetă a corpului central T crește sau descrește prin creșterea sau descreșterea acțiunii corpului foarte îndepărtat S .

COROLARUL 7. Din cele de mai sus mai urmează, că axa elipsei descrisă de corpul P , sau linia apsidelor, în ce privește mișcarea unghiulară progresează și regresează alternativ, dar totuși mai mult progresează, și prin excesul progresului este dusă înainte. Căci forța cu care corpul P este împins spre



corpul T în cvadraturi, unde forța MN dispare, se compune din forța LM și din forța centripetă cu care corpul T atrage corpul P . Prima forță LM dacă distanța PT crește, se mărește aproape în același raport cu această distanță, și forța din urmă descrește în raport cu pătratul ei, și deci suma acestor forțe descrește mai puțin decît în raportul pătratului distanței PT , și de aceea (potrivit corolarului 1, propoziția XLV) face ca afeliul sau apsidea cea mai de sus să meargă înapoi. Dar în conjuncție și opoziție, forța

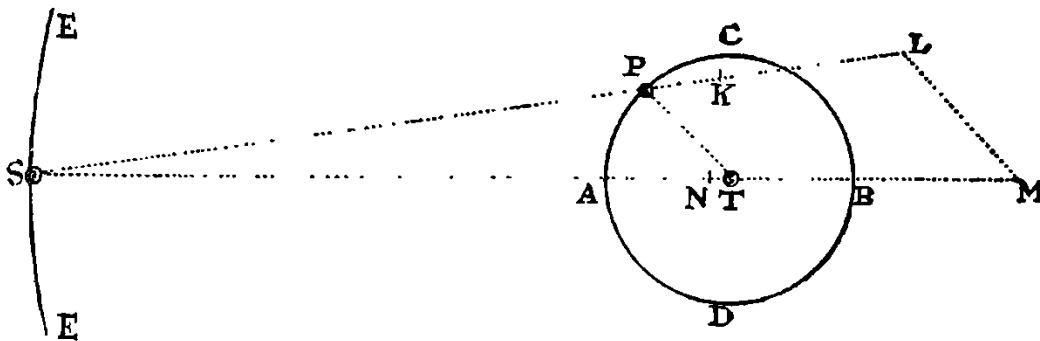
cu care corpul P este împins spre corpul T este diferența între forța cu care corpul T atrage corpul P , și forța KL ; și acea diferență, deoarece forța KL crește aproximativ în raportul distanței PT descrește într-un raport mai mare decât pătratul distanței PT și deci (potrivit corolarului 1, propoziția XLV) face ca afeliul să progreseze. În locurile dintre syzigii și cvadraturi, mișcarea afeliului depinde de ambele cauze luate împreună, astfel că din cauza excesului uneia sau alteia el progresa sau regresează. De unde cum forța KL în syzigii este aproape de două ori mai mare ca forța LM în cvadraturi, excesul va fi de partea forței KL , și va duce afeliul înainte. Adevărul corolarului acestuia și al celui precedent se va înțelege mai ușor concepînd sistemul celor două corpuri înconjurat din toate părțile de mai multe corpuri S, S, S etc. situate pe orbita ESE . Căci prin acțiunile acestora acțiunea lui P se va micșora în toate părțile, și va descrește după un raport mai mare decât pătratul distanțelor.

COROLARUL 8. Dar fiindcă mișcarea progresivă sau retrogradă a apsidelor depinde de descreșterea forței centripete într-un raport mai mare sau mai mic decât pătratul raportului distanței TP , în trecerea corpului de la apsidă cea mai de jos la apsidă cea mai de sus; precum și de creșterea analogă în întoarcerea la apsidă cea mai de jos; și de aceea este mai mare cînd raportul forței în apsidă cea mai de sus către forța în apsidă cea mai de jos se îndepărtează mai mult de inversul pătratului raportului distanțelor: este evident că apsidele în syzigiile lor, din cauza forței scăzute KL sau $NM-LM$, vor progresa mai repede, și în cvadraturile lor vor retrograda mai încet din cauza forței aditive LM . Dar din cauza lungimii timpului în care se continuă viteza progresării sau încetinirea regresării, această inegalitate devine foarte mare.

COROLARUL 9. Dacă un corp oarecare, sub influența unei forțe invers proporționale cu pătratul distanței sale de la centru, se va roti în jurul acestui centru pe o elipsă; și apoi, în coborîrea de la apsidă cea mai de sus sau de la afeliu la apsidă cea mai de jos, acea forță prin adunarea continuă a unei forțe noi va crește într-un raport mai mare decât al pătratului distanței micșorate: este evident că corpul, împins prin creșterea acelei forțe noi totdeauna spre centru, se va apropia de acesta mai mult decât dacă ar fi acționat de o singură forță crescînd în raportul pătratului distanței micșorate; și deci va descrie o orbită interioară orbitei eliptice, și în apsidă cea mai de jos se va apropia de centru mai mult ca mai înainte. Prin urmare orbita, prin creșterea acestei forțe noi, va deveni mai excentrică. Dacă acum forța, la întoarcerea corpului de la apsidă cea mai de jos la apsidă cea mai de sus, ar descrește cu aceleași grade cu care crescuse mai înainte, corpul se va întoarce la distanța dintîi, și deci dacă forța descrește într-un raport mai mare, corpul acum mai puțin atras se va ridica la o distanță mai mare și astfel excentricitatea orbitei se va mări și mai mult. De aceea dacă raportul creșterii și descreșterii forței centripete se mărește prin diversele revoluții, excentricitatea va crește totdeauna; și invers ea va scădea dacă raportul descrește. Acum în adevăr în sistemul corpurilor TPS , cînd apsidele orbitei PAB sînt în cvadraturi, raportul creșterii și descreșterii este minim, și este maxim cînd apsidele sînt în syzigii. Dacă apsidele se află în cvadraturi, raportul în apropierea apsidelor este mai mic și în apropierea syzigiilor este mai mare decât pătratul raportului distanțelor și din acel raport mai mare se

naște mișcarea directă a afeliului, după cum s-a spus deja. Dar dacă se consideră raportul întregii creșteri sau descreșteri în progresul dintre apside, acesta este mai mic decât pătratul raportului distanțelor. Forța în apsidea cea mai de jos este către forța în apsidea cea mai de sus într-un raport mai mic decât pătratul raportului distanței apsidei celei mai de sus de la focarul elipsei către distanța apsidei celei mai de jos de la același focar: și invers, când apsidele se află în syzigii, forța în apsidea cea mai de jos este către forța în apsidea cea mai de sus într-un raport mai mare decât pătratul raportului distanțelor. Căci forțele LM în cvadraturi adunate la forțele corpului T compun forțe într-un raport mai mic, și forțele KL în syzigii scăzute din forțele corpului T rămân forțe într-un raport mai mare. Prin urmare raportul întregii descreșteri și creșteri în trecerea dintre apside, este minim în cvadraturi, maxim în syzigii: și de aceea în trecerea apsidelor de la cvadraturi la syzigii crește încontinuu și mărește excentricitatea elipsei; și în trecerea de la syzigii la cvadraturi descrește încontinuu, și micșorează excentricitatea.

COROLARUL 10. Pentru a expune cauza erorilor în latitudine să ne închipuim că planul orbitei EST rămâne imobil; și din cauza expusă a erorilor este evident, că din forțele NM , ML , care sînt singura și întreaga cauză, forța ML lucrînd totdeauna după planul orbitei PAB , niciodată nu perturbă mișcarea în latitudine; și că forța NM , cînd nodurile sînt în syzigii, acționînd de asemenea în același plan al orbitei, nu perturbă aceste mișcări; cînd însă sînt în cvadraturi, le perturbă foarte mult și atrăgînd încontinuu corpul P din planul orbitei sale micșorează înclinarea planului în trecerea corpului de la cvadraturi la syzigii, și la rîndul său o mărește în trecerea de la syzigii la cvadraturi. De unde urmează că dacă corpul se află în syzigii înclinarea devine cea mai mică dintre toate, și revine aproape la



mărimea întâi cînd corpul se apropie de nodul proxim. Dar dacă nodurile sînt situate în octanții de după cvadraturi, adică, între C și A , D și B , din felul celor expuse se va înțelege, că, în trecerea corpului P de la unul din cele două noduri la gradul al 90-lea, înclinarea planului se micșorează încontinuu; apoi în trecerea prin proximale 45 grade, pînă la cvadratura proximă, înclinarea crește și apoi din nou în trecerea prin alte 45 grade, pînă la nodul proxim, scade. Așadar înclinarea se micșorează mai mult decât crește și de aceea este totdeauna mai mică în nodul următor decât în cel precedent. Și printr-un raționament asemănător, înclinarea se mărește mai mult decât se micșorează, cînd nodurile sînt în ceilalți octanți între A și D , B și C . Prin urmare înclinarea este cea mai mare dintre toate cînd nodurile sînt în syzigii. În trecerea lor de la syzigii la cvadraturi, se micșo-

rează la apropierea diverselor corpuri de noduri; și sînt cele mai mici dintre toate cînd nodurile sînt în cvadraturi și corpul în syzigii: apoi crește cu aceleași grade, cu care descreștea mai înainte; și cînd nodurile ating syzigiile proxime, revine la prima mărime.

COROLARUL 11. Deoarece corpul P , cînd nodurile sînt în cvadraturi, încontinuu este atras din planul orbitei sale, și anume în partea spre S în trecerea sa de la nodul C prin conjuncția A spre nodul D ; și în partea contrară în trecerea de la nodul D prin opoziția B spre nodul C : este evident, că în mișcarea sa de la nodul C corpul se depărtează încontinuu de la primul plan CD al orbitei sale pînă ce a ajuns la nodul proxim; și deci în acest nod, foarte îndepărtat de primul plan CD , trece prin planul orbitei EST nu în celălalt nod D al acelui plan, ci într-un punct ce tinde spre părțile corpului S , și care deci devine un nou loc al nodului tinzînd spre pozițiile anterioare. Și printr-un raționament analog nodurile tind să se îndepărteze în trecerea corpului din acest nod la nodul proxim. Prin urmare nodurile situate în cvadraturi se îndepărtează încontinuu; în syzigii, unde mișcarea nu este de loc perturbată în latitudine, — sînt în repaus; în locurile intermediare, participînd la ambele condițiuni, se îndepărtează mai încet: și astfel, fiind totdeauna fie retrograde fie staționare în diversele revoluții sînt duse înapoi.

COROLARUL 12. Toate erorile descrise în aceste corolare sînt cu ceva mai mari în conjuncția corpurilor P , S , decît în opoziția lor; și anume din cauză că forțele generatoare NM și ML sînt mai mari.

COROLARUL 13. Și cum împrejurările acestor corolare nu depinde de mărimea corpului S , cele de mai sus sînt valabile, cînd corpul S este atît de mare, încît sistemul celor două corpuri T și P se învîrtește în jurul lui. Și din creșterea corpului S , și deci din creșterea forței sale centripete, din care iau naștere erorile corpului P , toate erorile devin la distanțe egale mai mari în acest caz decît în altul, cînd corpul S se rotește în jurul sistemului corpurilor P și T .

COROLARUL 14. Cum însă forțele NM , ML , cînd corpul S este foarte îndepărtat, sînt aproximativ ca forța SK și raportul PT către ST luate împreună, adică, dacă se dă atît distanța PT , cît și forța absolută a corpului S , în raport invers cu ST^3 ; dar forțele NM , ML sînt cauzele erorilor și a tuturor efectelor, despre care s-a tratat în corolarele precedente: este evident, că toate efectele dacă se menține sistemul corpurilor T și P , și se schimbă numai distanța ST și forța absolută a corpului S , sînt aproape într-un raport compus din raportul direct al forței absolute a corpului S , și din raportul invers al cubului distanței ST . De unde dacă sistemul corpurilor T și P se rotește în jurul corpului foarte îndepărtat S ; forțele NM , ML , — și efectele lor vor fi (potrivit corolarului 2 și 6 al propoziției IV) în raport invers cu pătratul timpului periodic. Și de aici iarăși, dacă mărimea corpului S este proporțională cu forța lui absolută, forțele NM , ML și efectele lor vor fi precum cubul diametrului aparent al corpului foarte îndepărtat S privit din corpul T , și invers. Căci aceste rapoarte sînt aceleași, ca raportul compus de mai sus.

COROLARUL 15. Și fiindcă dacă, menținînd forma, proporțiile și inclinația reciprocă a orbitelor ESE și PAB , se va schimba mărimea lor și dacă forțele corpurilor S și T sau se mențin, sau se schimbă într-un raport oare-

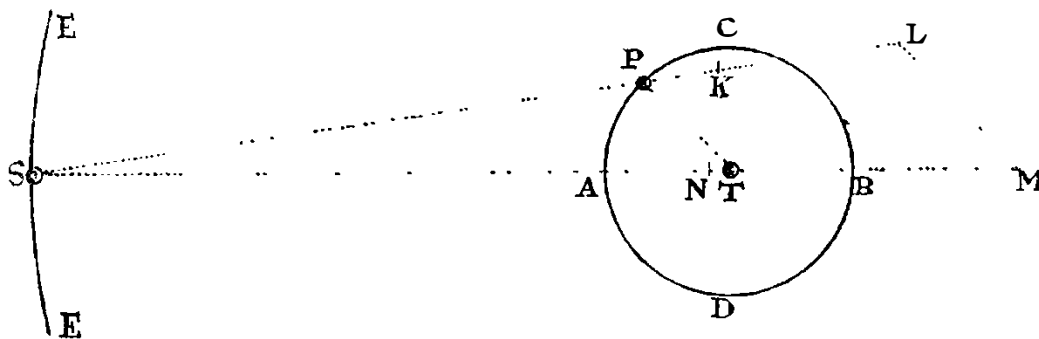
tate, forța medie LM către forța cu care corpul P este reținut pe orbita sa în jurul lui T (cu care același corp P , se poate roti în același timp periodic în jurul unui punct imobil oarecare T la distanța PT) este în același raport al pătratelor timpurilor periodice. Fiind deci date timpurile periodice împreună cu distanța PT , se dă forța mijlocie LM ; și aceasta fiind dată, se dă cu bună aproximație și forța MN prin analogia liniilor PT , MN .

COROLARUL 18. După aceleași legi, prin care corpul P se rotește în jurul corpului T , să ne închipuim că mai multe corpuri fluide se rotesc în jurul aceluiași T la distanțe egale de el; apoi acestea apropiindu-se pînă la atingere formează un inel fluid rotund și concentric cu corpul T ; și diversele părți ale inelului, efectuînd toate mișcările lor după legea corpului P , se apropie mai mult de corpul T și se vor mișca mai repede în conjuncția și în opoziția lor și a corpului S , decît în cvadraturi. Și nodurile acestui inel, sau intersecțiile lui cu planul orbitei corpului S sau T , vor fi în repaus în syzigii; în afară de syzigii însă se vor mișca retrograd și anume mai repede în cvadraturi, mai încet în celelalte locuri. Înclinarea inelului de asemenea va varia, și axa lui va oscila în diversele revoluții și după o revoluție completă va reveni la poziția de mai înainte dacă nu cumva este dusă împrejur prin precesiunea nodurilor.

COROLARUL 19. Să ne închipuim acum sfera corpului T , constînd dintr-o materie nefluidă, că se mărește și se extinde pînă la acest inel, și că un canal tăiat în circuit conține apă, și se mișcă în mod uniform cu aceeași mișcare periodică în jurul axei sale. Acest lichid alternativ accelerat și întîrziat (ca în corolarul de mai sus) în syzigii va fi mai repede, în cvadraturi mai încet ca suprafața sferei, și astfel va curge în canal și se va retrage la fel ca marea. Apa rotindu-se în jurul centrului în repaus al sferei, dacă se înlătură atracțiunea corpului S , nu va cîștiga nici o mișcare de flux și reflux. La fel este cazul sferei ce progresează uniform în direcție, și în același timp se învîrtește în jurul centrului său (potrivit corolarului V al legilor) ca și al sferei atrase în mod uniform din cursul rectiliniu (potrivit corolarului VI al legilor). Dar dacă corpul S se apropie din atracția inegală a lui apa va fi imediat perturbată. Căci va fi mai mare atracțiunea apei mai apropiate, mai mică a celei mai îndepărtate. Dar forța LM va atrage apa în jos în cvadraturi, și va face ca ea să descindă pînă la syzigii; și forța KL o va atrage în sus în syzigii, și va opri coborîrea ei, și va face ca ea să se urce pînă la cvadraturi: afară doar dacă mișcarea de flux și reflux nu va fi dirijată de canal și întrucîtva întîrziată prin frecare.

COROLARUL 20. Dacă acum inelul devine rigid, și sfera se micșorează mișcarea de flux și reflux va înceta; dar mișcarea aceea oscilatorie de înclinație și precesiunea nodurilor vor rămîne. Să presupunem că sfera are aceeași axă cu inelul, și efectuează rotațiile în aceleași timpuri, și cu suprafața ei îl atinge în interior, și se lipește de el; și participînd la mișcarea lui, ansamblul va oscila, și nodurile vor regresa. Căci sfera, după cum se va arăta îndată, este indiferentă la primirea tuturor impresiilor. Unghiul de înclinare al inelului lipsit de sferă este maxim, cînd nodurile sînt în syzigii. De aici în progresul nodurilor la cvadraturi el tinde să-și micșoreze înclinarea și prin această tendință imprimă o mișcare sferei întregi. Sfera reține mișcarea imprimată, pînă ce inelul printr-o tendință contrară nimicește această mișcare și imprimă o mișcare nouă în sens contrar. Și din această cauză miș-

careea maximă a înclinării descrescătoare are loc în cvadraturile nodurilor, și unghiul cel mai mic de înclinare în octanții de după cvadraturi; apoi mișcarea maximă de declinație în syzigii și unghiul maxim în octanții următori.



Aceeași relație este și în cazul sferei lipsite de inel, care în regiunile ecuatorului sau este cu ceva mai înaltă decât lângă poli, sau constă dintr-o materie cu ceva mai densă. Căci acest exces de materie în regiunile ecuatoriale ține locul inelului. Și cu toate că, măbind într-un mod oarecare forța centripetă a acestei sfere, presupunem că toate părțile ei tind în jos, la fel cu părțile corpurilor grele ale pământului, totuși fenomenele acestui corolar și ale celui precedent abia se vor schimba; afară doar dacă locurile înălțimilor maxime și minime ale apei vor fi diverse. Căci apa acum nu mai este susținută și nu rămîne în orbita sa prin forța sa centrifugă, ci prin canalul în care curge. Și afară de aceea forța LM atrage apa în jos mai mult în cvadraturi, și forța KL sau $NM - LM$ o atrage în sus mai mult în syzigii. Și aceste forțe împreunate încetează să atragă apa în jos și încep să o atragă în sus în octanții dinaintea syzigiilor și încetează să o atragă în sus și încep să o atragă în jos în octanții dinapoia syzigiilor. Și de aici înălțimea apei poate ajunge maximă în octanții dinapoia syzigiilor, și minimă aproximativ în octanții dinapoia cvadraturilor; dacă nu cumva mișcarea de urcare sau de coborîre imprimată de aceste forțe sau perseverează prin forța de inerție a materiei ceva mai mult, sau este oprită prin piedicele canalului ceva mai devreme.

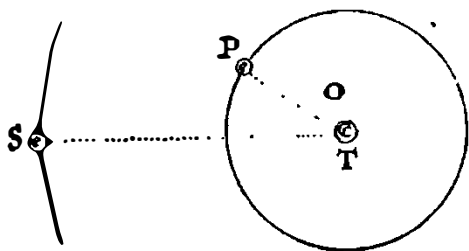
COROLARUL 21. Din aceeași cauză, din care materia sferei abundînd lângă ecuator face ca nodurile să regreseze, și deci prin creșterea ei se mărește acest regres iar prin micșorare se micșorează și prin îndepărtare se nimicește; dacă materia mai mult decît abundentă este îndepărtată, adică, dacă sfera lângă ecuator devine sau mai comprimată sau mai rară decît lângă poli, se va naște o mișcare a nodurilor în același sens.

COROLARUL 22. Și de aici la rîndul său, din mișcarea nodurilor se cunoaște constituția sferei. Anume dacă sfera păstrează în mod constant aceeași poli, și mișcarea este retrogradă, materia abundă lângă ecuator; dacă este progresivă, este în lipsă. Să presupunem că o sferă uniformă și perfect rotunjită în spații libere mai întîi este în repaus apoi este împinsă înainte printr-un impuls oblic asupra suprafeței sale, și deci primește o mișcare parte circulară, parte rectilinie. Deoarece această sferă se comportă indiferent față de toate axele ce trec prin centrul ei, și nici nu este mai înclinată către vreo axă, sau către o poziție a axei, decît către vreo alta; este evident, că ea niciodată nu-și va schimba axa și înclinarea axei prin

forța proprie. Căci fie împinsă sfera în mod oblic, în aceeași parte a suprafeței, ca mai sus, printr-un impuls oarecare nou; și cum un impuls mai repede sau mai încet nu schimbă efectul, este evident că aceste două impulsuri imprimate succesiv produc aceeași mișcare, ca și când ar fi fost imprimate simultan, adică, aceeași ca și când sfera ar fi fost împinsă cu o forță simplă compusă (potrivit corolarului II al legilor) din amîndouă, și deci simplă în jurul unei axe de înclinație dată. Și la fel este cazul impulsului al doilea făcut într-un alt loc oarecare în ecuatorul primei mișcări; precum și al primului impuls făcut într-un loc oarecare în ecuatorul mișcării, pe care ar genera-o al doilea impuls fără cel dintîi; și deci al ambelor impulsuri făcute în locuri oarecare: acestea vor naște aceeași mișcare circulară ca și când ar fi fost imprimate împreună și o dată în locul de intersecție al ecuatorilor acelor mișcări pe care le-ar naște separat. Prin urmare o sferă omogenă și perfectă nu reține mai multe mișcări deosebite, ci toate cele imprimate le compune și le reduce la una, și întrucît depinde de ea, se învîrte într-una cu o mișcare simplă și uniformă în jurul unei axe unice, dată cu o înclinare totdeauna invariabilă. Dar nici forța centripetă nu poate schimba înclinarea axei sau vitezei de rotație. Dacă ne închipuim sfera tăiată în două emisfere cu un plan oarecare ce trece prin centrul său și centrul spre care este îndreptată forța; acea forță va acționa totdeauna fiecare emisferă în mod egal, și de aceea sfera, în ce privește mișcarea de rotație nu se va înclina în nici o parte. Dacă presupunem că se adună undeva între pol și ecuator o materie nouă acumulată sub forma unui munte, aceasta printr-o tendință perpetuă de îndepărtare de la centrul mișcării sale va perturba mișcarea sferei și va face ca polii ei să rătăcească pe suprafața ei, și să descrie continuu cercuri în jurul său și al punctului opus lui. Și nici nu se poate corecta această enormitate de rătăcire decît așezînd acel munte sau într-unul din poli, în care caz (potrivit corolarului 21) nodurile ecuatorului vor înainta; sau în ecuator, în care caz (potrivit corolarului 20) nodurile vor regresa; sau în sfîrșit adunînd din celaltă parte a axei materie nouă, prin care muntele va oscila în mișcarea sa și în acest caz nodurile sau vor progresa, sau vor regresa, după cum muntele și această materie nouă sînt mai aproape de pol sau de ecuator.

PROPOZIȚIA LXVII. TEOREMA XXVII

Admițînd aceleași legi ale atracțiilor, zic că corpul exterior S , descrie în jurul centrului comun de greutate O al celor interioare P , T , cu razele duse la acel centru, arii mai proporționale cu timpurile și o orbită mai apropiată de forma unei elipse avînd focarul în același centru, decît pe care o poate descrie în jurul corpului mai interior și mai mare T , cu razele duse la el.



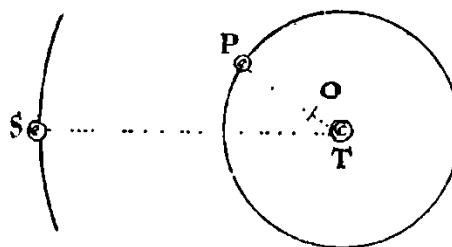
Căci atracțiunile corpului S spre T și P compun atracțiunea lui absolută, care este îndreptată mai mult spre centrul comun de greutate O al corpurilor T

și P decît spre corpul maxim T , și care este mai aproape de raportul invers al pătratului distanței SO , decît al pătratului distanței ST : după cum ușor va constata cine aprofundează chestiunea.

PROPOZIȚIA LXVIII. TEOREMA XXVIII

Admițînd aceleași legi ale atracțiilor, zic că corpul exterior S , descrie în jurul centrului comun de greutate O al celor interioare P și T , cu razele duse la acel centru, arii mai proporționale cu timpurile, și o orbită mai apropiată de forma unei elipse avînd focarul în același centru, dacă corpul interior și mai mare este agitat prin aceste atracții ca și celelalte, decît dacă nefiind atras este în repaus, sau fiind atras cu mult mai mult sau cu mult mai puțin sau este agitat cu mult mai mult sau cu mult mai puțin.

Se demonstrează aproape în același fel ca propoziția LXVI dar printr-un raționament mai prolix pe care de aceea îl las la o parte. Fie de ajuns a considera lucrul astfel. Din demonstrația propoziției precedente este evident că centrul, spre care este împins corpul S prin forțele împreunate, este foarte apropiat de centrul comun de greutate al celor două. Dacă acest centru ar coincide cu centrul comun, și centrul comun de greutate al celor trei corpuri ar fi în repaus; pe de o parte corpul S , și de altă parte centrul comun al celorlalte două ar descrie elipse precise în jurul centrului comun al tuturor ce este în repaus. Este evident aceasta din corolarul 2 al propoziției LVIII combinat cu cele demonstrate în propoziția LXIV și LXV. Această mișcare eliptică se perturbă întrucîtva prin distanța centrului celor două de la centrul spre care este atras al treilea S . Afară de aceasta fie dată o mișcare a centrului comun al celor trei, și perturbația va crește. Prin urmare perturbația este minimă, cînd centrul comun al celor trei este în repaus; adică, cînd corpul interior și mai mare T este atras prin legea celorlalte: și devine totdeauna mai mare cînd centrul comun al celor trei micșorînd mișcarea corpului T , începe să se miște, și apoi este agitat din ce în ce mai mult.



COROLAR. Și de aici, dacă mai multe corpuri mai mici se învîrtesc în jurul unuia mai mare, se poate deduce că orbitele descrise se apropie mai mult de elipse, și descrierile ariilor devin mai egale, dacă toate corpurile se atrag și se agită cu forțe acceleratoare care sînt precum forțele lor absolute și în raport invers cu pătratele distanțelor, și focarul unei orbite oarecare este așezat în centrul comun de greutate al tuturor corpurilor interioare (anume focarul orbitei prime și interioare în centrul de greutate al corpului celui mare și interior; cel al orbitei a doua, în centrul comun de greutate al celor două corpuri interioare; al celei de-a treia, în centrul comun de greutate al celor trei interioare; și așa mai departe) ca și cînd corpul interior ar fi în repaus și s-ar lua ca focar comun al tuturor orbitelor.

PROPOZIȚIA LXIX. TEOREMA XXIX

Într-un sistem de mai multe corpuri A, B, C, D etc., dacă un corp oarecare A atrage pe toate celelalte B, C, D etc. cu forțe acceleratoare care sînt în raport invers cu pătratele distanțelor de la cel atrăgător; și un alt corp B atrage de asemenea pe celelalte A, C, D etc. cu forțe care sînt în raport invers cu pătratele distanțelor de la cel atrăgător: forțele absolute ale corpurilor atrăgătoare A, B , vor fi între ele precum sînt înseși corpurile A, B cărora aparțin forțele.

Căci atracțiunile acceleratoare ale tuturor corpurilor B, C, D spre A la distanțe egale, sînt prin ipoteză egale între ele; și la fel atracțiunile acceleratoare ale tuturor corpurilor spre B , la distanțe egale, sînt egale între ele. Dar forța atractivă absolută a corpului A este către forța atractivă absolută a corpului B , precum atracțiunea acceleratoare a tuturor corpurilor spre A către atracțiunea acceleratoare a tuturor corpurilor spre B , la distanțe egale; și așa este atracțiunea acceleratoare a corpului B spre A , către atracțiunea acceleratoare a corpului A spre B . Dar atracțiunea acceleratoare a corpului B spre A este către atracțiunea acceleratoare a corpului B , precum masa corpului A către masa corpului B ; fiindcă forțele motoare, care (potrivit definiției a doua, a șaptea și a opta) sînt ca forțele acceleratoare și corpurile atrase împreună sînt aici (potrivit legii III a mișcării) egale între ele. Așadar forța absolută atractivă a corpului A este către forța absolută atractivă a corpului B , precum masa corpului A către masa corpului B . Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă diversele corpuri ale unui sistem A, B, C, D etc. considerate separat atrag pe toate celelalte cu forțe acceleratoare care sînt în raport invers cu pătratele distanțelor de la cel atrăgător; forțele absolute ale tuturor acelor corpuri vor fi între ele precum sînt înseși corpurile.

COROLARUL 2. Prin același raționament, dacă diversele corpuri ale unui sistem A, B, C, D etc. considerate separat atrag pe toate celelalte cu forțe acceleratoare, care sînt sau invers sau direct în raportul unei puteri oarecare a distanțelor de la cel atrăgător, și care se definesc după o lege oarecare comună din distanțele de la unul oarecare atrăgător; este evident că forțele absolute ale acelor corpuri sînt precum corpurile.

COROLARUL 3. Într-un sistem de corpuri, a căror forțe descresc cu pătratul distanțelor, dacă cele mai mici se rotesc în jurul celui mai mare pe elipse cît se poate de precise, avînd focarul comun în centrul celui mai mare; și cu razele duse la corpul cel mare vor descrie arii cît mai proporționale cu timpurile: forțele absolute ale acelor corpuri vor fi între ele, sau precis sau aproximativ în raportul corpurilor; și invers. Aceasta este evident din corolarul propoziției LXVIII combinat cu corolarul 1 al acesteia.

SCOLIE

Prin aceste propoziții sîntem conduși la analogia dintre forțele centripete și corpurile centrale spre care de obicei se îndreaptă acele forțe. Căci este conform cu rațiunea, că forțele, care sînt îndreptate spre corpuri, să depindă de natura și cantitatea lor, ca în fenomenele magnetice. Și de cîte

ori avem cazuri de acest fel, vor trebui apreciate atracțiunile corpurilor, atribuind diverselor particule ale acestora forțe proprii, și luînd sumele forțelor. Cuvîntul de atracție îl folosesc aici în general pentru o tendință oarecare a corpurilor de a se apropia unul de celălalt: fie că această tendință are loc sub acțiunea corpurilor, sau tinzînd unul spre altul, sau prin spiritele emise agitîndu-se reciproc, fie că se naște din acțiunea eterului sau a aerului sau a unui mediu oarecare corăoral sau necorăoral împingînd corpurile ce înoată în el într-un mod oarecare unul spre altul. În același sens general folosesc cuvîntul de impuls, definind în acest tratat nu speciile forțelor și calitățile fizice, ci cantități și proporții matematice după cum am explicat în definiții. În matematici trebuie corectate cantitățile forțelor și rapoartele care urmează din condiții oarecare presupuse: apoi, cînd pătrundem în fizică, aceste rapoarte trebuie ccomparate cu fenomenele; ca să cunoaștem care condiții ale forțelor răspund la diversele genuri ale corpurilor atractive. Și atunci în sfîrșit se va putea discuta mai sigur asupra speciilor cauzelor și rapoartelor fizice ale forțelor. Să vedem deci cu ce forțe trebuie să se acționeze reciproc corpurile sferice, constînd din particule atractive în felul expus mai sus, și ce mișcări rezultă de aici.

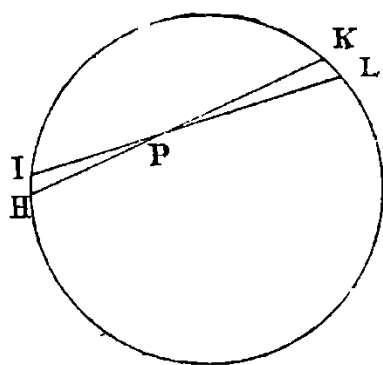
SECȚIUNEA XII

Despre forțele atractive ale corpurilor sferice

PROPOZIȚIA LXX. TEOREMA XXX

Dacă spre diversele puncte ale unei suprafețe sferice tind forțe centripete egale descrescînd în raportul pătratului distanțelor de la puncte: zic că un corpuscul situat în interiorul suprafeței nu este atras de aceste forțe în nici o parte.

Fie $HIKL$ acea suprafață sferică și P un corpuscul situat în interior. Prin P să ducem la această suprafață două linii HK, IL , interceptînd arcele cît se poate de mici HI, KL ; și, deoarece triunghiurile HPI, LPK (potrivit corolarului 3, lema VII) sînt asemenea, arcele vor fi proporționale cu distanțele HP, LP ; și particulele oarecare din HI și KL ale suprafeței sferice determinate prin drepte trecînd din toate părțile prin punctul P , vor fi în raportul pătratului distanțelor. Prin urmare forțele acestor particule exercitate asupra corpului P sînt egale între ele. Căci sînt precum particulele, și în raport invers cu pătratele distanțelor. Și aceste două rapoarte compun un raport de egalitate. Deci atracțiunile, efectuate în mod egal în sensuri opuse se distrug reciproc. Și printr-un raționament analog, toate atracțiunile pe întreaga suprafață sferică se distrug prin atracțiunile contrare. Prin urmare corpul P nu este împins în nici o parte prin aceste atracțiuni. Q.E.D.

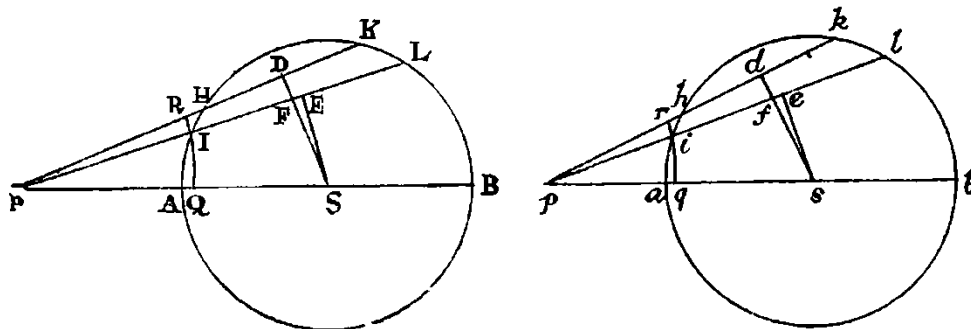


PROPOZIȚIA LXXI. TEOREMA XXXI

În aceleași condițiuni zic că un corpuscul situat în afara suprafeței sferice este atras spre centrul sferei, cu o forță invers proporțională cu pătratul distanței sale de la acel centru.

Fie $AHKB, ahkb$, două suprafețe sferice egale, descrise cu centrele S, s cu diametrele AB, ab , și P, p corpuscule situate în afară pe prelungirea diametrelor. Să ducem de la corpuscule liniile PHK, PIL, phk, pil , tăind din cercurile mari AHB, ahb , arcele egale HK, hk și IL, il . Și să coborîm pe ele perpendicularele $SD, sd; SE, se; IR, ir$; dintre care SD, sd să taie PL, pl în F și f . Să coborîm de asemenea pe diametre perpendicularele IQ, iq . Să presupunem că unghiurile DPE, dpe dispar și din cauză că sînt egale, DS și ds , ES și es , liniile PE, PF și pe, pf și liniile DF, df se pot considera ca egale; fiindcă ultimul raport al acestora, unghiurile DPE, dpe dispărînd simultan, este un raport de egalitate. Acestea fiind astfel stabilite, PI , va fi către PF precum RI către DF , și pf către pi precum df sau DF către ri ; și prin egalitate $PI \times pf$ către $PF \times pi$ precum RI către ri , adică (potrivit corolarului 3, lema VII) precum arcul IH către arcul ih . Iară PI către PS precum IQ către SE , și ps către pi precum se sau SE către iq ; și prin egalitate $PI \times ps$

către $PS \times pi$ precum IQ către iq . Și împreunînd rapoartele $PI^2 \times pf \times ps$ către $pi^2 \times PF \times PS$, precum $IH \times IQ$ către $ih \times iq$; adică, precum suprafața circulară, pe care o va descrie arcul IH cînd semicercul AKB se rotește în jurul diametrului AKB , către suprafața circulară, pe care o va descrie ih în învîrtirea semicercului akb în jurul diametrului ab . Și forțele, cu care



aceste suprafețe atrag corpusculele P și p după linii ce tind spre ele sînt (prin ipoteză) precum suprafețele și în raport invers cu pătratele distanțelor suprafețelor de la corpurile, adică, precum $pf \times ps$ către $PF \times PS$. Și aceste forțe iarăși sînt către părțile lor oblice care (făcîndu-se rezoluția forțelor potrivit corolarului II al legilor) tind spre centre după liniile PS , ps , precum PI către PQ , și pi către pq ; adică (din cauza asemănării triunghiurilor PIQ și PSF , piq și psf) precum PS către PF și ps către pf . De unde prin egalitate, atracțiunea corpusculului P spre S este către atracțiunea corpusculului p spre s , precum $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ către $\frac{pf \times PF \times PS}{sp}$, adică precum ps^2 către PS^2 . Și printr-un raționament analog, forțele cu care suprafețele descrise prin rotația arcelor KL , kl atrag corpusculele, vor fi precum ps^2 către PS^2 și în același raport vor fi forțele tuturor suprafețelor circulare în care se poate împărți fiecare suprafață sferică, luînd totdeauna sd egal cu SD și se egal cu SE . Și, prin compunere, forțele tuturor suprafețelor sferice, exercitate asupra corpusculilor vor fi în același raport. Q.E.D.

PROPOZIȚIA LXXII. TEOREMA XXXII

Dacă spre diversele puncte ale unei sfere oarecare tind forțe centripete egale descrescînd cu pătratul distanțelor de la puncte; și se dă atît densitatea sferei cît și raportul diametrului sferei către distanța corpusculului de la centrul ei: zic că forța cu care este atras corpusculul, va fi proporțională cu semidiametrul sferei.

Căci să ne închipuim două corpuscule atrase separat de două sfere, unul de una și celălalt de cealaltă, și că distanțele lor sînt respectiv proporționale cu diametrele sferelor, iar sferele se descompun în particule asemenea și situate asemenea față de corpuscule. Și atracțiile unui corpuscul, efectuate spre diversele particule ale unei sfere, vor fi către atracțiile celuilalt spre tot atîtea particule analoge ale celeilalte sfere, într-un raport compus din raportul direct al particulelor și raportul invers al pătratului distanțelor. Dar particulele sînt precum sferele, adică, în raportul cubului diametrelor, și distan-

tele sînt precum diametrele; și primul raport direct împreună cu ultimul raport luat de două ori invers este raportul diametrului către diametru. Q.E.D.

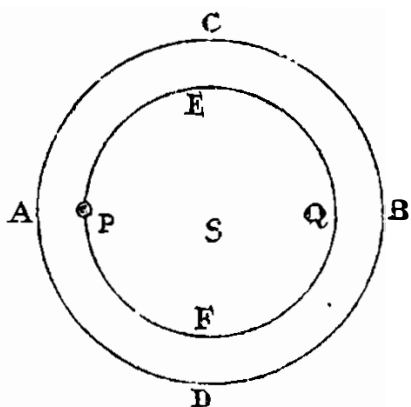
COROLARUL 1. De aici dacă corpusculele se învîrtesc pe cercuri, în jurul unor sfere constînd dintr-o materie uniform atractivă; și distanțele de la centrele sferelor sînt proporționale cu diametrele lor: timpurile periodice vor fi egale.

COROLARUL 2. Și viceversa, dacă timpurile periodice sînt egale; distanțele vor fi proporționale cu diametrele. Acestea două provin din corolarul 3, propoziția IV.

COROLARUL 3. Dacă spre diversele puncte a două solide oarecare, asemenea și la fel de dense, tind forțe centripete egale, descrescînd cu pătratul distanțelor de la puncte; forțele, cu care corpusculele situate în mod simetric față de cele două solide vor fi atrase de ele, vor fi între ele ca diametrele solidelor.

PROPOZIȚIA LXXIII. TEOREMA XXXIII

Dacă spre diversele puncte ale unei sfere oarecare date tind forțe centripete egale descrescînd în raportul pătratului distanțelor de la puncte: zic că un corpusul situat în interiorul sferei este atras cu o forță proporțională cu distanța sa de la centrul ei.



În sfera $ABCD$, descrisă cu centrul S , să plasăm corpusul P ; și din același centru S , cu intervalul AP , să ne închipuim descrisă sfera interioară $PEQF$. Este evident (din propoziția LXX) că suprafețele sferice concentrice, din care se compune diferența $AEBF$ a sferelor, atracțiunile lor fiind distruse de atracțiunile contrare, nu acționează de loc asupra corpului P . Rămîne numai atracțiunea sferei interioare $PEQF$. Și (din propoziția LXXII) aceasta este precum distanța PS . Q.E.D.

SCOLIE

Suprafețele din care se compun solidele, aici nu sînt pur matematice, ci orbite atît de subțiri, încît grosimea lor este aproape nulă; anume orbitele disparente, din care constă în definitiv sfera cînd numărul orbitelor crește și grosimea scade la infinit. La fel prin punctele, din care zicem că se compun liniile, suprafețele și solidele, trebuie să înțelegem particule egale de mărime neglijabilă.

PROPOZIȚIA LXXIV. TEOREMA XXXIV

Aceleași fiind admise, zic că un corpusul situat în afara sferei este atras cu o forță invers proporțională cu pătratul distanței sale de la centrul ei.

Căci să împărțim sfera în nenumărate suprafețe sferice concentrice, și atracțiunile corpusulului născute din diversele suprafețe vor fi invers pro-

porționale cu pătratul distanței corpusculului de la centru (din propoziția LXXI). Și prin compunere, suma atracțiunilor, adică atracțiunea corpusculului spre sfera întreagă, va fi în același raport. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici la distanțe egale de la centrele sferelor omogene atracțiile sînt precum sferile. Căci (potrivit propoziției LXXII) dacă distanțele sînt proporționale cu diametrele sferelor, forțele vor fi ca diametrele. Să se micșoreze distanța mai mare în acel raport; și, făcînd acum distanțele egale, atracțiunea se va mări ca pătratul acelui raport; și deci va fi către cealaltă atracție precum cubul acelui raport adică în raportul sferelor.

COROLARUL 2. La distanțe oarecare atracțiunile sînt precum sferile aplicate la pătratele distanțelor.

COROLARUL 3. Dacă un corpuscul, situat în afara unei sfere omogene, este atras cu o forță invers proporțională cu pătratul distanței sale de la centrul ei, iar sfera constă din particule atrăgătoare; forța unei particule oarecare va descrește în raportul pătratului distanței de la particulă.

PROPOZIȚIA LXXV. TEOREMA XXXV

Dacă spre diversele puncte ale unei sfere date tind forțe centripete egale, descreșcînd în raportul pătratului distanțelor de la puncte, zic că o altă sferă oarecare asemenea este atrasă de ea cu o forță invers proporțională cu pătratul distanței centrelor.

Căci atracția unei particule oarecare este în raport invers cu pătratul distanței sale de la centrul sferei atrăgătoare, (potrivit propoziției LXXIV) și de aceea este aceeași ca și cînd întreaga forță atractivă ar emana dintr-un singur corpuscul situat în centrul acestei sfere. Dar această atracție este atît de mare, cît ar fi la rîndul său atracția aceluiași corpuscul dacă el ar fi atras de diversele particule ale sferei atrase, cu aceeași forță cu care le atrage. Dar acea atracție a corpusculului (potrivit propoziției LXXIV) ar fi invers proporțională cu pătratul distanței sale de la centrul sferei; și deci atracția egală cu ea a sferei este în același raport. Q.E.D.

COROLARUL 1. Atracțiile sferelor, spre alte sfere omogene, sînt ca sferile atrăgătoare aplicate la pătratele distanțelor centrelor lor de la centrele acelora, pe care le atrag.

COROLARUL 2. Același lucru este valabil, cînd sfera atrasă de asemenea atrage. Căci diversele puncte ale acesteia atrag diversele puncte ale celeilalte cu aceeași forță, cu care la rîndul său sînt atrase de acestea; și deci cum în fiecare atracție este acționat (potrivit legii III) atît punctul atrăgător, cît și punctul atras, se va dubla forța atracției mutuale, păstrînd proporțiile.

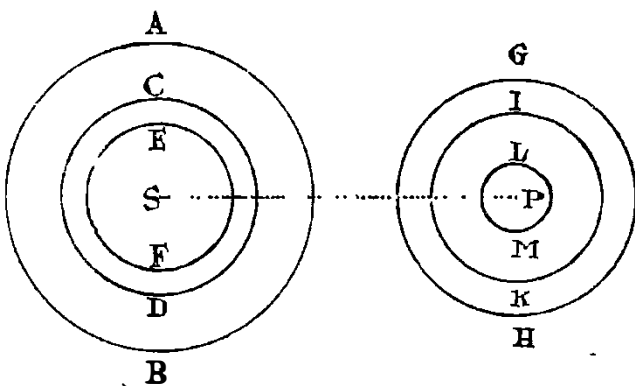
COROLARUL 3. Toate cele ce au fost demonstrate mai sus asupra mișcării corpurilor în jurul focarului secțiunilor conice, au loc cînd o sferă atrăgătoare se plasează în focar și corpurile se mișcă în afara sferei.

COROLARUL 4. Acelea însă, care se demonstrează despre mișcarea corpurilor în jurul centrului secțiunilor conice, au loc cînd mișcările se întîmplă în interiorul sferei.

PROPOZIȚIA LXXVI. TEOREMA XXXVI

Dacă sferele sînt într-un fel oarecare neasemenea (în ceea ce privește densitatea materiei și forța atractivă) înaintînd de la centru spre circumferință, iar la orice distanță dată de la centru sînt în toate direcțiile asemenea; și forța atractivă a unui punct oarecare descrește cu pătratul distanței corpului atras: zic că forța întreagă cu care o sferă de acest fel atrage pe alta, este invers proporțională cu pătratul distanței centrelor.

Fie AB , CD , EF etc. oricîte sfere concentrice asemenea, dintre care cele interioare adaose la cele exterioare compun o materie mai densă spre centru, sau scăzute lasă una mai rară și acestea (potrivit propoziției



LXXV), atrag oricîte alte sfere concentrice asemenea GH , JK , LM etc. fiecare pe fiecare, cu forțe invers proporționale cu pătratul distanței SP . Și compunînd sau separînd, suma tuturor acelor forțe, sau excésul unora asupra altora; adică forța, cu care sfera întreagă AB , compusă din sfere concentrice oarecare sau din diferențele celor concentrice, atrage întreaga sferă GH compusă

din oarecare sfere concentrice sau din diferențele celor concentrice; va fi în același raport. Să mărim numărul sferelor concentrice la infinit astfel, ca densitatea materiei împreună cu forța atractivă, înaintînd de la circumferință spre centru, să crească sau să descrească după o lege oarecare; și, adunînd o materie neatractivă, să se întregească în orice loc densitatea deficientă, astfel ca sferile să ia o formă oarecare dorită; și forța, cu care una din ele atrage pe cealaltă, și acum va fi, prin raționamentul de mai sus, în același raport invers al pătratului distanței. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici, dacă mai multe sfere de același fel, întru toate asemenea între ele, se atrag reciproc, atracțiunile acceleratoare ale fiecăreia asupra fiecăreia, vor fi la distanțe oarecare egale ale centrelor, precum sferile atrăgătoare.

COROLARUL 2. Și la distanțe oarecare neegale, precum sferile atrăgătoare aplicate la pătratele distanțelor dintre centre.

COROLARUL 3. Dar atracțiile motoare, sau greutatea sferelor în sfere, vor fi, la distanțe egale ale centrelor, ca sferile atrăgătoare și atrase împreună, adică precum cele cuprinse de sfere obținute prin înmulțire.

COROLARUL 4. Și la distanțe neegale, în același raport ca cele cuprinse și în raport invers cu pătratele distanțelor dintre centre.

COROLARUL 5. Aceleași sînt valabile, cînd atracția se naște din virtutea atractivă a oricăreia dintre cele două sfere exercitată reciproc asupra celeilalte sfere. Căci prin ambele forțe atracția se dublează, păstrînd proporția.

COROLARUL 6. Dacă oarecare sfere de acest fel se rotesc în jurul altora care sînt în repaus, fiecare în jurul fiecăreia; și distanțele dintre centrele celor

ce se învîrtesc și ale celor în repaus sînt proporționale cu diametrele celor ce sînt în repaus; timpurile periodice vor fi egale.

COROLARUL 7. Și iarăși, dacă timpurile periodice sînt egale, distanțele vor fi proporționale cu diametrele.

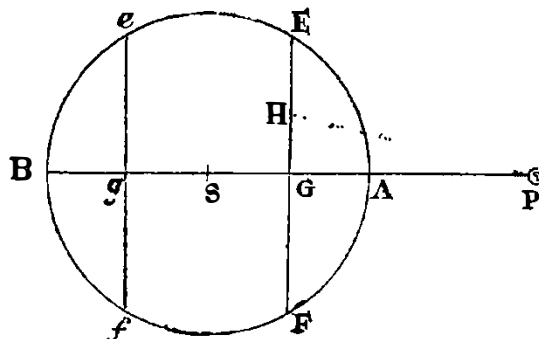
COROLARUL 8. Toate acelea, ce au fost demonstrate mai sus asupra mișcării corpurilor în jurul focarelor secțiunilor conice, sînt valabile: cînd sfera atrăgătoare, de o forță și condiție oarecare deja descrisă, este situată în focar.

COROLARUL 9. De asemenea și cînd cele rotitoare sînt și sfere rotitoare de o condiție oarecare deja descrisă.

PROPOZIȚIA LXXVII. TEOREMA XXXVII

Dacă spre diversele puncte ale sferelor tind forțe centripete proporționale cu distanțele punctelor de la corpurile atrase; zic că forța compusă, cu care două sfere se atrag reciproc este precum distanța dintre centrele sferelor.

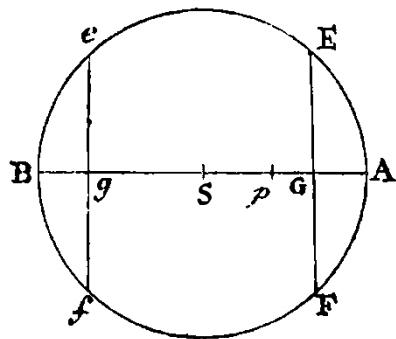
CAZUL 1. Fie $AEBF$ o sferă, S centrul ei, P un corpuscul atras, $PASB$ axa sferei trecînd prin centrul corpusculului; EF , ef două plane, cu care se taie sfera, perpendiculare pe axă și la distanțe egale de centrul sferei; G , g intersecțiile planelor și ale axei; și H un punct oarecare în planul EF . Forța centripetă a punctului H asupra corpusculului P , exercitată după linia PH , este precum distanța PH ; și (potrivit corolarului II al legilor) după linia PG , sau spre centrul S , precum lungimea PG . Prin urmare forța tuturor punctelor în planul EF , adică a întregului plan, cu care corpusculul P este atras spre centrul S , este precum distanța PG înmulțită cu numărul punctelor, adică, precum solidul cuprins de planul EF și distanța PG . Și la fel forța planului ef , cu care corpusculul P este atras spre centrul S , este precum planul înmulțit cu distanța sa Pg , sau precum planul EF egal cu ef înmulțit cu distanța Pg , și suma forțelor ambelor plane către planul EF înmulțit cu suma distanțelor $PG + Pg$, adică, precum planul înmulțit cu dublul distanței PS dintre centru și corpuscul, adică precum planul dublu EF înmulțit cu distanța PS , sau precum suma planelor egale $EF + ef$ înmulțit cu aceeași distanță. Și printr-un raționament analog, forțele tuturor planelor asupra sferei întregi la distanță egală de ambele părți de la centrul sferei, sînt ca suma planelor înmulțită cu distanța PS , adică, precum sfera întreagă și distanța PS împreună. Q.E.D.



CAZUL 2. Să atragă acum corpusculul P sfera $AEBF$. Și prin același raționament se demonstrează că forța, cu care este atrasă acea sferă va fi precum distanța PS . Q.E.D.

CAZUL 3. Căci să presupunem că o altă sferă se compune din corpuscule nenumărate P ; și fiindcă forța, cu care este atras un corpuscul oarecare, este precum distanța corpusculului de la centrul primei sfere și acea sferă

luate împreună, și deci este aceeași, ca și când toată ar proveni dintr-un corpuscul unic din centrul sferei; forța întreagă, cu care se atrag toate corpusculele în sfera a doua, adică, cu care este atrasă întreaga sferă, va fi aceeași, ca și când sfera aceea ar fi atrasă cu o forță ieșind dintr-un corpuscul unic din centrul primei sfere, și de aceea este proporțională cu distanța dintre centrele sferelor. Q.E.D.



CAZUL 4. Să presupunem că sferele se atrag reciproc, și forța dublată va păstra proporția de mai înainte. Q.E.D.

CAZUL 5. Să plasăm corpusculul p în interiorul sferei $AEBF$; și fiindcă forța planului ef asupra corpusculului este precum solidul cuprins de acel plan și distanța pg ; și forța contrară planului EF precum solidul cuprins de acel plan și distanța pG ; forța compusă din amândouă va fi precum diferența solidelor, adică precum suma planelor egale înmulțită cu jumătatea diferenței distanțelor, adică, precum suma înmulțită cu distanța pS a corpusculului de la centrul sferei. Și printr-un raționament analog, atracția tuturor planelor EF , ef asupra sferei întregi, adică, atracția sferei întregi, este împreună precum suma tuturor planelor, sau sfera întreagă, și distanța pS a corpusculului de la centrul sferei. Q.E.D.

CAZUL 6. Și dacă din corpuscule nenumărate p se compune o sferă nouă, situată în interiorul primei sfere $AEBF$; se probează ca mai sus că atracția fie simplă a unei sfere asupra alteia, fie mutuală a fiecăreia asupra alteia, va fi precum distanța centrelor pS . Q.E.D.

PROPOZIȚIA LXXVIII. TEOREMA XXXVIII

Dacă sferă înaintînd de la centru spre circumferință sînt într-un mod oarecare neasemenea și neegale dar în circuit la orice distanță dată de la centru sînt din orice parte asemenea și forța atractivă a fiecărui punct este precum distanța corpului atras: zic că forța întreagă cu care două sfere de acest fel se atrag mutual este proporțională cu distanța dintre centrele sferelor.

Se demonstrează din propoziția precedentă în același fel, în care s-a demonstrat propoziția LXXVI din propoziția LXXV.

COROLAR. Cele ce s-au demonstrat mai sus în propozițiile X și LXIV despre mișcarea corpurilor în jurul centrelor secțiunilor conice, sînt valabile cînd toate atracțiile se fac cu o forță a corpurilor sferice de condiția deja descrisă și corpurile atrase sînt sfere de aceeași condiție.

SCOLIE

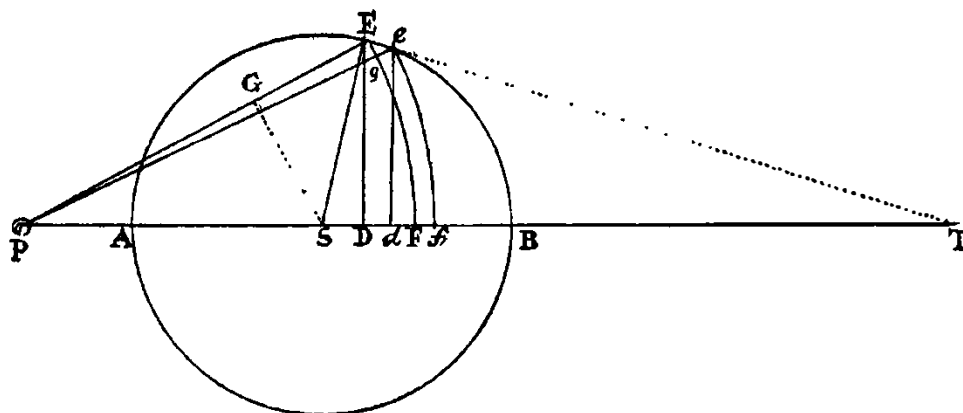
Am expus acum două cazuri mai importante de atracții; anume cînd forțele centripete descresc în raportul pătratului distanțelor sau cresc în raportul simplu al distanțelor; făcînd în ambele cazuri ca corpurile să se

rotească pe secțiuni conice și compunând forțele centripete ale corpurilor sferice după aceeași lege, în îndepărtarea de la centru, descrescând sau crescând cu ele: ceea ce este demn de notat. Ar fi lung să parcurg în mod izolat celelalte cazuri, care prezintă concluzii mai puțin elegante. Prefer să le cuprind și să le determin pe toate împreună cu o metodă generală după cum urmează.

LEMA XXIX

Dacă din centrul S se descrie un cerc oarecare AEB , și din centrul P două cercuri EF , ef , tăind pe cel dintâi în E , e , și linia PS în F , f ; și pe PS se coboară perpendicularele ED , ed : zic că, dacă presupunem că distanța arcelor EF , ef descrește la infinit raportul ultim al liniei disparente Dd către linia disparentă este același ca al liniei PE către linia PS .

Căci dacă linia Pe taie arcul EF în q ; și dreapta Ee , care coincide cu arcul disparent Ee , prelungită întâlnește dreapta PS în T ; și din S se coboară pe PE normala SG : din cauza asemănării triunghiurilor DTE , dTe , DES ; va fi Dd către Ee , precum DT către TE , sau DE către ES ; și din asemă-



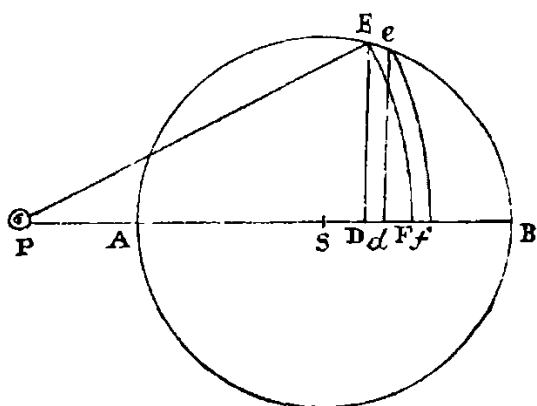
narea triunghiurilor Eeq , ESG (potrivit lemei VIII și corolarului 3, lema VII), va fi Ee către eq sau Ff precum ES către SG ; și prin egalitate, Dd către Ff precum DE către SG ; adică (din asemănarea triunghiurilor PDE , PGS) precum PE către PS . Q.E.D.

PROPOZIȚIA LXXIX. TEOREMA XXXIX

Dacă o suprafață $EFfe$ aproape disparentă din cauza lățimii micșorate la infinit, prin rotirea ei în jurul axei PS , descrie un solid sferic concavo-convex spre ale cărei particule diverse tind forțe centripete egale; zic că forța, cu care solidul atrage un corpucul situat în P , este într-un raport compus din raportul solidului $DEq \times Ff$, și raportul forței cu care particula dată în locul Ff ar atrage același corpucul.

Căci dacă mai întâi considerăm forța suprafeței sferice FE , ce se naște prin rotația arcului FE , și este tăiată undeva în r de linia de ; partea inelară

a suprafeței născută de rotația arcului rE , va fi ca linioara Dd , menținând raza sferei PE (după cum a demonstrat Arhimede în cartea *De Sphaera et Cylindro*). Și forța acesteia, exercitată după liniile PE sau Pr situate în



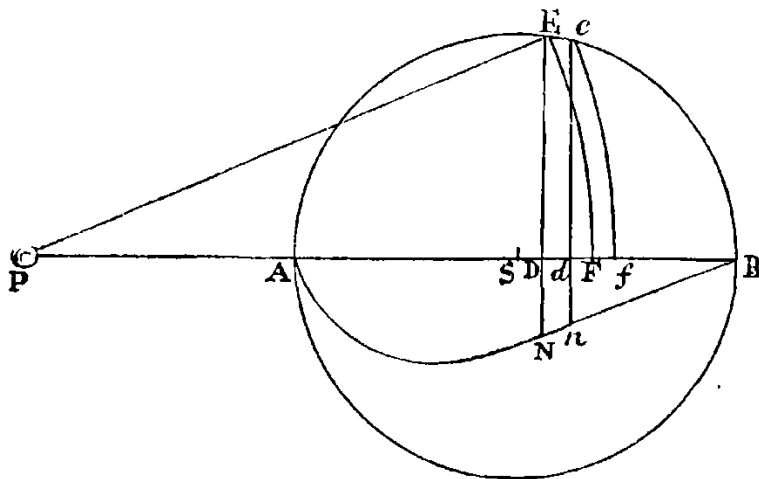
toate părțile pe suprafața conică, precum partea inelară a suprafeței; adică, precum linioara Dd , sau, ceea ce este același lucru, ca dreptunghiul format de raza dată PE a sferei și linioara Dd : dar de-a lungul liniei PS tinzând spre centrul S este mai mică în raportul PD către PE și deci precum $PD \times Dd$. Să presupunem acum linia DF împărțită în nenumărate particule egale, care fiecare să se numească Dd ; și să împărțim suprafața FE în tot atâtea inele egale, ale căror forțe vor fi ca suma tuturor $PD \times Dd$

adică precum $\frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$, și deci precum DE^2 . Să înmulțim acum suprafața FE cu înălțimea Ff ; și fie forța solidului $EFfe$ exercitată asupra corpusculului P precum $DE^2 \times Ff$: anume dacă se dă forța pe care o particulă oarecare dată Ff o exercită la distanța PF asupra corpusculului P . Dar dacă forța nu este dată, forța solidului $EFfe$ va fi precum solidul $DE^2 \times Ff$ și forța nedată luată împreună. Q.E.D.

PROPOZIȚIA LXXX. TEOREMA XL

Dacă la diversele particule egale ale unei sfere ABE descrisă din centrul S , tind forțe centripete egale, și pe axa AB a sferei, în care se află un corpuscul oarecare P , se ridică din diversele puncte D perpendiculare DE întâlnind sfera în E , și pe ele se iau lungimi DN , care sînt precum cantitatea $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$ și forța, pe care o particulă a sferei situată pe axă la distanța PE o exercită asupra corpusculului P luate împreună: zic că forța întreagă, cu care este atras corpusculul spre sferă, este precum aria ANB cuprinsă sub axa sferei AB , și linia curbă ANB , pe care se află încontinuu punctul N .

Căci menținând construcțiile din lema și teorema ultimă, să ne închipuim axa AB a sferei împărțită în nenumărate particule egale Dd , și sfera întreagă împărțită în tot atâtea straturi sferice concavo-convexe $EFfe$ și să



ridicăm perpendiculara dn . Potrivit teoremei de mai sus forța cu care stratul $EFfe$ atrage corpusculul P , este precum $DE^2 \times Ff$ și forța unei particule exercitată la distanța PE sau PF luate împreună. Dar (potrivit lemei din urmă) Dd este către Ff precum PE către PS , și de aici Ff este egal cu $\frac{PS \times Dd}{PE}$ și $DE^2 \times Ff$ egală cu Dd înmulțit cu $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$ și de aceea forța stratului $EFfe$ este precum Dd înmulțit cu $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$ și forța particulei exercitată la distanța PF luate împreună, adică (prin ipoteză), precum $DN \times Dd$, sau ca aria disparentă $DNnd$. Așadar forțele tuturor straturilor exercitate asupra corpului P , sînt precum toate ariile $DNnd$, adică, forța întreagă a sferei ca aria întreagă ANB . Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici, dacă forța centripetă, tinzînd spre diversele particule, rămîne totdeauna aceeași la toate distanțele, și DN se ia precum $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$; forța întreagă cu care corpusculul P este atras de sferă va fi ca aria ANB .

COROLARUL 2. Dacă forța centripetă a particulelor este în raport invers cu distanța corpusculului atras de ea, și DN este precum $\frac{DN^2 \times PS}{PE^2}$; forța cu care corpusculul este atras de sfera întreagă va fi precum aria ANB .

COROLARUL 3. Dacă forța centripetă a particulelor este în raport invers proporțional cu cubul distanței corpusculului atras de ea, și DN se ia precum $\frac{DE^2 \times PS}{PE^4}$; forța cu care corpusculul este atras de sfera întreagă, va fi precum aria ANB .

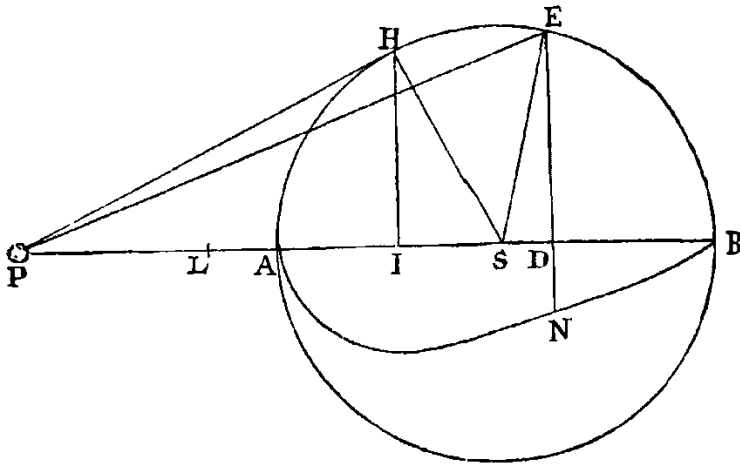
COROLARUL 4. Și în general dacă presupunem că forța centripetă tinzînd spre diversele particule ale sferei este în raport invers cu cantitatea V , dar se ia DN precum $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$; forța cu care corpusculul este atras de sfera întreagă va fi precum aria ANB .

PROPOZIȚIA LXXXI. TEOREMA XLI

Menținînd cele deja stabilite să măsurăm aria ANB .

Din punctul P să ducem dreapta PH atingînd sfera în H , și coborînd pe axa PAB normala HI să bisectăm PI în L ; și va fi (potrivit propoziției XII, Cartea a II-a a *Elementelor*) PE^2 egal cu $PS^2 + SE^2 + 2PSD$. Dar SE^2 sau SH^2 (din cauza asemănării triunghiurilor SPH , SHI) este egal cu dreptunghiul PSI . Deci PE^2 este egal cu cel cuprins de PS și $PS + SI + 2SD$, adică, de PS și $2LS + 2SD$, adică de PS și $2LD$. Apoi DE^2 este egal cu $SE^2 - SD^2$, sau $SE^2 - LS^2 + 2SLD - LD^2$, adică, $2SLD - LD^2 - ALB$. Căci $LS^2 - SE^2$ sau $LS^2 - SA^2$ (potrivit propoziției VI, Cartea a II-a a *Elementelor*) este egal cu dreptunghiul ALB . Să scriem deci $2SLD - LD^2 - ALB$ în loc de DE^2 ; și cantitatea $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, care conform corolarului al patrulea al propoziției precedente este precum

lungimea ordonatei DN , se descompune în trei părți $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LD^3 \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$; unde dacă în loc de V se scrie raportul invers al forței centripete,



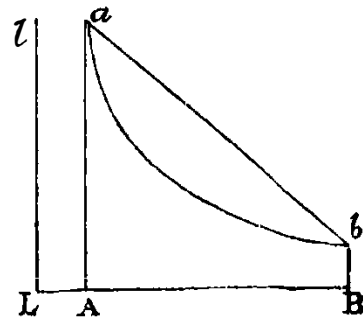
și în loc de PE media proporțională între PS și $2LD$; cele trei părți devin ordonatele a tot atîtor linii curbe, ale căror arii se află prin metodele comune. Q.E.F.

EXEMPLUL 1. Dacă forța centripetă tinzînd spre diversele particule ale sferei este în raport invers cu distanța; să scriem în loc de V distanța PE ; apoi

$2PS \times LD$ în loc de PE^2 , și va fi DN precum $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$.

Să presupunem că DN este egal cu dublul aceia $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$ și $2SL$ partea dată a ordonatei dusă în lungimea AB va descrie aria dreptunghiulară $2SL \times AB$; și partea nedefinită LD dusă normal în aceeași lungime prin mișcare continuă, în așa fel ca trebuind să se miște crescînd sau descrescînd să fie egală totdeauna cu lungimea LD , să descrie aria $\frac{LB^2 - LA^2}{2}$, adică aria $SL \times AB$; care scăzută din aria de mai înainte $2SL \times AB$

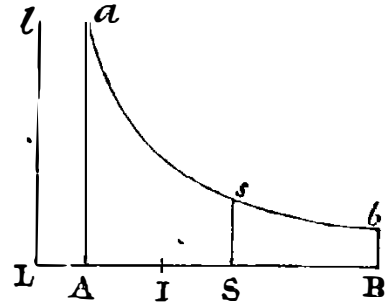
rămîne aria $SL \times AB$. Dar partea a treia $\frac{ALB}{LD}$, dusă la fel printr-o mișcare locală normal pe aceeași lungime, va descrie o arie hiperbolică; care scăzută din aria $SL \times AB$ va rămîne ariea căutată ANB . De unde provine următoarea construcție a problemei. În punctele L, A, B să ridicăm perpendicularele Ll, Aa, Bb , dintre care Aa să fie egală cu LB și Bb cu LA . La asimptotele Ll, LB , prin punctele ab să descriem hiperbola ab . Și coarda dusă ba va închide aria aba egală cu aria căutată ANB .



EXEMPLUL 2. Dacă forța centripetă tinzînd spre diversele particule ale sferei este în raport invers cu cubul distanței, sau (ceea ce este același lucru) precum cubul aplicat la un plan oarecare dat; să scriem $\frac{PE^3}{2AS^2}$ în loc de V , apoi $2PS \times LD$ în loc de PE^2 ; și va fi DN precum $\frac{SL \times AS^2}{PS \times LD} - \frac{AS^2}{2PS} - \frac{ALB \times AS^2}{2PS \times LD^2}$ adică (deoarece PS, AS, SI sînt continuu proporționale) precum $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2LD^2}$.

Dacă ducem cele trei părți ale acesteia în lungimea AB , cea dintîi $\frac{LSI}{LD}$ va naște o arie hiperbolică; cea de-a doua $\frac{1}{2}SI$ aria $\frac{1}{2}AB \times SI$; a treia $\frac{ALB \times SI}{2LD^2}$

aria $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, adică $\frac{1}{2} AB \times SI$. Să se scadă din cea dintâi suma celei de a doua și a treia, și va rămâne aria căutată ANB . De unde rezultă următoarea construcție a problemei. În punctele L, A, S, B să ridicăm perpendicularele Ll, Aa, Ss, Bb , dintre care Ss să fie egal cu SI , și prin punctul s la asimptotele Ll, LB să descriem hiperbola asb întâlnind perpendicularele Aa, Bb în a și b ; și scăzând dreptunghiul $2ASI$ din aria hiperbolică $AasbB$ va rămâne aria căutată ANB .



EXEMPLUL 3. Dacă forța centripetă, tinzând spre diversele particule ale sferei descrește ca puterea a patra a distanței de la particule; să scriem

$\frac{PE^4}{2AS^3}$ în loc de V , apoi $\sqrt{2PS \times LD}$ în loc de PE , și va fi DN precum $\frac{SI^2 \times SL^2}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^3}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SI^2 \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^5}}$ ale cărei trei părți duse în lungimea AB , produc tot atâtea arii anume $\frac{2SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}}$ înmulțită cu $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}}$ înmulțită

cu $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$; și $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$

înmulțită cu $\frac{1}{\sqrt{LA^3}} - \frac{1}{\sqrt{LB^3}}$.

Și acestea după reducerea necesară devin $\frac{2SI^2 \times SL}{LI}$, SI^2

și $SI^2 + \frac{2SI^3}{3LI}$. Dar acestea

scăzând pe cele din urmă din cea dintâi, devin $\frac{4SI^3}{3LI}$.

Prin urmare forța întreagă, cu care este atras corpusculul P spre centru, este

precum $\frac{SI^3}{PI}$, adică, în raport invers cu $PS^3 \times PI$. Q.E.I.

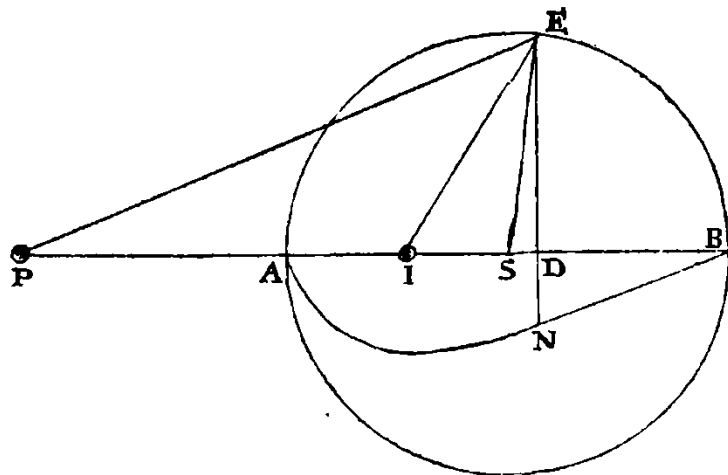
Prin aceeași metodă se poate determina atracția corpusculului situat în interiorul sferei, dar mai repede prin teorema următoare.

PROPOZIȚIA LXXXII. TEOREMA XLI

Într-o sferă descrisă din centrul S cu intervalul SA , dacă luăm SI, SA, SP continuu proporționale: zic că atracția unui corpuscul în interiorul sferei într-un loc oarecare I , este către atracția aceluiași în afara sferei, în locul P , într-un raport compus din rădăcina pătrată a raportului distanțelor de la centrul IS, PS , și rădăcina pătrată a raportului forțelor centripete, tinzând spre centru în acele locuri P și I .

Astfel dacă forțele centripete ale particulelor sferei sînt în raport invers ca distanțele corpusculului atras de el; forța cu care corpusculul situat în

I este atras de sfera întreagă, va fi către forța, cu care este atras în P într-un raport compus din rădăcina pătrată a raportului distanței SI către distanța SP , și rădăcina pătrată a raportului forței centripete în locul I , născută dintr-o particulă oarecare în centru, către forța centripetă în locul P



născută de aceeași particulă în centru, adică, în raportul invers al rădăcinii pătrate a distanțelor SI , SP una către alta. Aceste două rădăcini pătrate ale rapoartelor compun un raport de egalitate, și de aceea atracțiile efectuate în I și P de sfera întreagă sînt egale. Printr-un calcul analog, dacă forțele particulelor sferei sînt în raport invers cu pătratul distanțelor, se va afla că atracția în I este către atracția în

P , precum distanța SP către semidiametrul SA al sferei: Dacă forțele sînt în raport invers cu cubul distanțelor, atracțiile în I și P vor fi între ele ca SP^2 către SA^2 : Dacă sînt cu puterea a patra, precum SP^3 către SA^3 . De unde cum s-a aflat că atracția în P în acest din urmă caz este în raport invers cu $PS^3 \times PI$, atracțiunea în I va fi în raport invers cu $SA^3 \times PI$, adică (SA^3 fiind dat) în raport invers cu PI . Și la fel este progresia la infinit. Iar teorema se demonstrează astfel.

Menținînd cele construite deja mai înainte, și aflîndu-se un corpuscul într-un loc oarecare P , ordonata DN s-a aflat a fi precum $\frac{DE^3 \times PS}{PE \times V}$

Prin urmare dacă ducem IE , ordonata pentru un alt loc oarecare al corpusculului I , schimbînd acelea ce trebuie schimbate, va deveni ca $\frac{DE^3 \times IS}{IE \times V}$

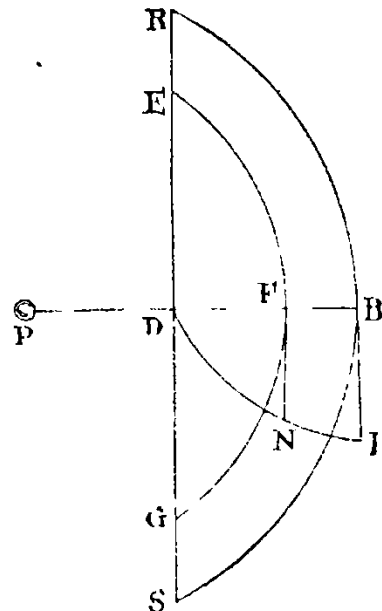
Să presupunem că forțele centripete, emanînd dintr-un punct oarecare E al sferei, sînt între ele la distanțele IE , PE , precum PE^n către IE^n (unde numărul n înseamnă indicele puterilor lui PE și IE) și ordonatele vor deveni ca $\frac{DE^3 \times PS}{PE \times PE^n}$ și $\frac{DE^3 \times IS}{IE \times IE^n}$, al căror raport reciproc este ca $PS \times IE \times IE^n$ către $IS \times PE \times PE^n$. Deoarece SI , SE , SP sînt continuu proporționale, triunghiurile SPE , SEI sînt asemenea, și deci IE către PE precum IS către SE sau SA ; în locul raportului lui IE către PE să scriem raportul IS către SA ; și raportul ordonatelor va deveni $PS \times IE^n$ către $SA \times PE^n$. Dar PS către SA este raportul rădăcinilor pătrate ale distanțelor PS , SI ; și IE^n către PE^n (din cauza că IE este proporțional cu PE precum IS către SA) este raportul rădăcinii pătrate a forțelor la distanțele PS , IS . Așadar ordonatele, și de aceea ariile pe care le descriu ordonatele, și atracțiile proporționale cu ele sînt într-un raport compus din rădăcina pătrată a acelor rapoarte. Q.E.D.

PROPOZIȚIA LXXXIII. PROBLEMA XLII

Să aflăm forța cu care un corpuscul situat în centrul sferei este atras spre un segment oarecare al ei.

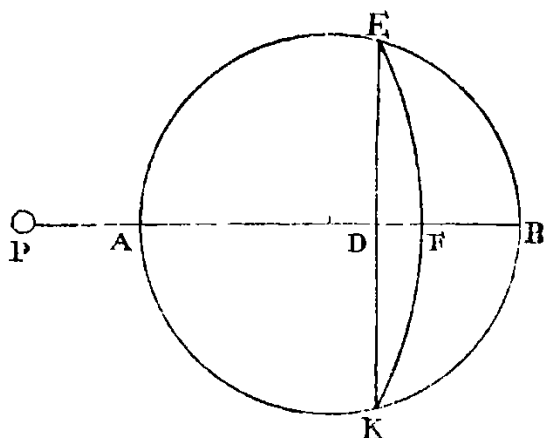
Fie P un corp în centrul sferei, și $RBSD$ un segment al ei cuprins între planul RDS și suprafața sferică RBS . Fie DB tăiat în F de către suprafața sferică EFG descrisă din centrul P , și să împărțim segmentul în părțile $BREFGS$, $FEDG$. Fie însă acea suprafață nu pur matematică, ci fizică, avînd o grosime cît de mică. Să numim acea grosime O , și va fi această suprafață (potrivit demonstrațiilor lui Arhimede) precum $PF \times DF \times O$. Să presupunem afară de aceea că forțele atractive ale particulelor sferei sînt în raport invers cu acea putere a distanțelor al cărei indice este n ; și forța cu care suprafața EFG atrage corpul P , va fi (potrivit propoziției LXXIX) precum $\frac{DE^2 \times O}{PF^n}$, adică precum $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$.

Fie perpendiculara FN înmulțită cu O perpendiculară pe aceasta; și aria curbilinie BDI , pe care o descrie ordonata FN dusă de-a lungul lungimii DB printr-o mișcare continuă, va fi precum forța întreagă cu care segmentul întreg $RBSD$ atrage corpul P . Q.E.I.



PROPOZIȚIA LXXXIV. PROBLEMA XLIII

Să aflăm forța, cu care un corpuscul, situat în afara centrului sferei pe axa unui segment oarecare, este atras de acel segment.



Fie atras de către segmentul EBK corpul P situat pe axa ADB . Din centrul P cu intervalul PE să descriem suprafața sferică EFK , prin care segmentul se împarte în două părți $EBKFE$ și $EFKDE$. Să aflăm forța primei părți cu ajutorul propoziției LXXXI și forța părții din urmă cu ajutorul propoziției LXXXIII; și suma forțelor va fi forța segmentului întreg $EBKDE$. Q.E.I.

SCOLIE

După ce am explicat atracțiunile corpurilor sferice, putem trece la legile atracțiilor altor corpuri oarecare constînd la fel din particule atractive; dar a trata acestea în mod particular nu intră în intenția mea. Va fi deajuns să adaug cîteva propoziții mai generale despre forțele acestor feluri de corpuri, și despre mișcările ce nasc de aci, avînd oarecare întrebuințare în chestiunile filozofice.

SECȚIUNEA XIII

Despre forțele atractive ale corpurilor nesferice

PROPOZIȚIA LXXXV. TEOREMA XLII

Dacă atracția unui corp atras, este cu mult mai intensă cînd este în contact cu cel atrăgător, decît cînd sînt separate unul de celălalt printr-un interval cît se poate de mic: forțele particulelor celui atrăgător, cînd cel atras se îndepărtează, descresc într-un raport mai mare ca pătratul distanțelor de la particule.

Căci dacă forțele descresc în raportul pătratului distanțelor de la particule, atracția spre corpul sferic, deoarece (potrivit propoziției LXXIV) este în raport invers cu pătratul distanței corpului atras de la centrul sferei, nu va crește în mod sensibil prin contact; și de aceea va crește și mai puțin prin contact, dacă atracția, cînd corpul atras se îndepărtează, descresce într-un raport mai mic. Prin urmare propoziția este evidentă în cazul sferelor atractive. Și la fel este cazul orbitelor sferice concave ce atrag corpuri externe. Și cu mult mai clar este lucrul în cazul orbitelor care atrag corpuri situate în interior, fiindcă atracțiunile împrăștiate prin cavitățile orbitelor sînt distruse de atracțiile contrare (potrivit propoziției LXX), și deci chiar la întîlnire sînt nule. Căci dacă din aceste sfere și din orbitele sferice se înlătură oarecare părți îndepărtate de la locul de contact, și se adaugă într-un loc oarecare părți noi: figurile acestor corpuri atractive se pot schimba după voie, iar părțile adunate sau scăzute, fiind îndepărtate de la locul de contact, nu vor mări în mod remarcabil excesul atracției ce se naște din contact. Propoziția este deci valabilă pentru corpuri de orice figură. Q.E.D.

PROPOZIȚIA LXXXVI. TEOREMA XLIII

Dacă forțele particulelor din care se compune un corp atractiv cu îndepărtarea corpului atras descresc ca cubul sau mai mult decît cubul distanțelor de la particule: atracția va fi cu mult mai intensă în contact decît dacă corpul atrăgător și cel atras sînt separate unul de celălalt printr-un interval cît de mic.

Că atracția în apropierea corpusculului atras de o sferă atrăgătoare de acest fel crește la infinit, este evident din soluția problemei XLI arătată în exemplul al doilea și al treilea. Același lucru se vede ușor comparînd între ele acele exemple și teorema XLI despre atracțiile corpurilor spre orbite concavo-convexe, fie că corpurile atrase sînt situate în afara orbitelor, fie în cavitățile lor. Dar și adăugînd sau înlăturînd din aceste sfere și din orbite o materie atractivă oarecare oriunde în afară de locul de contact, în așa fel ca corpurile atractive să ia o figură oarecare dată, propoziția va fi evidentă despre toate corpurile. Q.E.D

PROPOZIȚIA LXXXVII. TEOREMA XLIV

Dacă două corpuri asemenea între ele, și constînd dintr-o materie la fel de atractivă atrag separat corpuscule proporționale și situate asemenea cu ele; atracțiile acceleratoare ale corpusculilor asupra corpurilor întregi vor fi precum atracțiile acceleratoare ale corpusculilor asupra particulelor proporționale și situate asemenea cu cele întregi.

Căci dacă corpurile se împart în particule, care sînt proporționale cu cele întregi, și situate asemenea cu cele întregi va fi, precum atracția asupra unei particule oarecare a unui corp către atracția asupra particulei corespunzătoare a celui alt corp, tot așa atracțiile asupra diverselor particule ale primului corp către atracțiile asupra diverselor particule corespunzătoare ale celui alt; și compunînd, tot așa atracția asupra primului corp întreg către atracția asupra celui de-al doilea corp întreg. Q.E.D.

COROLARUL 1. Prin urmare dacă forțele atractive ale particulelor, mărind distanțele corpusculilor atrase, descresc în raportul unei puteri oarecare a distanțelor; atracțiile acceleratoare asupra corpurilor întregi vor fi precum corpurile, și în raport invers cu acele puteri ale distanțelor. Astfel dacă forțele particulelor descresc în raportul pătratului distanțelor de la corpurile atrase, corpurile însă sînt precum A^3 și B^3 și deci atît laturile cubice ale corpurilor cît și distanțele corpusculilor atrase de la corpurile, precum A și B : atracțiile acceleratoare asupra corpurilor vor fi precum $\frac{A^3}{A^2}$ și $\frac{B^3}{B^2}$, adică, precum laturile cubice A și B ale corpurilor. Dacă forțele particulelor descresc în raportul cubului distanțelor de la corpusculele atrase; atracțiunile acceleratoare asupra corpurilor întregi vor fi precum $\frac{A^3}{A^3}$ și $\frac{B^3}{B^3}$, adică, egale. Dacă forțele descresc ca puterea a patra; atracțiile asupra corpurilor vor fi ca $\frac{A^3}{A^4}$ și $\frac{B^3}{B^4}$ adică în raport invers cu laturile cubice A și B . Și așa în celelalte cazuri.

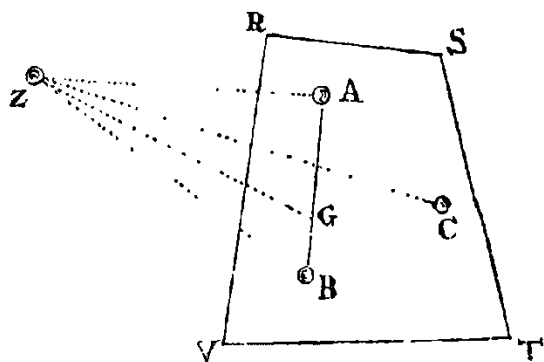
COROLARUL 2. De unde la rîndul său, din forțele cu care corpuri asemenea atrag corpuscule situate asemenea cu ele se poate obține raportul descreșterii forțelor particulelor atractive cînd corpusculul atras se îndepărtează; dacă numai descreșterea este direct sau invers proporțională cu un raport oarecare al distanțelor.

PROPOZIȚIA LXXXVIII. TEOREMA XLV

Dacă forțele atractive ale particulelor egale ale unui corp oarecare sînt ca distanțele locurilor de la particule: forța corpului întreg va tinde spre centrul lui de greutate; și va fi aceeași cu forța unei sfere constînd dintr-o materie asemenea și egală, și avînd centrul în centrul lui de greutate.

Să presupunem că particulele A, B ale corpului $RSTV$ atrag un corpuscul oarecare Z cu forțe, care, dacă particulele sînt egale între ele, sînt precum distanțele AZ, BZ ; dacă însă admitem particule neegale, sînt ca aceste

particule și distanțele lor AZ , BZ luate împreună sau (dacă pot vorbi așa) ca aceste particule înmulțite respectiv cu distanțele lor AZ BZ . Și să exprimăm aceste forțe prin cele cuprinse de $A \times AZ$ și $B \times BZ$. Să unim AB , și să o tăiem în G în așa fel ca să fie AG către BG precum particula B către parti-



cula A ; și G va fi centrul comun de greutate al particulelor A și B . Forța $A \times AZ$ (potrivit corolarului II al legilor) se descompune în forțele $A \times GZ$ și $A \times AG$ și forța $B \times BZ$ în forțele $B \times GZ$ și $B \times BG$. Dar forțele $A \times AG$ și $B \times BG$, din cauza că A este proporțional cu B și BG cu AG , sînt egale; și deci fiindcă sînt îndreptate în părți contrarii, se distrug reciproc. Rămîn forțele $A \times GZ$ și $B \times GZ$. Acestea tind de la Z spre centrul G , și compun forța $(A + B) \times GZ$; adică aceeași forță ca și cînd particulele atrăgătoare A și B ar fi situate în centrul lor comun de greutate C , compunînd acolo o sferă.

Prin același raționament, dacă se adună o a treia particulă C , și se compune forța ei cu forța $(A + B) \times GZ$ tinzînd spre centrul G ; forța născută de acolo va tinde spre centrul comun de greutate al acelei sfere în G și al particulei C ; adică, spre centrul comun de greutate al celor trei particule A , B , C ; și va fi aceeași, ca și cînd sfera și particula C ar fi situate în centrul comun, compunînd acolo o sferă mai mare. Și așa se poate continua la infinit. Deci forța întregă a tuturor particulelor ale unui corp oarecare $RSTV$ este aceeași, ca și cînd corpul păstrînd centrul de greutate, ar lua figura unei sfere. Q.E.D.

COROLAR. De aici mișcarea corpului atras Z va fi aceeași, ca și cînd corpul atrăgător $RSTV$ ar fi o sferă: și de aceea corpul atrăgător sau este în repaus sau înaintează uniform în direcție; corpul atras se va mișca pe o elipsă avînd centrul în centrul de greutate al celui care atrage.

PROPOZIȚIA LXXXIX. TEOREMA XLVI

Fîind date mai multe corpuri constînd din particule egale, ale căror forțe sînt precum distanțele locurilor de la fiecare: forța compusă din forțele tuturor cu care este atras un corpuscul oarecare, va tinde spre centrul comun de greutate al celor atrăgătoare; și va fi același lucru ca și cînd cele atrăgătoare, păstrînd centrul comun de greutate, s-ar uni și ar forma o sferă.

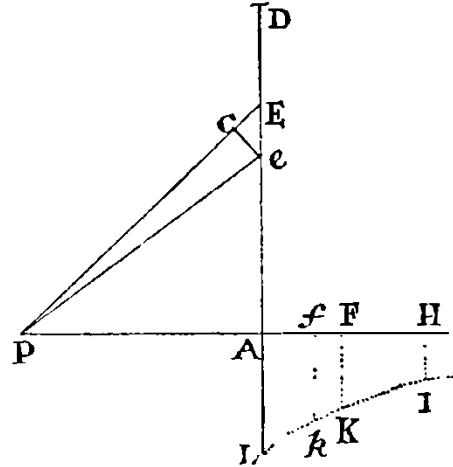
Se demonstrează în același fel, ca propoziția de mai sus.

COROLAR. Așadar mișcarea corpului atras va fi aceeași, ca și cînd corpurile atrăgătoare, păstrînd centrul comun de greutate, s-ar uni și ar forma o sferă. Și deci dacă centrul comun de greutate al corpurilor atrăgătoare sau este în repaus, sau înaintează uniform în linie dreaptă; corpul atras se va mișca pe o elipsă, avînd centrul în acel centru comun de greutate al celor atrăgătoare.

PROPOZIȚIA XC. PROBLEMA XLIV

Dacă spre diversele puncte ale unui cerc oarecare tind forțe centripete egale, crescînd sau descrescînd între un raport oarecare al distanțelor: să aflăm forța, cu care este atras un corpusul situat undeva pe o dreaptă, care stă perpendicular pe planul cercului în centrul lui.

Din centrul A cu un interval oarecare AD , într-un plan pe care dreapta AP este perpendiculară, să ne închipuim descris un cerc; și trebuie să aflăm forța, cu care este atras spre el un corpusul oarecare P . Dintr-un punct oarecare E al cercului să ducem la corpusul atras P dreapta PE . Pe dreapta PA să luăm PF egal cu PE , și să ridicăm normala FK , care este precum forța cu care punctul E atrage corpusul P . Și fie IKL linia curbă pe care se află încontinuu punctul K . Să întâlnească planul cercului în L . Pe PA să luăm PH egal cu PD , și să ridicăm perpendiculara HI întîlnind curba menționată în I ; și va fi atracția corpusulului P spre cerc precum aria $AHIL$ înmulțită cu înălțimea AP . Q.E.I.



Căci să luăm pe AE linia cît se poate de mică Ee . Să unim Pe , și pe PE , PA să luăm PC , Pf egale cu Pe . Și fiindcă forța, cu care un punct oarecare E al inelului descris din centrul A cu intervalul AE în planul menționat atrage la sine corpul P , presupunem a fi precum FK , și deci forța, cu care acel punct atrage corpul P spre A , este precum $\frac{AP \times FK}{PE}$, și forța cu care inelul întreg atrage corpul P spre A , precum inelul și $\frac{AP \times FK}{PE}$ luate împreună; dar inelul este precum dreptunghiul format de raza AE și lățimea Ee , și acest dreptunghi (deoarece PE și AE , Ee și CE sînt proporționale) este egal cu dreptunghiul $PE \times CE$ sau $PE \times Ff$; forța cu care inelul atrage corpul P spre A , va fi precum $PE \times Ff$ și $\frac{AP \times FK}{PE}$ luate împreună, adică, precum cel cuprins de $Ff \times FK \times AP$, sau precum aria $FKkf$ înmulțită cu AP . Și de aceea suma forțelor, cu care toate inelele în cercul descris din centrul A și cu intervalul AD , atrag corpul P spre A , este precum aria întreagă $AHIKL$ înmulțită cu AP . Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă forțele punctelor descresc ca pătratul distanțelor, adică, dacă FK este precum $\frac{1}{PF^2}$ și de aceea aria $AHIKL$ precum $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$, atracția corpusulului spre cerc va fi precum $1 - \frac{PA}{PH}$, adică precum $\frac{AH}{PH}$.

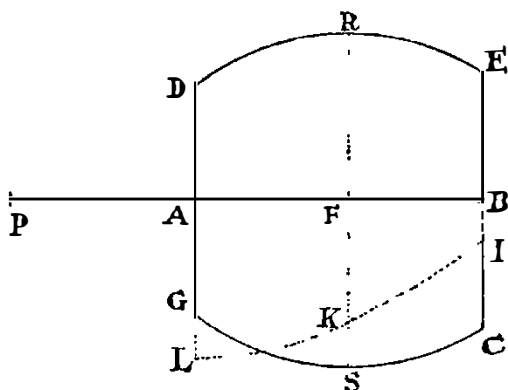
COROLARUL 2. Și în general, dacă forțele punctelor la distanțele D sînt în raport invers cu o putere oarecare D^n a distanțelor, adică dacă FK este precum $\frac{1}{D^n}$, și deci aria $AHIKL$ precum $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; atracția corpusulului P spre cerc va fi precum $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

COROLARUL 3. Și dacă diametrul cercului crește la infinit, și numărul n este mai mare ca unitatea; atracția corpusculului P spre planul întreg infinit va fi în raport invers cu PA^{n-2} , fiindcă celălalt termen $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ dispare.

PROPOZIȚIA XCI. PROBLEMA XLV

Să aflăm atracția unui corpuscul situat pe axa unui solid rotund, spre ale cărei diverse puncte tind forțe centripete egale descrescând după un raport oarecare al distanțelor.

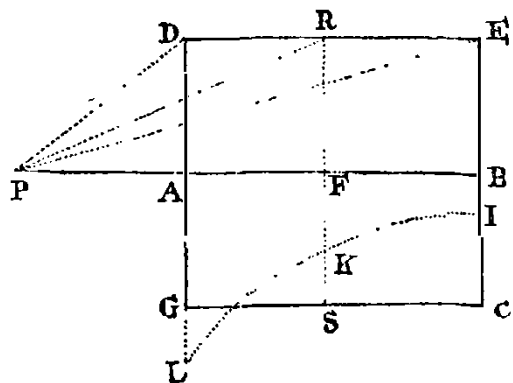
Spre solidul $DECG$ fie atras corpusculul P , situat pe axa AB a lui. Cu un cerc oarecare RFS perpendicular pe această axă să tăiem solidul,



și pe semidiametrul său FS , într-un plan oarecare $PALKB$ trecînd prin axă, să luăm (potrivit propoziției XC) lungimea FK proporțională cu forța, cu care corpusculul P este atras spre cerc. Dar să atingă punctul K linia curbă LKI , întîlnind planele cercurilor celor mai îndepărtate AL și BL în L și I ; și atracția corpusculului P spre solid va fi precum aria $LABI$. Q.E.I.

COROLARUL 1. De unde dacă solidul este un cilindru descris de paralelogramul $ADEB$ învîrtit în jurul axei AB , și forțele centripete tinzînd spre diversele puncte sînt în raport invers cu pătratele distanțelor de la puncte: atracția corpusculului P spre acest cilindru va fi precum $AB - PE + PD$. Căci ordonata FK (potrivit corolarului 1, propoziția XC) va fi precum $1 - \frac{PF}{PR}$. Partea 1 a acestuia înmulțită cu lungimea AB , va descrie aria

$1 \times AB$: și partea cealaltă $\frac{PF}{PR}$ înmulțită cu lungimea PB , va descrie aria 1 înmulțită cu $(PE - AD)$, ceea ce se poate arăta ușor din cvadratura curbei LKI ; și la fel aceeași parte înmulțită cu lungimea PA va descrie aria 1 înmulțită cu $(PD - AD)$, și înmulțită cu diferența AB a lui PB , PA va descrie diferența ariilor 1 înmulțit cu $PE - PD$. Din primul cuprins $1 \times AB$ să scădem cuprinsul al doilea 1 înmulțit cu $(PE - PD)$, și va rămîne aria $LABI$ egală cu 1 înmulțit cu $(AB - PE + PD)$. Așadar forța, proporțională cu această arie, este precum $AB - PE + PD$.

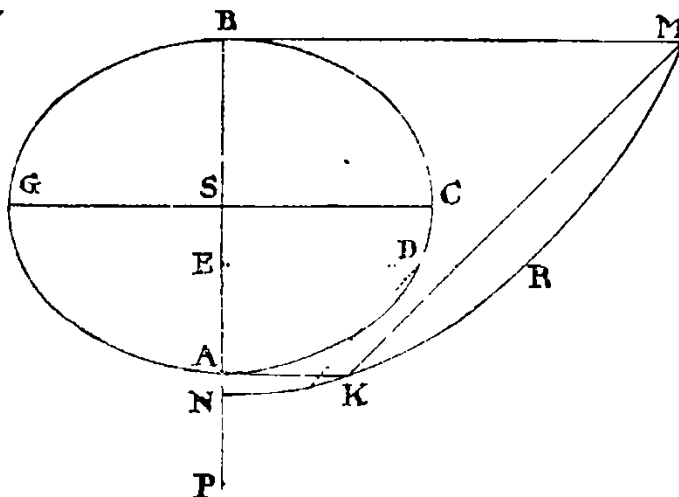


COROLARUL 2. De aici se cunoaște și forța, cu care sferoidul $AGBC$ atrage un corp oarecare P , situat în afară pe axa lui. Fie $NKRM$ secțiunea conică a cărei ordonată ER , perpendiculară pe PE , să fie totdeauna egală

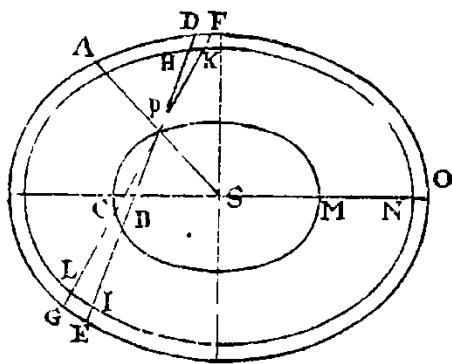
cu lungimea PD , dusă la punctul D , în care ac^eastă ordonată taie sferoidul. Din vîrfurile A , B ale sferoidului pe axa AB a acelaia să ridicăm perpendicularele AK , BM egale respectiv cu AP , BP , și de aceea întîlnind secțiunea conică în K și M ; și să unim KM tăind din ea segmentul $KMRK$. Fie însă centrul S al sferoidului și semidiametrul maxim SC : și forța, cu care sferoidul atrage corpul P , va fi către forța, cu care sfera descrisă cu diametrul AB atrage același corp

P precum $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^3 + CS^2 - AS^2}$

către $\frac{AS^3}{3PS^2}$. Și printr-un calcul analog se pot afla forțele segmentelor sferoidului.



COROLARUL 3. Căci dacă corpusculul se plasează în interiorul sferoidului pe axă; atracția va fi precum distanța lui de la centru. Ceea ce se demonstrează mai ușor prin următorul raționament, fie că particula se află pe axă sau pe alt diametru oarecare dat. Fie $AGOF$ sferoidul atrăgător, S centrul lui, și P corpul atras. Prin corpul P să ducem atît semidiametrul SPA , cît și două drepte oarecare DE , FG întîlnind sferoidul în D și E , F și G ; și fie PCM , HLN suprafețele a doi sferoizi interiori, asemenea și concentrice cu cel exterior, dintre care cel dintîi să treacă prin corpul P , și să taie dreptele DE și FG



în B și C , cel din urmă să taie aceleași drepte în H , I și K , L . Să aibă însă toți sferoizii o axă comună, și vor fi părțile dreptelor interceptate DP și BE , FP și CG , DH și IE , FK și LG egale între ele; fiindcă dreptele DE , PB și HI se bisectează în același punct, ca și dreptele FG , PC și KL . Să ne închipuim că DPF , EPG înseamnă conuri opuse, descrise cu unghiurile verticale DPF , EPG infinit de mici, și că liniile DH , EI de asemenea sînt infinit de mici; și particulele $DHKF$ $GLIE$ ale

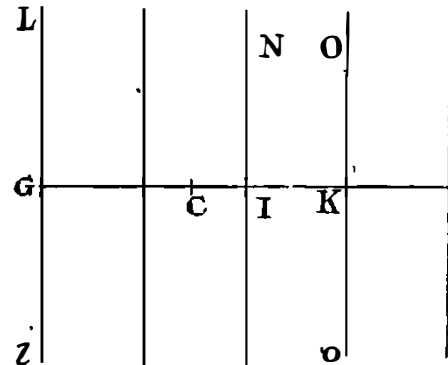
conurilor tăiate din suprafețele sferoizilor, din cauza egalității liniilor DH , EI , vor fi una față de alta precum pătratele distanțelor lor de la corpusculul P , și de aceea vor atrage corpusculul în mod egal. Și printr-un raționament analog, dacă spațiile DPF , $EGCB$ se împart în particule de către suprafețele sferoizilor nenumărați asemenea concentrice și avînd o axă comună, acestea atrag din toate părțile corpul P în părți contrarii. Prin urmare forțele conului DPF și ale segmentului conic $EGCB$ sînt egale, și prin opoziție se nimicesc reciproc. Și la fel este cazul forțelor întregii materii în afara sferoidului celui mai dinlăuntru $PCBM$. Așadar corpul P este atras numai de sferoidul cel mai dinlăuntru $PCBM$, și de aceea (potrivit corolarului 3, propoziția LXXII) atracția lui este către forța, cu care corpul A este atras de sferoidul întreg $AGOD$, precum distanța PS către distanța AS . Q.E.D.

$LGloKO$ a solidului terminată de planele paralele lGL , oKO , nu atrage corpusculul C situat în mijloc în nici o parte, acțiunile contrarii ale punctelor opuse distrugându-se reciproc din cauza egalității. Prin urmare corpusculul C este atras numai prin forța solidului situat dincolo de planul OK . Dar această forță (potrivit primului caz) este în raport invers cu CK^{n-3} adică (deoarece CG , CK sînt egale) invers cu CG^{n-3} . Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă solidul $LGIN$ se termină de toate părțile prin două plane infinite paralele LG , IN , forța lui atractivă se cunoaște, scăzînd din forța atractivă a solidului întreg infinit $LGKO$ forța atractivă a părții din urmă $NIKO$, prelungită la infinit spre KO .

COROLARUL 2. Dacă partea din urmă a acestui solid infinit, se înlătură, pentru că atracția lui comparată cu atracția părții apropiate este fără importanță: atracția acelei părți apropiate mărind distanța va descrește aproape în raportul puterii CG^{n-3} .

COROLARUL 3. Și de aici dacă un corp oarecare finit și plan de o parte atrage un corpuscul din regiunea mijlocie a acelu plan, și distanța dintre corpuscul și plan comparată cu dimensiunile corpului atrăgător este extrem de mică, dar corpul atrăgător constă din particule omogene ale căror forțe atractive descresc după un raport oarecare mai mare ca puterea a patra a distanțelor; forța atractivă a întregului corp va descrește aproape în raportul puterii, a cărei latură este acea distanță foarte mică și indicele cu trei mai mic decît indicele puterii de mai înainte. Această afirmație nu este valabilă pentru un corp constînd din particule ale căror forțe atractive descresc în raportul puterii a treia a distanțelor; fiindcă, în acest caz atracția părții din urmă a corpului infinit în corolarul 2 este totdeauna infinit mai mare ca atracția părții dinainte.



SCOLIE

Dacă un corp oarecare este atras perpendicular spre un plan dat, și din legea dată a atracției se caută mișcarea corpului: problema se va rezolva căutînd (potrivit propoziției XXXIX) mișcarea corpului descinzînd pe o dreaptă pe acest plan, și (potrivit corolarului II al legilor) compunînd această mișcare cu mișcarea uniformă, efectuată după linii paralele cu acel plan. Și invers, dacă se caută legea atracției tinzînd spre un plan după linii perpendiculare cu condiția ca corpul atras să se miște pe o linie curbă oarecare dată, problema se va rezolva operînd după modelul problemei III.

Dar operațiunile se pot contrage rezolvînd ordonatele în serii convergente. Astfel dacă la baza A într-un unghi oarecare dat se aplică lungimea B ca ordonată care este ca o putere oarecare $A^{\frac{m}{n}}$ a bazei; și se caută forța cu care un corp atras spre bază sau respins de la bază după direcția poziției ordonatei, se poate mișca pe o linie curbă, pe care ordonata totdeauna o descrie cu capătul ei superior: presupun că baza se mărește cu o parte cît se poate de mică O , și rezolv ordonata $(A + O)^{\frac{m}{n}}$ într-o serie infinită

$A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} OA^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m^2 - mn}{2n^2} O^2 A^{\frac{m-2n}{n}}$ etc. și presupun că forța este proporțională cu termenul acesteia în care O este de două dimensiuni, adică cu termenul $\frac{m^2 - mn}{2n^2} O^2 A^{\frac{m-2n}{n}}$. Prin urmare forța căutată este precum $\frac{m^2 - mn}{n^2} A^{\frac{m-2n}{n}}$, sau, ceea ce este același lucru, precum $\frac{m^2 - mn}{n^2} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Astfel dacă ordonata descrie parabola, fiind $m = 2$, și $n = 1$: forța va fi precum cantitatea dată $2B^0$, și deci va fi cunoscută. Așadar dată fiind forța, corpul se va mișca pe o parabolă, după cum a demonstrat Galileu. Căci dacă ordonata descrie o hiperbolă, fiindcă $m = 0 - 1$ și $n = 1$; forța va fi precum $2A^{-3}$ sau $2B^3$: și astfel, corpul se va mișca cu forță care este precum cubul ordonatei pe o hiperbolă. Dar lăsînd de o parte propozițiile de acest fel trec la altele referitoare la mișcare, pe care nu le-am tratat încă.

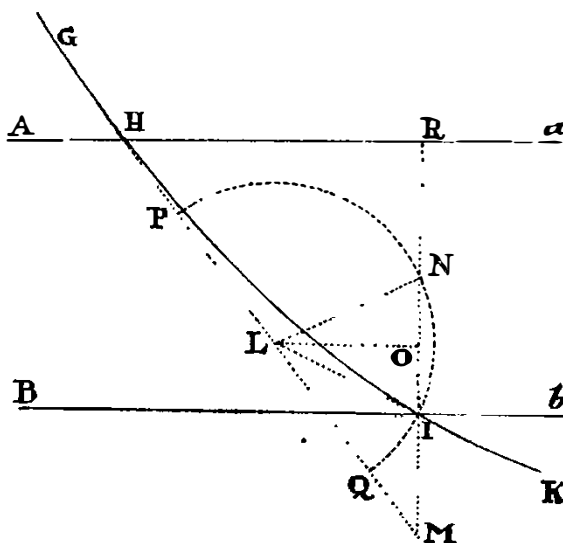
SECȚIUNEA XIV

Despre mișcarea corpurilor foarte mici care sînt agitate de forțe centripete tinzînd spre diverse părți ale unui corp oarecare mare

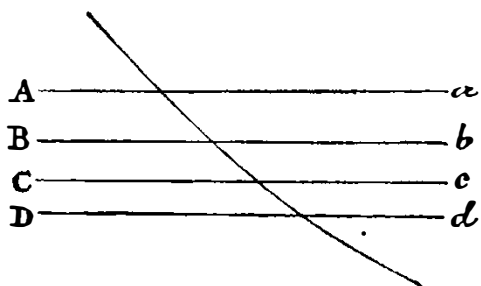
PROPOZIȚIA XCIV. TEOREMA XLVIII

Dacă două medii asemenea sînt separate unul de altul printr-un spațiu terminat de toate părțile prin plane paralele, și corpul în trecerea prin acest spațiu este atras sau împins perpendicular spre unul din cele două medii, și nici nu este agitat sau împiedicat de vreo altă forță, însă atracția, la distanțe egale de fiecare plan luate de aceeași parte, este pretutindenea aceeași: zic că sinusul de incidență într-unul din cele două plane va fi către sinusul de emergență din celălalt plan într-un raport dat.

CAZUL 1. Fie Aa , Bb două plane paralele. Să presupunem că corpul cade în primul plan Aa după linia GH , și în trecerea lui întreagă prin spațiul intermediar este atras sau respins spre mediul de incidență, și prin aceea acțiune să descrie linia curbă HI , și să iasă după linia IK . Pe planul de emergență Bb să ridicăm perpendiculara IM , întîlnind atît linia de incidență GH prelungită în M , cît și planul de incidență Aa în R ; și linia de emergență KI prelungită să întîlnească HM în L . Din centrul L cu intervalul LI să descriem un cerc, tăind atît pe HM în P și Q , cît și pe MI prelungită în N ; și mai întii dacă presupunem că atracția sau impulsul sînt uniforme, curba HI (din demonstrațiile lui Galileu) va fi o parabolă, care are proprietatea, că dreptunghiul format de parametrul și linia IM este egal cu pătratul lui HM ; dar și linia HM va fi bisectată în L . De unde dacă pe MI se coboară perpendiculara LO , MO ; OR vor fi egale; și adunînd pe cele egale ON , OI , întregii MN , IR vor fi egali. Deci cum IR este dat, MN de asemenea este dat; și dreptunghiul NMI este către dreptunghiul format de parametru și de IM , adică, către HM^2 , într-un raport dat. Dar dreptunghiul NMI este egal cu dreptunghiul PMQ , adică, cu diferența pătratelor ML^2 , și PL^2 sau LI^2 ; și HM^2 are un raport dat către a patra parte a sa ML^2 : așadar se dă raportul $ML^2 - LI^2$ către ML^2 , și convertind raportul LI^2 către ML^2 , și raportul rădăcinii pătrate LI către ML . Dar în orice triunghi LMI , sinusurile unghiurilor sînt proporționale cu laturile opuse. Prin urmare este dat raportul sinusului unghiului de incidență LMR către sinusul unghiului de emergență LIR . Q.E.D.



CAZUL 2. Să presupunem acum că corpul trece succesiv prin mai multe spații terminate de plane paralele $AabB$, $BbcC$ etc. și fie acționat de o forță care este separat uniformă în fiecare din ele, dar în diverse este diversă; și potrivit celor demonstrate sinusul de incidență în primul plan Aa va fi către

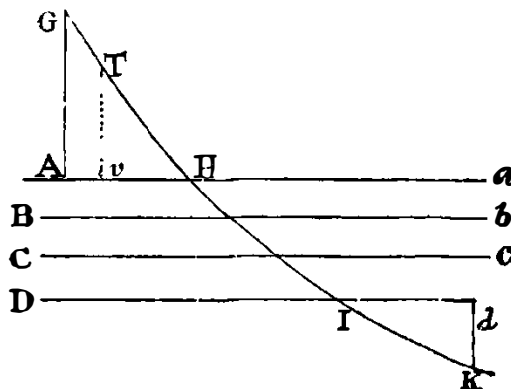


sinusul de emergență din al doilea Bb , într-un raport dat; și acest sinus, care este sinusul de incidență în planul al doilea Bb , va fi către sinusul de emergență din planul al treilea Cc , într-un raport dat; și acest sinus către sinusul de emergență din planul al patrulea Dd , într-un raport dat; și așa la infinit: și prin egalitate, sinusul de incidență din primul plan către sinusul de emergență din planul ultim într-un raport dat. Să micșorăm acum intervalele planelor și să mărim numărul la infinit, în așa fel ca acțiunea atracției sau impulsului, după o lege oarecare dată, să devină continuă, și raporturile sinusului de incidență din primul plan către sinusul de emergență din planul ultim, fiind totdeauna dat, de asemenea va fi dat. Q.E.D.

PROPOZIȚIA XCV. TEOREMA XLIX

Fiind presupuse aceleași: zic că viteza corpului înainte de incidență este către viteza lui după emergență, precum sinusul de emergență către sinusul de incidență.

Să luăm AH , Id egale și să ridicăm perpendicularele AG , dK întâlnind liniile de incidență și emergență GH , IK , în G și K . Pe GH să luăm TH egal cu IK , și să coborâm pe planul Aa normal pe Tv . Și (potrivit corolarului II al legilor) să descompunem mișcarea corpului în două, una perpendiculară pe planele Aa , Bb , Cc etc. cealaltă paralelă cu ele. Forța de atracție sau de respingere, acționând după linii perpendiculare, nu schimbă întru nimic mișcarea în direcția paralelelor și de aceea corpul prin această mișcare va parcurge în timpuri egale în direcția paralelelor intervale egale, care sînt între linia AG și punctul H , și între punctul I și linia dK adică, în timpuri egale va descrie liniile GH , IK . Așadar viteza înainte de incidență este către viteza după emergență, precum GH către IK sau TH , adică precum AH sau Id către vH , adică (considerînd ca rază TH sau IK) precum sinusul de emergență către sinusul de incidență. Q.E.D.

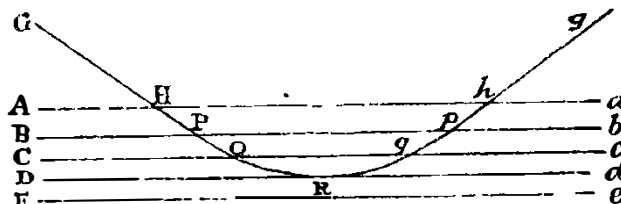


PROPOZIȚIA XCVI. TEOREMA L

Fiind presupuse aceleași, și că mișcarea înainte de incidență este mai repede decît după aceea: zic că corpul înclinînd linia de incidență în sfîrșit se reflectă, și unghiul de reflexie va fi egal cu unghiul de incidență.

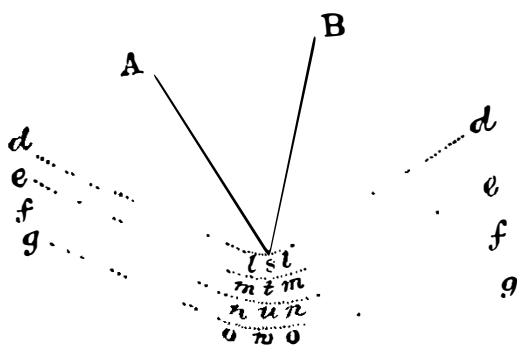
Căci să ne închipuim că un corp între planele paralele Aa , Bb , Cc etc., descrie arce parabolice, ca mai sus; și fie arcele HP , PQ , QR etc. Și fie

oblicitatea liniei de incidență GH către primul plan Aa , precum sinusul de incidență către raza cercului, al cărui sinus este, în raportul pe care-l are același sinus de incidență către sinusul de emergență din planul Dd , în spațiul $DdeE$: și deoarece sinusul de emergență acum este făcut egal cu raza, unghiul de emergență va fi drept și deci linia de emergență va coincide cu planul Dd . Să ajungă corpul la acest plan în punctul R ; și fiindcă linia de emergență coincide cu planul este evident că corpul nu poate merge mai departe spre planul Ee . Dar el nu poate înainta nici pe linia de emergență Rd , fiindcă încontinuu este atras sau respins spre mediul de incidență. De aceea se întoarce între planele Cc , Dd , descriind arcul parabolei QRq , al cărei vîrf principal (potrivit celor demonstrate de *Galileu*) este în R ; va tăia planul Cc după același unghi în q ca mai înainte în Q ; apoi mergînd pe arcele parabolice qp , ph etc. asemenea și egale cu arcele de mai înainte QP , PH , va tăia planele rămase după aceleași unghiuri în p , h , etc. ca și mai înainte în P , H etc. și în sfîrșit va ieși cu aceeași oblicitate în h , cu care a intrat în H . Să ne închipuim acum că intervalele planelor Aa , Bb , Cc , Dd , Ee etc. se micșorează la infinit și numărul crește, în așa fel că acțiunea de atracție sau de respingere exercitată după o lege oarecare devine continuă; și unghiul de emergență rămînînd totdeauna egal cu unghiul de incidență va rămînea și acum egal cu el. Q.E.D.



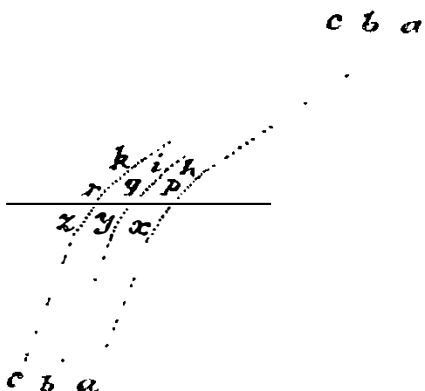
SCOLIE

Cu aceste atracții sînt foarte asemănătoare reflexiile și refracțiile luminii făcute după un raport dat al secantelor, după cum a aflat *Snellius*, și în consecință după un raport dat al sinusurilor, după cum a expus-o *Descartes*. Căci acum s-a verificat prin fenomenele sateliților lui *Jupiter* confirmate prin observațiile diversilor astronomi că lumina se propagă succesiv și vine de la Soare la Pămînt în timp de șapte sau opt minute. Dar razele care sînt în aer (după cum de mult a aflat *Grimaldi* lăsînd să intre lumina printr-o deschidere într-o cameră întunecoasă, și eu însumi am experimentat-o în trecerea lor pe lîngă unghiuri-



le corpurilor fie opace fie transparente cum sînt marginile dreptunghiulare circulare ale banilor bătuți din aur, argint și cupru și tăișul cuțitelor pietrilor sau al sticlelor sparte) se îndoiesc în jurul corpurilor, ca și cum ar fi atrase spre ele; și dintre aceste raze acele care în trecerea lor se apropie mai mult de corpuri se îndoiesc mai mult, ca și cînd ar fi atrase mai mult, după cum și eu am observat cu diligență. Și cele care trec la distanțe mai mari se îndoiesc mai puțin; și la distanțe și mai mari se îndoiesc într-o cîțva de părți contrare, și formează trei fascicule de culori. Pe figură să însemne s tăișul unui cuțit sau pene oarecare AsB și $gowog$, $fnunf$, $emtme$, $dlsld$ sînt raze îndoite spre cuțit cu arcele

owo, nun, mtm, lsl; și anume mai mult sau mai puțin după distanța lor de la cuțit. Cum însă o astfel de îndoire a razelor are loc în aer în afara cuțitului, vor trebui și razele care cad pe cuțit să se îndoiască în aer înainte



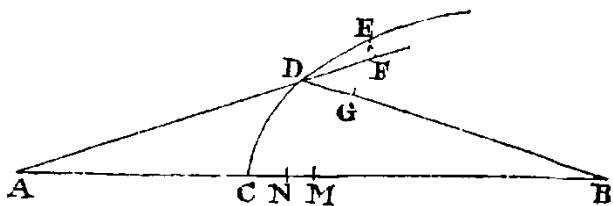
de a atinge cuțitul. Și la fel este cazul celor ce cad pe sticlă. Deci refracția nu se întâmplă în punctul de incidență, ci pe încetul prin curbura continuă a razelor, făcută parte în aer înainte de a atinge sticla, parte (dacă nu mă înșel) în sticlă după ce au intrat în ea: așa cum s-a schițat prin razele *ckzc*, *biyb*, *ahxa*, căzînd pe *r*, *q*, *p* și îndoite între *k* și *z*, *i* și *y*, *h* și *x*. Prin urmare din cauza analogiei care este între propagarea razelor de lumină și înaintarea corpurilor, mi s-a părut potrivit să adaug următoarele propoziții

în folosul optice; fără a discuta natura razelor (dacă sînt corpuri sau nu), ci determinînd numai traiectoriile corpurilor foarte asemănătoare cu traiectoriile razelor.

PROPOZIȚIA XCVII PROBLEMA XLVII

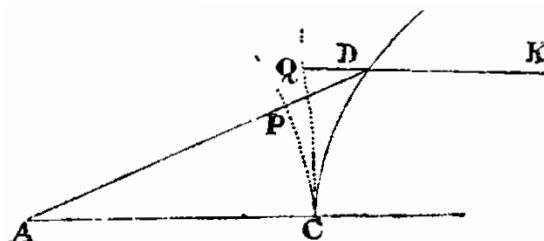
Presupunînd că sinusul de incidență pe o suprafață oarecare este către sinusul de emergență după un raport dat; și că îndoirea traiectoriei corpurilor lângă acea suprafață are loc într-un spațiu foarte scurt, care poate fi considerat ca un punct: să determinăm suprafața care poate face ca toate corpusculele emanînd succesiv dintr-un loc dat să convergă spre un alt loc dat.

Fie *A* locul dinspre care diverg corpusculele, *B* locul spre care trebuie să convergă; *CDE* linia curbă care rotită în jurul axei *AB* va descrie suprafața căutată; *D*, *E* două puncte oarecare ale curbei; și *EF*, *EG* perpendicularele coborîte pe traiectoriile *AD*, *DB* ale corpului. Să se apropie punctul *D* de punctul *E*; și raportul ultim al liniei *DF*, cu care *AD* se mărește, către linia *DG*, cu care *DB* se micșorează, va fi același ca cel al sinusului de incidență către sinusul de emergență. Prin urmare se dă raportul creșterii liniei *AD* către descreșterea liniei *DB*; și de aceea dacă pe axa *AB* se ia undeva punctul *C*, prin care trebuie să treacă curba *CDE*, și se ia creșterea *CM* al lui *AC* către descreșterea *CN* al lui *BC* în acel raport dat, și din centrele *A*, *B*, și cu intervalele *AM*, *BN* se descriu două cercuri tăindu-se reciproc în *D*; punctul *D* va atinge curba căutată *CDE* și întîlnind-o undeva o va determina. Q.E.I.



COROLARUL 1. Făcînd însă ca punctul *A* sau *B* cînd să se îndepărteze la infinit cînd să treacă de celelalte părți ale punctului *C*, se vor avea toate figurile pe care le-a expus *Descartes* în optică și geometrie la refracții. A căror aflare *Descartes* ascunzînd-o a fost necesar să o expun în această propoziție.

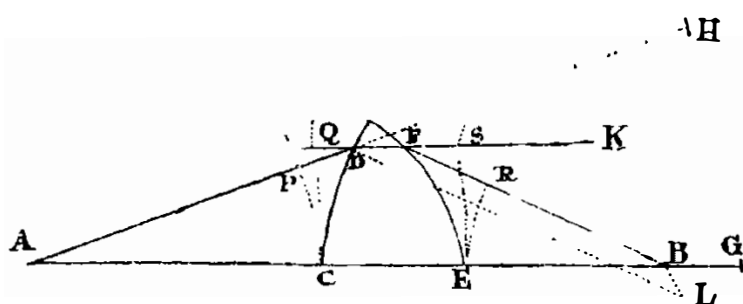
COROLARUL 2. Dacă un corp căzînd pe o suprafață oarecare CD , după linia dreaptă AD , dusă după o lege oarecare, iese după o altă dreaptă oarecare DK , și din punctul C ne închipuim duse liniile curbe CP , CQ totdeauna perpendiculare pe AD , DK : creșterile liniilor PD , QD și deci înseși liniile PD , QD născute de aceste creșteri, vor fi ca sinusurile de incidență și emergență între ele și invers.



PROPOZIȚIA XCVIII. PROBLEMA XLVIII

Fiind presupuse aceleași, și în jurul axei AB fiind descrisă o suprafață atractivă oarecare CD , regulată sau neregulată, prin care corpurile ieșind din locul dat A trebuie să treacă, să aflăm o a doua suprafață atractivă EF , care face ca corpurile să convergă spre locul dat B .

Linia ce unește AB să taie prima suprafață în C și pe a doua în E , punctul D fiind luat ori-



cum. Și punînd sinusul de incidență din prima suprafață către sinusul de emergență din aceeași, și sinusul de emergență din suprafața a doua către sinusul de incidență în aceeași, precum o cantitate oarecare dată M către

o alta dată N ; să prelungim atît pe AB pînă în G , ca să fie BG către CE precum $M - N$ către N ; cît și pe AD pînă în H , ca să fie AH egal cu AG ; precum și de asemenea DF pînă în K , ca să fie DK către DH precum N către M . Să unim KB și din centrul D cu intervalul DH să descriem un cerc întîlnind în LKB prelungit, și să ducem BF paralel cu DL : și punctul F fie pe linia EF , care rotită în jurul axei AB va descrie suprafața căutată. Q.E.F.

Căci să ne închipuim că liniile CP , CQ , sînt undeva perpendiculare respectiv pe AD , DF , și liniile ER , ES pe FB , FD , și deci QS este totdeauna egal cu CE ; și va fi (potrivit corolarului 2, propoziția XCVII) PD către QD precum M către N , și deci precum DL către DK sau FB către FK ; și separînd precum $DL - FB$ sau $PH - PD - FB$ către FD sau $FQ - QD$; și compunînd precum $PH - FB$ către FQ , adică (din cauza că PH și CG , QS și CE sînt egale) $CE + BG - FR$ către $CE - FS$. Dar (fiindcă BG este proporțional cu BG și $M - N$ cu N) este și $CE + BG$ către CE precum M către N ; și deci separînd FR către FS precum M către N ; și de aceea (potrivit corolarului 2, propoziția XCVII) suprafața EF constringe corpul, căzînd pe ea după linia DF , să meargă pe linia FR la locul B . Q.E.D.

S C O L I E

În același mod se poate trece la trei sau mai multe suprafețe. Dar pentru scopuri optice sînt mai potrivite figurile sferice. Dacă sticlele obiective ale lunetelor ar fi construite din două sticle de formă sferică și închizînd între ele apă, se poate întîmpla ca erorile de refracție care au loc în suprafețele extreme ale sticlelor să fie corectate destul de precis de refracțiile apei. Dar astfel de sticle obiective trebuie preferate sticlelor eliptice și hiperbolice, nu numai fiindcă se pot forma mai ușor și mai precis, ci și fiindcă refractează mai precis fasciculele razelor situate în afară de axa sticlei. Dar refrangibilitatea diferită a diverselor raze este obstacolul care împiedică perfecționarea instrumentelor optice prin figuri fie sferice fie de alte forme oarecare. Pînă ce nu se pot corecta erorile ce provin de aici, orice efort de a corecta pe celelalte va fi cheltuit zadarnic.

CARTE I A II-a

DESPRE MIȘCAREA CORPURILOR

SECȚIUNEA I

Despre mișcarea corpurilor cărora li se opune o rezistență în raport cu viteza

PROPOZIȚIA I. TEOREMA I

Un corp, căruia i se opune o rezistență în raport cu viteza, pierde prin rezistență o mișcare proporțională cu spațiul descris prin mișcare.

Căci fiindcă mișcarea pierdută în diversele părțicele de timp este proporțională cu viteza, adică, cu o părțică a drumului parcurs: compunînd, mișcarea pierdută în timpul întreg va fi proporțională cu drumul întreg. Q.E.D.

COROLAR. De aceea dacă un corp, lipsit de orice greutate, se mișcă în spații libere numai prin forța inerentă; și se dă atît mișcarea întreagă de la început, cît și mișcarea rămasă după ce s-a parcurs un spațiu oarecare: va fi dat spațiul întreg pe care îl poate descrie corpul într-un timp infinit. Căci acel spațiu va fi către spațiul deja descris, precum mișcarea întreagă de la început către partea pierdută a acelei mișcări.

LEMA I

Cantitățile proporționale cu diferențele lor sînt continuu proporționale.

Fie A către $A-B$ precum B către $B-C$ și C către $C-D$ etc. și prin conversiune va fi A către B precum B către C și C către D etc. Q.E.D.

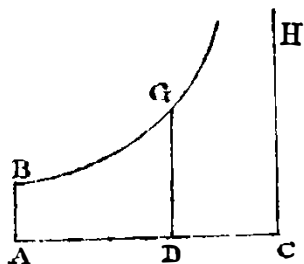
PROPOZIȚIA II. TEOREMA II

Dacă unui corp i se opune o rezistență în raport cu viteza, și el se mișcă numai prin forța inerentă într-un mediu similar, iar timpurile se iau egale: vitezele la începutul diverselor timpuri sînt în progresie geometrică, și spațiile descrise în diversele timpuri sînt proporționale cu vitezele.

CAZUL 1. Să împărțim timpul în intervale egale; și dacă la începuturile intervalelor forța de rezistență acționează cu un impuls unic, care este precum viteza: descreșterea vitezei în diversele intervale de timp va fi precum însăși viteza. Prin urmare vitezele sînt proporționale cu diferențele lor, și de aceea (potrivit lemei I, Cartea a II-a) continui proporționale. În consecință dacă dintr-un număr egal de intervale se compun oarecare timpuri egale, vitezele la începutul timpurilor, vor fi precum termenii într-o progresie continuă, care se iau pe sărite, omițînd totdeauna un număr egal de termeni intermediari. Dar rapoartele acestor termeni se compun din rapoartele acelorăși termeni intermediari repetați în mod egal, și de aceea și rapoartele compuse între ele sînt aceleași. Așadar vitezele, proporționale cu acești termeni, sînt în progresie geometrică. Căci să scădem intervalele egale ale timpurilor, și să mărim numărul lor la infinit, astfel ca impulsul rezistenței să devină continuu; și vitezele la începutul timpurilor egale, totdeauna continuu proporționale, vor fi și în acest caz continuu proporționale. Q.E.D.

CAZUL 2. Și separînd diferențele vitezelor, adică părțile lor pierdute în diversele timpuri, sînt precum cele întregi: dar spațiile descrise în diversele timpuri sînt precum părțile pierdute ale vitezelor (potrivit propoziției I, Cartea a II-a) și de aceea și precum cele întregi. Q.E.D.

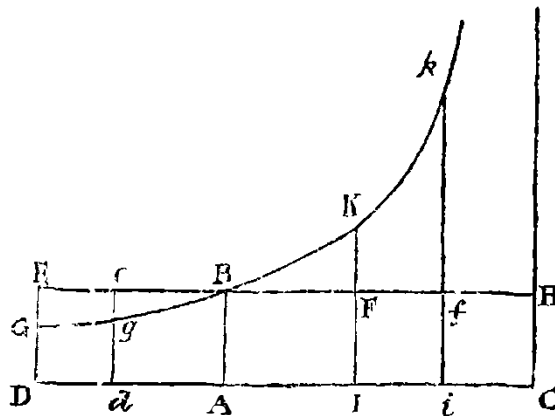
COROLAR. De aici dacă la asimptotele dreptunghiulare AC , CH , descriem hiperbola BG , și AB , DG sînt perpendiculare pe asimptota AC , și reprezentăm atît viteza corpului cît și rezistența mediului, la începutul mișcării, printr-o linie oarecare dată AC , iar după trecerea unui timp oarecare prin linia indefinită DC : timpul se poate exprima prin aria $ABGD$, și spațiul descris în acel timp prin linia AD . Căci dacă acea arie prin mișcarea punctului D se mărește în mod uniform la fel cu timpul, dreapta DC va descrește în raport geometric la fel cu viteza, și părțile dreptei AC descrise în timpuri egale vor descrește în același raport.



PROPOZIȚIA III. PROBLEMA I

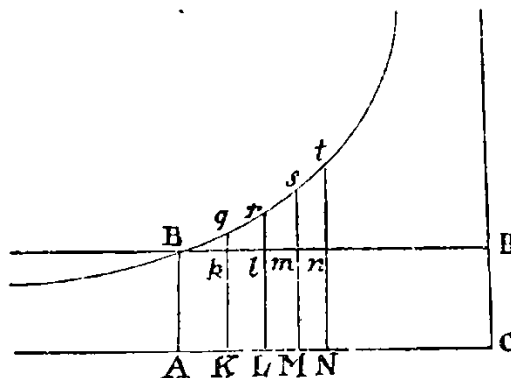
Să definim mișcarea unui corp, căruia în timp ce se urcă sau coboară pe o dreaptă într-un mediu omogen, i se opune o rezistență în raport cu viteza și care este acționat de gravitate.

Corpul urcîndu-se, să exprimăm gravitatea printr-un dreptunghi oarecare dat $BACH$, și rezistența mediului la începutul urcării prin dreptunghiul $BADE$ luat de părți contrare ale dreptei AB . Prin punctul B să descriem o hiperbolă tăind perpendicularele DE , de în G , g , cu asimptotele dreptunghiulare Ac , CH ; și corpul urcînd în timpul $DGdg$ va descrie spațiul $EGge$, în timpul $DGBA$ spațiul întregii urcări EGB ; în timpul $ABKI$ spațiul coborîrii BFK , și în timpul $IKki$



spațiul coborîrii $KFfk$; și vitezele corpului (proportionale cu rezistența mediului) în intervalele acestor timpuri vor fi respectiv $ABED$, $ABed$, zero, $ABFI$, $ABfi$; și viteza maximă, pe care corpul o poate cîștiga coborînd, va fi $BACH$.

Căci să descompunem dreptunghiul $BACH$ în nenumărate dreptunghiuri Ak , Kl , Lm , Mn etc., care să fie precum creșterile vitezelor efectuate în tot atîtea timpuri egale; și vor fi zero, Ak , Al , Am , An etc., precum vitezele întregi, și deci (prin ipoteză) precum rezistențele mediului la începutul diverselor timpuri egale. Fie AC către AK sau $ABHC$ către $ABkK$ precum forța gravității către rezistența la începutul timpului al doilea, și din forța gravității să se scadă rezistențele, și vor rămîne $ABHC$, $KkHC$, $LlHC$, $MmHC$ etc. precum forțele absolute cu care este acționat corpul la începutul diverselor timpuri, și deci (potrivit legii II a mișcării) precum creșterile vitezelor, adică, precum dreptunghiurile Ak , Kl , Lm , Mn etc. și deci (potrivit lemei I, Cartea a II-a) în progresie geometrică. De aceea dacă dreptele Kk , Ll , Mm , Nn etc. prelungite întîlnesc hiperbola în q , r , s , t etc. ariile $ABqK$, $KqrL$, $LrsM$, $MstN$ etc. vor fi egale și deci analoge atît cu timpurile cît și cu forțele gravitaționale totdeauna egale. Dar aria $ABqK$ (potrivit corolarului 3, lema VII și lema VIII, Cartea I) este către aria BKq , precum Kq către $\frac{1}{2} kq$, sau AC către $\frac{1}{2} AK$, adică precum forța gravității către rezistența la mijlocul primului timp. Și printr-un raționament analog ariile $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$ etc. sînt către ariile $qklr$, $rlms$, $smnt$ etc. precum forțele gravității către rezistențele la mijlocul timpului al doilea, al treilea, al patrulea etc. Prin urmare cum ariile egale $BAKq$, $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$ etc. sînt analoge cu forțele gravități, ariile Bkq , $qklr$, $rlms$, $smnt$ etc., vor fi analoge cu rezistențele la mijlocul diverselor timpuri, adică (prin ipoteză) cu vitezele, și deci cu spațiile descrise. Să luăm sumele celor analoge, și vor fi ariile Bkq , Blr , Bms , Bnt etc. analoge cu spațiile întregi descrise; iar ariile $ABqK$, $ABrL$, $ABsM$, $ABtN$ etc. cu timpurile. În consecință corpul în coborîre, într-un timp oarecare $ABrL$, descrie spațiul Blr , și în timpul $LrtN$ spațiul $rlnt$. Q.E.D. Și la fel este demonstrația mișcării expuse în urcare. Q.E.D.



COROLARUL 1. Așadar viteza maximă, pe care o poate cîștiga un corp în cădere, este către viteza cîștigată într-un timp oarecare dat, precum forța dată a gravității, cu care acel corp este acționat încontinuu, către forța de rezistență, prin care este împiedicat la sfîrșitul aceluia timp.

COROLARUL 2. Însă timpul crescînd în progresie aritmetică, suma vitezei maxime și a vitezei în urcare, și diferența lor în coborîre descrește în progresie geometrică.

COROLARUL 3. Dar și diferențele spațiilor, ce sînt descrise în diferențe egale de timpuri descresc în aceeași progresie geometrică.

COROLARUL 4. Spațiul descris de un corp este diferența a două spații, dintre care unul este precum timpul luat de la începutul coborîrii și celălalt precum viteza, care și la începutul coborîrii sînt egale între ele.

COROLARUL 4. De unde dacă corpul este proiectat dintr-un loc oarecare D , cu o viteză dată, după o dreaptă DP oarecare de poziție dată; și

oarecare, și să exprimăm acel raport printr-o lungime oarecare SM . Apoi prin calcul, din lungimea luată DP , să determinăm lungimile DF , Df , și din raportul $\frac{Ff}{DF}$ aflat prin calcul, să scoatem același raport aflat prin experiență, și să exprimăm diferența prin perpendiculara MN . Să facem același lucru a doua și a treia oară, luînd totdeauna un nou raport SM al rezistenței către gravitate, și determinînd noua diferență MN . Să punem însă diferențele pozitive de o parte a dreptei SM , și cele negative de cealaltă; și prin punctele M , N , N să ducem curba regulată NNN tăind dreapta $SMMM$ în X , și SX va fi raportul adevărat al rezistenței către gravitate, care trebuia aflat. Din acest raport trebuie determinată prin calcul lungimea DF ; și o lungime care este către lungimea dată DP precum lungimea DF cunoscută prin experiență către lungimea DF acum aflată, va fi lungimea adevărată DP . Care fiind aflată, vom avea atît linia curbă $DraF$ pe care o descrie corpul, cît și viteza corpului și rezistența în diversele locuri.

SCOLIE

De altfel, ipoteza că rezistența corpurilor este în raportul vitezei, este o ipoteză mai mult matematică decît naturală. În mediile, care sînt lipsite de orice rigiditate, rezistențele corpurilor sînt ca pătratele vitezelor. Căci prin acțiunea unui corp mai iute se comunică aceleași cantități de mediu, într-un timp mai scurt, o mișcare mai mare în raportul unei viteze mai mari; și deci într-un timp egal, din cauza cantității mai mari de mediu perturbat, se comunică o mișcare mai mare în raportul pătratului; și rezistența (potrivit legilor II și III ale mișcării) este precum mișcarea comunicată.

Să vedem deci ce fel de mișcări se nasc din această lege a rezistenței.

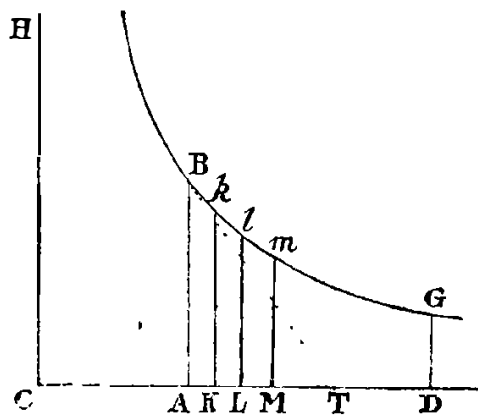
SECȚIUNEA II

Despre mișcarea corpurilor cărora li se opune o rezistență proporțională cu pătratul vitezei.

PROPOZIȚIA V. TEOREMA III

Dacă unui corp i se opune o rezistență proporțională cu pătratul vitezei, și el se mișcă numai prin forța inerentă într-un mediu omogen; iar timpurile se iau în progresie geometrică procedînd de la termenii mai mici la cei mai mari; zic că vitezele la începutul diverselor timpuri sînt în aceeași progresie geometrică inversă; și că spațiile descrise în diversele timpuri sînt egale.

Căci, fiindcă rezistența mediului este proporțională cu pătratul vitezei, și descreșterea vitezei este proporțională cu rezistența; dacă împărțim timpul în intervale nenumărate egale, pătratele vitezelor la începutul diverselor timpuri vor fi proporționale cu diferențele acelorași viteze. Fie intervalele de timp AK , KL , LM etc. luate pe dreapta CD ; să ridicăm perpendicularele AB , Kk , Ll , Mm etc. întîlnind hiperbola $BklmG$, descrisă cu centrul C cu asimptotele CD , CH , în B , k , l , m etc. și va fi AB către Kk precum CK către CA , și separînd $AB - Kk$ către Kk precum AK către CA , și la rîndul său $AB - Kk$ către AK precum Kk către CA , și deci precum $AB \times Kk$



către $AB \times CA$. De unde, fiindcă AK și $AB \times CA$ sînt date, va fi $AB - Kk$ precum $AB \times Kk$; și în sfîrșit, cînd AB și Kk coincid, precum AB^2 . Și printr-un raționament analog $Kk - Ll$, $Ll - Mm$ etc. vor fi precum Kk^2 , Ll^2 etc. Prin urmare pătratele liniilor AB , Kk , Ll , Mm sînt precum diferențele lor; și de aceea cum și pătratele vitezelor sînt ca diferențele lor, progresia ambelor va fi asemenea. Acestea fiind demonstrate, rezultă de asemenea că ariile descrise cu aceste linii sînt într-o progresie analogă cu spațiile descrise de viteze. Prin urmare dacă reprezentăm viteza la începutul primului

timp AK prin linia AB , și viteza la începutul celui de-al doilea KL prin linia Kk , și lungimea descrisă în primul timp prin aria $AKkB$; toate vitezele următoare se vor exprima prin liniile următoare Ll , Mm etc. și lungimile descrise prin ariile Kl , Mm etc. Și compunînd, dacă reprezentăm timpul întreg prin suma părților sale AM , lungimea întreagă descrisă se va exprima prin suma părților sale $AMmB$. Să ne închipuim acum timpul AM împărțit în așa fel în părțile AK , KL , LM etc., încît CA , CK , CL , CM etc., să fie în progresie geometrică; și părțile vor fi în aceeași progresie, și vitezele AB , Kk , Ll , Mm etc., vor fi în aceeași progresie inversă, și spațiile descrise Ak , Kl , Lm etc. egale. Q.E.D.

COROLARUL 1. Prin urmare este evident că dacă reprezentăm timpul printr-o parte oarecare AD a asimptotei, și viteza la începutul timpului prin ordonata AB ; viteza la sfîrșitul timpului se va reprezenta prin ordonata DG , și spațiul întreg descris prin aria hiperbolică adiacentă $ABGD$; și spațiul pe care-l poate descrie un corp oarecare în același timp AD , cu prima viteză AB , într-un mediu fără rezistență, prin dreptunghiul $AB \times AD$.

COROLARUL 2. De unde se dă spațiul descris într-un mediu rezistent, luându-l către spațiul ce se poate descrie simultan cu viteza uniformă AB într-un mediu fără rezistență, precum aria hiperbolică $ABGD$ către dreptunghiul $AB \times AD$.

COROLARUL 3. Se dă și rezistența mediului, admițînd că ea la începutul mișcării este egală cu forța centripetă uniformă, care poate genera viteza AB unui corp ce cade în timpul AC , într-un mediu fără rezistență. Căci dacă ducem BT care atinge hiperbola în B , și întâlnește asimptota în T ; dreapta AT va fi egală cu AC , și va exprima timpul, în care prima rezistență, continuată în mod uniform, poate anula viteza întreagă AB .

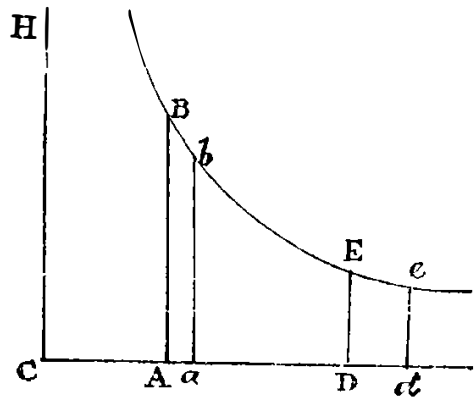
COROLARUL 4. Și de aici se dă și proporția acestei rezistențe către forța gravitației, sau orice altă forță centripetă dată.

COROLARUL 5. Și invers, dacă se dă proporția rezistenței către o forță centripetă oarecare dată; se dă timpul AC în care o forță centripetă poate genera o viteză oarecare AB egală cu rezistența: și deci se dă punctul B prin care trebuie descrisă hiperbola, avînd asimptotele CH , CD ; precum și spațiul $ABGD$, pe care un corp la începutul mișcării sale cu viteza AB , îl poate descrie într-un mediu rezistent omogen, într-un timp oarecare AD .

PROPOZIȚIA VI. TEOREMA IV

Corpuri sferice omogene și egale, împiedicate de rezistențe în raport cu pătratul vitezelor, și acționate numai de forțe inerente, în timpuri, care sînt în raport invers cu vitezele inițiale, descriu totdeauna spații egale, și pierd părți de viteze proporționale cu întregii.

Descriind o hiperbolă oarecare $BbEe$ cu asimptotele dreptunghiulare CD , CH tăind perpendicularele AB , ab , DE , de în B , b , E , e , să reprezentăm vitezele inițiale prin perpendicularele AB , DE , și timpurile prin liniile Aa , Dd . Prin urmare precum Aa către Dd tot astfel (prin ipoteză) DE către AB , și (din natura hiperbolei) CA către CD ; și componînd, va fi astfel Ca către Cd . Prin urmare ariile $ABba$, $DEed$, adică, spațiile descrise sînt egale între ele, și primele viteze AB , DE sînt proporționale cu ultimele ab , de , și de aceea separînd, și cu părțile lor pierdute $AB - ab$, $DE - de$. Q.E.D.



PROPOZIȚIA VII. TEOREMA V

Corpurile sferice cărora li se opune o rezistență în raport cu pătratul vitezelor în timpuri, care sînt precum primele mișcări și în raport invers cu primele rezistențe, vor pierde părți proporționale cu mișcările întregilor, și vor descrie spații proporționale cu aceste timpuri și primele viteze luate împreună.

Căci părțile pierdute ale corpurilor sînt precum rezistențele și timpurile luate împreună. Așadar pentru ca acele părți să fie proporționale cu întregii

va trebui ca rezistența și timpul luate împreună să fie ca mișcarea. De aceea timpul va fi precum mișcarea și în raport invers cu rezistența. Din care cauză luînd intervalele timpurilor în acel raport, corpurile vor pierde totdeauna, particule de-ale mișcărilor proporționale cu întregii și deci vor reține viteze totdeauna proporționale cu primele lor viteze. Și fiind dat raportul vitezelor, vor descrie totdeauna spații, care sînt precum primele viteze și timpurile luate împreună. Q.E.D.

COROLARUL 1. Așadar dacă la corpuri de viteze egale se opune o rezistență în raport cu pătratul diametrelor: sferile omogene mișcate cu viteze oarecare, descriind spații proporționale cu diametrele lor, vor pierde părți ale mișcărilor proporționale cu întregii. Căci mișcarea unei sfere oarecare va fi precum viteza și masa luate împreună, adică, precum viteza și cubul diametrului; rezistența (prin ipoteză) va fi precum pătratul diametrului și pătratul vitezei luate împreună; și timpul (potrivit acestei propoziții) în primul raport este direct în al doilea invers, adică, precum în raport direct cu diametrul și invers cu viteza; și astfel spațiul, proporțional cu timpul și viteza, este precum diametrul.

COROLARUL 2. Dacă la corpuri de viteze egale se opune o rezistență proporțională cu puterea $\frac{3}{2}$ a diametrelor: sferile omogene mișcate cu viteze oarecare, descriind spații proporționale cu puterea $\frac{3}{2}$ a diametrelor, vor pierde părți ale mișcărilor proporționale cu întregii.

COROLARUL 3. Și în general, dacă la corpuri de viteze egale li se opune o rezistență în raportul unei puteri oarecare a diametrelor: spațiile în care sfere omogene, mișcate cu viteze oarecare, vor pierde părți ale mișcărilor proporționale cu întregii, vor fi precum cuburile diametrelor aplicate la acea putere. Fie diametrele D și E ; și dacă rezistențele, vitezele luîndu-se egale, sînt precum D^n și E^n : spațiile în care sferele, mișcate cu viteze oarecare, vor pierde părți ale mișcărilor proporționale cu întregii, vor fi precum D^{3-n} și E^{3-n} . Și de aceea sferele omogene descriind spații proporționale cu D^{3-n} și E^{3-n} , vor păstra vitezele în același raport între ele ca la început.

COROLARUL 4. Acum dacă sferele nu sînt omogene, spațiul descris de sfera mai densă trebuie să crească în raport cu densitatea. Căci mișcarea cu aceeași viteză, este mai mare în raportul densității, și timpul (prin această propoziție) va crește precum mișcarea, și spațiul descris în raport cu timpul.

COROLARUL 5. Și dacă sferele se mișcă în medii diferite; spațiul într-un mediu, care, celelalte fiind egale, opune o rezistență mai mare, va trebui micșorat în raportul rezistenței mai mari. Căci timpul (prin această propoziție) se va micșora în raport cu creșterea rezistenței, și spațiul în raport cu timpul.

LEMA II

Momentul unei «genita» este egal cu momentele diverselor laturi generatoare înmulțite încontinuu cu indicii puterilor acelorași laturi, și cu coeficienții.

Numesc «genita» orice cantitate, care se naște, fără adunare și scădere din oarecare laturi sau termeni, în aritmetică prin înmulțire, diviziune,

și extragerea rădăcinii; în geometrie prin aflarea fie a celor cuprinse și a laturilor, fie a extremelor și mediilor proporționale. Cantitățile de acest fel sînt produse, cîturi, rădăcini, dreptunghiuri, pătrate, cuburi, laturi pătrate, laturi cubice și altele asemenea. Aceste cantități le consider aici ca nedeterminate și nestabile, și încontinuu crescînd sau descrescînd aproape printr-o mișcare sau flux perpetuu; și dau numele de moment creșterilor și descreșterilor lor momentane: astfel că creșterile se obțin ca momente aditive sau pozitive, și descreșterile ca substructive sau negative. Dar să ne ferim de a le considera ca particule finite. Particulele finite nu sînt momente, ci însăși cantitățile născute din momente. Trebuie să înțelegem principiile tocmai născînd ale mărimilor finite. Nici nu considerăm în această leamă mărirea momentelor, ci prima proporție a celor născînd. Același lucru se întîmplă, dacă în locul momentelor se folosesc fie vitezele creșterilor și descreșterilor (pe care le putem numi și mișcări, schimbări și fluxiuni ale cantităților) fie oarecare cantități finite ale vitezelor proporționale cu acestea. Iar coeficientul unei laturi generatoare oarecare este cantitatea, care se naște aplicînd genita la această latură.

Așadar sensul lemei este, că, dacă numim a, b, c etc. momentele unor cantități oarecare A, B, C etc., crescătoare sau descrescătoare printr-o mișcare perpetuă sau vitezele mișcărilor proporționale cu acestea, momentul sau schimbarea dreptunghiului născut AB va fi $aB + bA$, și momentul cuprinsului născut ABC va fi $aBC + bAC + cAB$; și momentele puterilor născute $A^2, A^3, A^4, A^{\frac{1}{2}}, A^{\frac{3}{2}}, A^{\frac{1}{3}}, A^{\frac{2}{3}}, A^{-1}, A^{-2}$ și $A^{-\frac{1}{2}}$ sînt respectiv $2aA, 3aA^2, 4aA^3, \frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}, -aA^{-2}, -2aA^{-3}$ și $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$.

Și în general, că momentul unei puteri oarecare A^m va fi $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Astfel că momentul născutei A^2B va fi $2aAB + bA^2$; și momentul născutei $A^3B^4C^2$ va fi $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; și momentul născutei $\frac{A^3}{B^2}$ sau A^3B^{-2} va fi $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$; și așa mai departe. Lema se demonstrează în acest fel.

CAZUL 1. Un dreptunghi oarecare AB mărit printr-o mișcare perpetuă, cînd din laturile A și B lipseau jumătățile momentelor $\frac{1}{2}a$ și $\frac{1}{2}b$, era $A - \frac{1}{2}a$ înmulțit cu $B - \frac{1}{2}b$, sau $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; și imediat ce laturile A și B au crescut cu aceleași jumătăți de momente, devine $A + \frac{1}{2}a$ înmulțit cu $B + \frac{1}{2}b$ sau $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. Din acest dreptunghi să se scadă primul dreptunghi, și va rămîne excesul $aB + bA$. Prin urmare prin creșterile întregi ale laturilor a și b se naște creșterea $aB + bA$ a dreptunghiului. Q.E.D.

CAZUL 2. Să punem AB totdeauna egal cu G , și momentul cuprinsului ABC sau GC (potrivit cazului 1) va fi $gC + cG$, adică (dacă în loc de G și g scriem AB și $aB + bA$) $aBC + bAC + cAB$. Și raționamentul este la fel pentru cuprinsul sub oricîte laturi. Q.E.D.

CAZUL 3. Să punem laturile A, B, C totdeauna egale între ele; și momentul $aB + bA$ al lui A^2 , adică a dreptunghiului AB , va fi $2aA$, iar

momentul $aBC + bAC + cAB$ al lui A^3 , adică al cuprinsului lui ABC , va fi $3aA^2$. Și prin același raționament, momentul unei puteri oarecare A^n este naA^{n-1} . Q.E.D.

CAZUL 4. De unde cum $\frac{1}{A}$ înmulțit cu A este 1, momentul lui $\frac{1}{A}$ înmulțit cu A , împreună cu $\frac{1}{A}$ înmulțit cu a va fi momentul lui 1, adică nimic.

Prin urmare momentul lui $\frac{1}{A}$ sau al lui A^{-1} este $-\frac{a}{A^2}$. Și în general cum $\frac{1}{A^n}$ înmulțit cu A^n este 1, momentul lui $\frac{1}{A^n}$ înmulțit cu A^n împreună cu $\frac{1}{A^n}$ înmulțit cu naA^{n-1} va fi nimic. Și de aceea momentul lui $\frac{1}{A^n}$ sau A^{-n} va fi $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q.E.D.

CAZUL 5. Și cum $A^{\frac{1}{2}}$ înmulțit cu $A^{\frac{1}{2}}$ este A , momentul lui $A^{\frac{1}{2}}$ înmulțit cu $2A^{\frac{1}{2}}$ va fi a , potrivit cazului 3: și deci momentul lui $A^{\frac{1}{2}}$ va fi $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ sau $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Și în general dacă punem $A^{\frac{m}{n}}$ egal cu B , va fi A^m egal cu B^n , și astfel maA^{m-1} egal cu nbB^{n-1} , și maA^{-1} egal cu nbB^{-1} sau $nbA^{\frac{-m}{n}}$ și deci $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ egal cu b , adică, egal cu momentul lui $A^{\frac{m}{n}}$. Q.E.D.

CAZUL 6. Așadar momentul unei născute oarecare $A^m B^n$ este momentul lui A^m înmulțit cu B^n , împreună cu momentul lui B^n înmulțit cu A^m , adică $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; și aceasta fie că, indicii m și n sînt numere întregi sau fracționare, fie că sînt pozitive sau negative. Și la fel este raționamentul pentru cele cuprinse de puteri mai înalte. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici în cazul mărimilor continuu proporționale, dacă un termen este dat, momentele termenilor rămași vor fi precum aceiași termeni înmulțiți prin numărul intervalelor între ele și termenul dat. Fie A, B, C, D, E, F continuu proporționale; și dacă se dă termenul C , momentele termenilor rămași vor fi între ele precum $-2A, -B, D, 2E, 3F$.

COROLARUL 2. Și dacă în patru proporționale se dau cei doi mezi, momentele extremilor vor fi precum însăși extremele. Același lucru trebuie înțeles și despre laturile unui dreptunghi oarecare dat.

COROLARUL 3. Și dacă se dă suma sau diferența a două pătrate, momentele laturilor vor fi în raport invers cu laturile.

SCOLIE

Într-o scrisoare din 10 decembrie 1672 către compatriotul nostru d-l J. Collin, descriind o metodă a tangentelor pe care o socoteam identică cu metoda lui Slusius pe atunci încă nepublicată; am adăugat: *Acesta este un caz particular sau mai bine zis un corolar al unei metode generale, care se extinde fără nici o greutate de calcul, nu numai asupra ducerii tangentelor la curbe oarecare fie geometrice, fie mecanice, fie privind într-un mod oarecare linii drepte sau alte curbe, ci și la rezolvarea altor genuri mai compli-*

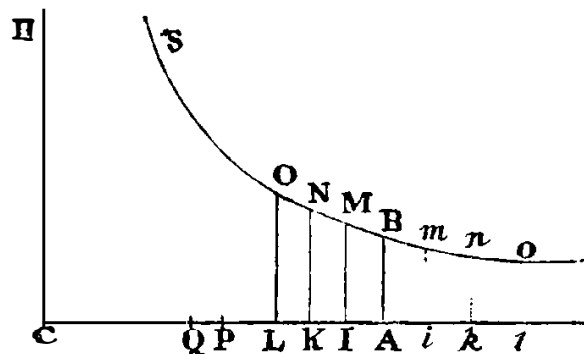
cate de probleme asupra curburilor, ariilor, lungimilor, centrelor de greutate ale curbelor etc., nici nu se mărginește (ca metoda lui Hudden asupra maximelor și minimelor) numai la acele ecuații care sînt libere de cantități iraționale. Această metodă am întreprins-o cu cealaltă în care institui explicarea ecuațiilor reducîndu-le la serii infinite.

Pînă aici scrisoarea. Și aceste cuvinte din urmă se referă la tratatul pe care l-am scris în anul 1671 asupra acestor lucruri. Temeiul acestei metode generale este cuprins în lema precedentă.

PROPOZIȚIA VIII. GEOREMA VI

Dacă un corp într-un mediu uniform, acționat în mod uniform de gravitate, se urcă sau se coboară pe o dreaptă, și spațiul întreg descris se împarte în părți egale, și la începutul diverselor părți (adunînd rezistența mediului la forța gravitației, cînd corpul se urcă sau scăzînd-o cînd corpul se coboară) se caută forțele absolute; zic că forțele absolute sînt în progresie geometrică.

Căci să reprezentăm forța gravitației prin linia dată AC , rezistența prin linia nedefinită AK , forța absolută în căderea corpului prin diferența KC , viteza corpului prin linia AP , care să fie o medie proporțională între AK și AC , și deci în raportul rădăcinii pătrate a rezistenței: creșterea rezistenței efectuată într-un interval dat de timp prin linioara KL , și creșterea corespunzătoare a vitezei prin linioara PQ ; și din centrul C cu asimptotele dreptunghiulare CA , CH să descriem o hiperbolă oarecare BNS , întîlnind dreptele ridicate AB , KN , LO în B , N , O . Deoarece AK este precum AP^2 , momentul ei KL va fi precum momentul $2APQ$ al celuilalt adică, precum AP înmulțit cu KC ; căci creșterea PQ a vitezei (potrivit legii II a mișcării) este proporțională cu forța generatoare KC . Să înmulțim raportul lui KL cu raportul lui KN , și va fi dreptunghiul $KL \times KN$ precum $AP \times KC \times KN$; adică, dreptunghiul $KC \times KN$ fiind dat, precum AP . Dar raportul ultim al ariei hiperbolice $KNOL$ către dreptunghiul $KL \times KN$, cînd punctele K și L coincid, este un raport de egalitate. Prin urmare aria hiperbolică disparentă este ca AP . Așadar aria întreagă hiperbolică $ABOL$ se compune din particulele $KNOL$ totdeauna proporționale cu viteza AP și de aceea este proporțională cu spațiul descris cu această viteză. Căci să împărțim aria în părți egale $ABMI$, $IMNK$, $KNOL$ etc., și forțele absolute AC , IC , KC , LC etc., vor fi în progresie geometrică. Q.E.D. Și printr-un raționament analog, în urcarea corpului, luînd de partea contrară a punctului A , ariile egale $ABmi$, $imnk$, $knol$ etc., vom constata că forțele absolute AC , iC , kC , lC etc., sînt continuu proporționale. Și astfel dacă toate spațiile în urcare și coborîre se iau egale; toate forțele absolute lC , kC , iC , AC , IC , KC , LC etc., vor fi continuu proporționale.



COROLARUL 1. Deci dacă spațiul descris se reprezintă prin aria hiperbolică $ABNK$, se pot reprezenta forța gravitației, viteza corpului și rezistența mediului respectiv prin liniile AC , AP și AK ; și viceversa.

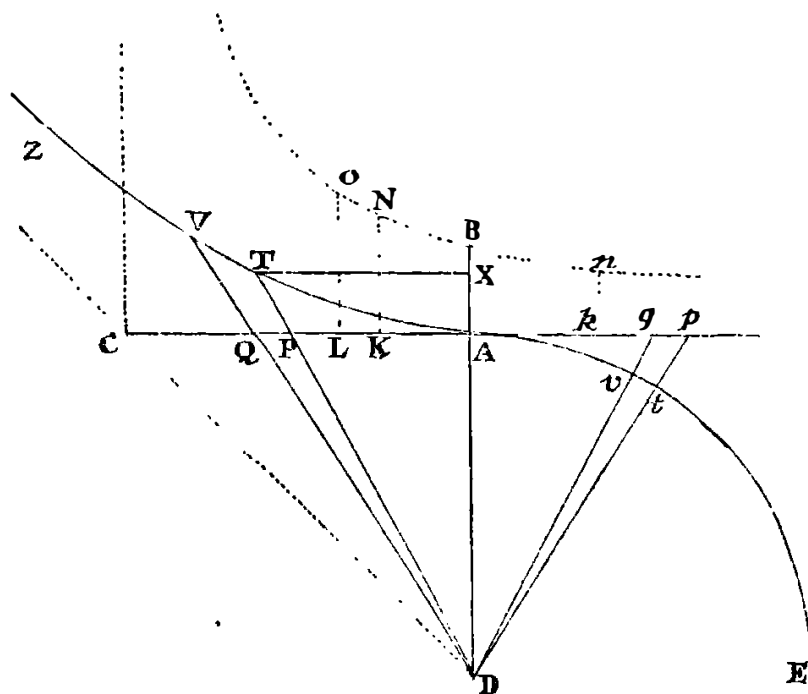
COROLARUL 2. Și viteza maximă, pe care corpul o poate câștiga cîndva coborînd la infinit, se exprimă prin linia AC .

COROLARUL 3. Așadar dacă la o viteză oarecare dată se cunoaște rezistența mediului, se va afla viteza maximă, luînd-o la acea viteză dată în raportul rădăcinii pătrate a forței gravitației către acea rezistență cunoscută a mediului.

PROPOZIȚIA IX. TEOREMA VII

Presupunînd cele demonstrate, zic că, dacă luăm tangentele unghiurilor sectorului circular și ale sectorului hiperbolic proporționale cu vitezele, raza avînd o mărime justă, orice timp de ascensiune la locul cel mai de sus va fi ca sectorul cercului, și orice timp de coborîre din locul mai înalt precum sectorul hiperbolei.

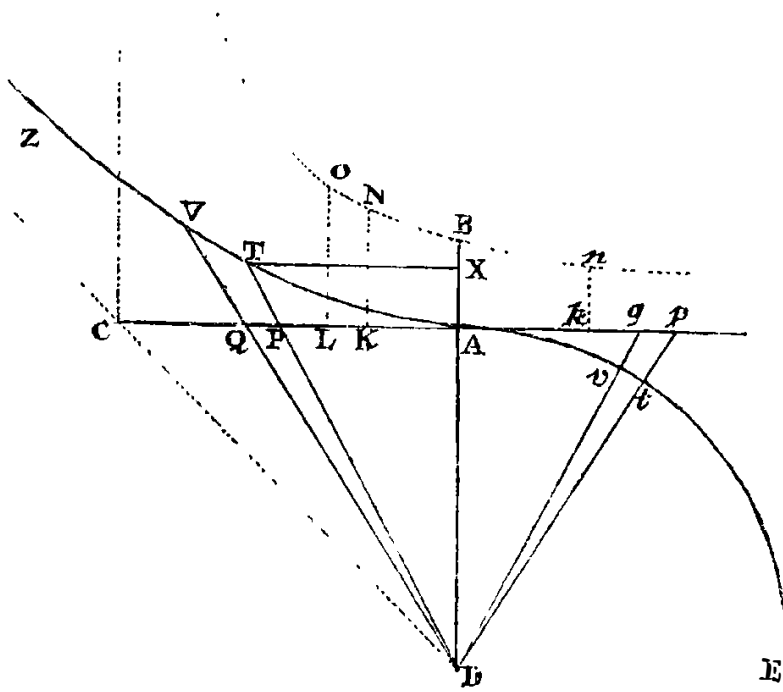
Să ducem pe dreapta AC , prin care reprezentăm forța gravitației, AD perpendiculară și egală. Din centrul D cu semidiametrul AD să descriem atît cadranul AtE al cercului, cît și hiperbola dreptunghiulară AVZ avînd axa AX , vîrfurile principale A , și asimptota EC . Să ducem Dp , DP , și va fi sectorul circular hiperbolic AtD ca orice timp de urcare la locul cel mai înalt; și sectorul hiperbolic ATD ca orice timp de coborîre de la locul cel mai înalt: dacă numai tangentele Ap , AP sînt ca vitezele.



CAZUL 1. Căci să ducem Dvq tăind din sectorul ADt și triunghiul ADp momente, sau particule cît se poate de mici descrise deodată tDV și qDp . Cum acele particule, din cauza unghiului comun D , sînt precum pătratul laturilor, pătica tDv va fi precum $\frac{qDp \times tD^2}{pD^2}$, adică, din cauza că tD este

dat, precum $\frac{qDp}{pD^2}$. Dar pD^2 este $AD^2 + Ap^2$, adică, $AD^2 + AD \times Ak$, sau $AD \times Ck$; și qDp este $\frac{1}{2} AD \times pq$. Prin urmare părticica tDv a sectorului este ca $\frac{pq}{Ck}$, adică, proporțională cu creșterea minimă pq a vitezei, și invers proporțională cu forța Ck ce micșorează viteza; și deci precum intervalul de timp corespunzător micșorării vitezei. Și compunînd, suma tuturor particulelor tDv în sectorul ADt , este ca suma intervalelor de timp corespunzătoare fiecăruia din intervalele pierdute pq ale vitezei descrescătoare Ap , pînă ce viteza micșorată pînă la zero va dispăre; adică, întreg sectorul ADt este precum întreg timpul de ascensiune la locul cel mai înalt. Q.E.D.

CAZUL 2. Să ducem DQV tăind atât din sectorul DAV , cât și din triunghiul DAQ particulele minime TDV și PDQ ; și aceste particule vor fi precum



DT^2 către DP^2 , adică (dacă TX și AP sînt paralele) precum DX^2 către DA^2 sau TX^2 către AP^2 , și separînd precum $DX^2 - TX^2$ către $DA^2 - AP^2$. Dar din natura hiperbolei $DX^2 - TX^2$ este AD^2 , și prin ipoteză AP^2 este $AD \times AK$. Prin urmare particulele sînt între ele precum AD^2 către $AD^2 - AD \times AK$; adică, precum AD către $AD - AK$, sau AC către CK : și deci păticea sectorului TDV este $\frac{PDQ \times AC}{CK}$; și de aceea fiind date AC și AD precum PQ/CK , adică, proporțională cu creșterea vitezei, și invers proporțională cu forța ce produce creșterea; și deci ca intervalul de timp ce corespunde creșterii. Și componînd, suma intervalelor de timp, în care se nasc toate intervalele PQ ale vitezei AP , devine precum suma păticelelor sectorului ATD ; adică timpul întreg precum sectorul întreg. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă AB este egală cu a patra parte a lui AC , spațiul pe care-l descrie un corp în cădere într-un timp oarecare, va fi către spațiul, pe care corpul îl poate descrie cu viteza maximă AC , progresînd în același timp în mod uniform, precum aria $ABNK$, prin care se exprimă spațiul descris în cădere, către aria ATD , prin care se exprimă timpul. Căci fiindcă AC este către AP precum AP către AK , va fi (potrivit corolarului 1, lema II, a acestei Cărți) LK către PQ precum $2AK$ către AP , adică, precum $2AP$ către AC , și de aici LK către $\frac{1}{2} PQ$ precum AP către $\frac{1}{4} AC$ sau AB ; și KN către AC sau AD este precum AB către CK ; așadar prin egalitate $LKNO$ către DPQ precum AP către CK . Dar era DPQ către DTV precum CK către AC . Așadar iarăși prin egalitate $LKNO$ către DTV precum AP către AC ; adică, precum viteza corpului ce cade către viteza maximă pe care o poate cîștiga corpul în cădere. Prin urmare cum momentele $LKNO$ și DTV ale ariilor $ABNK$ și ATD sînt precum vitezele, toate părțile ariilor născute în același timp vor fi precum spațiile descrise în același timp, și deci ariile întregi născute de la început $ABNK$ și ATD precum spațiile întregi descrise de la începutul căderii. Q.E.D.

COROLARUL 2. Același lucru rezultă și în privința spațiului descris în ascensiune. Anume că întreg spațiul este către spațiul descris cu viteza uniformă AC și, în același timp, precum aria $ABnk$ către sectorul ADt .

COROLARUL 3. Viteza corpului ce cade în timpul ATD este către viteza, pe care o va cîștiga în același timp într-un spațiu fără rezistență, precum triunghiul APD către sectorul hiperbolic ATD . Căci viteza într-un mediu fără rezistență va fi ca timpul ATD , și într-un mediu rezistent este ca AP , adică, precum triunghiul APD . Și vitezele la începutul coborîrii sînt egale între ele, la fel ca ariile ATD , APD .

COROLARUL 4. Din aceeași cauză viteza de ascensiune este către viteza, cu care corpul în același timp într-un spațiu fără rezistență își va putea pierde întreaga sa mișcare de ascensiune, precum triunghiul ApD către sectorul circular AtD ; sau precum dreapta Ap către arcul At .

COROLARUL 5. Prin urmare timpul, în care un corp căzînd într-un mediu rezistent cîștigă viteza AP , este către timpul, în care va putea cîștiga viteza maximă AC căzînd într-un mediu fără rezistență, precum sectorul ADT către triunghiul ADC : și timpul, în care poate pierde viteza Ap urcîndu-se într-un mediu rezistent, către timpul în care poate pierde aceeași viteză urcîndu-se într-un spațiu fără rezistență, precum arcul At către tangenta sa Ap .

COROLARUL 6. Prin urmare din timpul dat se dă spațiul descris în ascensiune sau în coborîre. Căci viteza maximă a unui corp ce se coboară în infinit este dată (potrivit corolarului 2 și 3, teorema VI, Cartea a II-a) și deci este dat timpul în care un corp poate cîștiga acea viteză căzînd într-un spațiu fără rezistență. Și luînd sectorul ADT sau ADt către triunghiul ADC în raportul timpului dat către timpul tocmai aflat; va fi dată atît viteza AP sau Ap , cît și aria $ABNK$ sau $ABnk$, care este către sectorul ADT sau ADt precum spațiul căutat către spațiul, pe care-l poate descrie în mod uniform, într-un timp dat, cu viteza maximă aflată chiar acum.

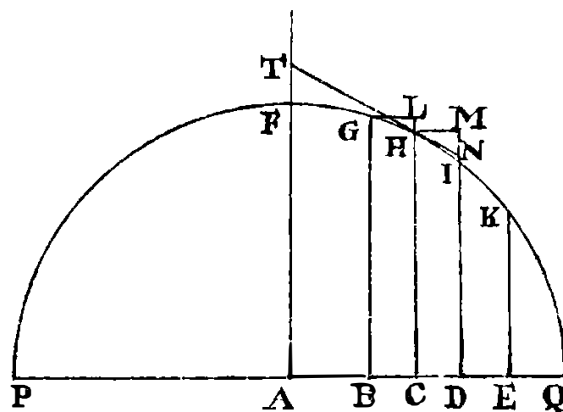
COROLARUL 7. Și procedînd invers, din spațiul dat de urcare sau coborîre $ABnk$ sau $ABNK$, se va afla timpul ADt sau ADT .

PROPOZIȚIA X. PROBLEMA III

Să presupunem că forța gravitației tinde direct către planul orizontului, și fie rezistența precum densitatea mediului și pătratul vitezei luate împreună; se caută atît densitatea mediului în diversele locuri, care face ca corpul să se miște pe o linie curbă oarecare dată, cît și viteza corpului și rezistența mediului în diversele locuri.

Fie PQ acel plan perpendicular pe planul figurii; $PFHQ$ o linie curbă ce întâlnește acest plan în punctele P și Q ; G, H, I, K patru locuri ale corpului înaintînd pe această cuibă de la F spre Q : și GB, HC, ID, KE patru ordonate paralele coborîte din aceste puncte pe orizont, și întîlnind linia orizontală PQ în punctele B, C, D, E ; și fie distanțele între ordonate BC, CD, DE egale între ele. Din punctele G și H să ducem drepte GL, HN atingînd curba în G și H , și întîlnind ordonatele CH, DI prelungite în sus în L și N , să completăm paralelogramul $HCDM$. Și timpurile în care corpul descrie arcul GH, HI , vor fi precum rădăcina pătrată a înălțimilor LH, NI , pe care corpul le poate descrie în acele timpuri, căzînd de la tangente; și vitezele vor fi proporționale cu lungimile descrise GH, HI și în raport invers cu timpurile. Să reprezentăm timpurile prin T și t , și vitezele prin $\frac{GH}{T}$ și $\frac{HI}{t}$; și să reprezentăm descreșterea vitezei produsă în timpul t prin $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Această descreștere provine din rezistența ce întîrzie corpul și din gravitatea acceleratoare a corpului. Gravitatea, în corpul ce cade și descrie în cădere spațiul NI , produce o viteză, cu care ar putea descrie dublul acelui spațiu NI în același timp, după cum a demonstrat-o Galileu; adică viteza $\frac{2NI}{t}$; dar în corpul ce descrie arcul HI , va mări acel arc numai prin lungimea $HI - HN$ sau $\frac{MI \times NI}{HI}$; și deci produce numai viteza $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Să adunăm această viteză la descreșterea menționată, și vom avea descreșterea vitezei născută numai din rezistență, anume $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. De aceea fiindcă greutatea în același timp în corpul ce cade generează viteza $\frac{2NI}{t}$, rezistența va fi către gravitate precum $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ către $\frac{2NI}{t}$, sau precum $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ către $2NI$.

Apoi în locul absciselor CB, CD, CE , să scriem $-o, o, 2o$. În locul ordonatei CH să scriem P , și în locul lui MI să scriem o serie oarecare $Qo + Roo + So^3 + \text{etc.}$ Și toți termenii seriei după întîiul, anume $Roo +$



Să bisectăm diametrul PQ în A ; să numim AQ , n ; AC , a ; GH , e ; și CD , o , și va fi DI^2 sau $AQ^2 - AD^2 = nn - aa - 2ao - oo$, sau $ee - 2ao - oo$, și extrăgînd rădăcina după metoda noastră, va fi $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aao}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} - \text{etc.}$ Aici să scriem nn în loc de $ee + aa$, și vom avea $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} - \text{etc.}$

Într-o astfel de serie deosebesc termenii succesivi în felul următor. Numesc termenul întâi pe acela, în care cantitatea infinit de mică a nu intervine; al doilea, în care acea cantitate are dimensiunea întâi; al treilea, în care intervine la dimensiunea a doua; al patrulea, în care este de dimensiunea a treia și așa pînă la infinit. Și primul termen, care aici este e , va însemna totdeauna lungimea ordonatei CH ridicată la începutul cantității nedefinite o . Al doilea termen, care aici este $\frac{ao}{e}$, va însemna diferența între CH și DN , adică linioara MN , care se taie completînd paralelogramul $HCDM$, și de aceea totdeauna determină poziția tangentei HN ; ca, în acest caz, luînd MN către HM precum $\frac{ao}{e}$ către o , sau a către e . Termenul al treilea, care aici este $\frac{nnoo}{2e^3}$, va însemna linioara IN , care este situată între tangentă și curbă, și deci determină unghiul de contact IHN sau curbura pe care o are linia curbă în H . Dacă linioara IN are o mărime finită, se va exprima prin termenul al treilea împreună cu cele ce urmează la infinit. Dar dacă acea linioară se micșorează la infinit, termenii următori vor deveni infinit de mici față de al treilea, și deci se pot neglija. Termenul al patrulea determină variația curburei, al cincilea variația variației, și așa mai departe. De unde imediat apare folosul ce nu este de disprețuit al acestor serii în rezolvarea problemelor, care depind de tangente și de curbura curbelor.

Căci să comparăm seria $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} - \text{etc.}$ cu seria $P - Qo - Roo - So^3 - \text{etc.}$ și apoi în loc de P , Q , R , și S să scriem e , $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, și $\frac{ann}{2e^5}$, și în loc de $\sqrt{1 + QQ}$ să scriem $\sqrt{1 + \frac{aa}{ee}}$ sau $\frac{n}{e}$, și vom obține densitatea mediului anume $\frac{a}{ne}$, adică (n fiind dat) $\frac{a}{e}$, sau $\frac{AC}{CH}$, adică precum lungimea HT a tangentei, care se termină pe semidiametrul AF perpendicular pe PQ : și rezistența va fi către gravitate precum $3a$ către $2n$, adică, precum $3AC$ către diametrul PQ al cercului: iar viteza va fi precum \sqrt{CH} . De aceea dacă corpul pleacă din locul F cu o viteză potrivită de-a lungul unei linii paralele cu PQ , și densitatea mediului în diversele locuri H este ca lungimea tangentei HT , și rezistența într-un loc oarecare H de asemenea va fi către forța gravității precum $3AC$ către PQ , corpul va descrie cadranul FHQ al cercului. Q.E.I.

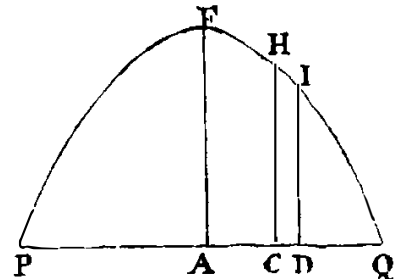
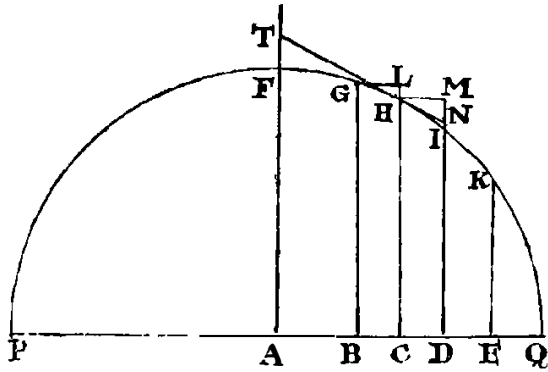
Dar dacă același corp pleacă din locul P de-a lungul unei linii perpendiculare pe PQ , și începe să se miște pe arcu semicercului PFQ , trebuie să luăm pe AC sau a de părți contrarii ale centrului A , și de aceea trebuie să-i schimbăm semnul și să scriem $-a$ în loc de $+a$. De unde vom obține pentru densitatea mediului $-\frac{a}{e}$. Dar natura nu admite o densitate negativă, adică, o densitate care să accelereze mișcarea corpurilor: și de aceea în mod natural nu se poate, ca corpul urcându-se din P să descrie cadranul PF al cercului. În acest scop ar trebui ca corpul să fie accelerat de mediul împingător, iar nu împiedicat de cel rezistent.

EXEMPLUL 2. Fie linia PFQ o parabolă, având axa AF perpendiculară pe orizontul PQ , și să se afle densitatea mediului, care va face ca proiectilul să se miște pe ea.

Din natura parabolei, dreptunghiul PDQ este egal cu dreptunghiul format de ordonata DI și o dreaptă oarecare dată: adică, dacă acele drepte sînt b ; PC , a ; PQ , c ; CH , e ; și CD , o ; dreptunghiul $a+o$ înmulțit cu $c-a-o$ sau $ac-aa-2ao+co-oo$ este egal cu dreptunghiul b înmulțit cu DI , și deci DI este egal cu $\frac{ac-aa}{b} + \frac{c-a}{b}o - \frac{oo}{b}$. Să scriem acum termenul al doilea $\frac{c-a}{b}o$ al acestei serii în loc de Qo , și termenul al treilea $\frac{oo}{b}$ în loc de Roo . Cum însă nu mai sînt alți termeni, coeficientul celui de al patrulea va trebui să dispară, și de aceea cantitatea $\frac{S}{R\sqrt{L+QQ}}$, cu care este proporțională densitatea mediului, va fi zero. Prin urmare într-un mediu de densitate zero proiectilul se va mișca pe o parabolă, după cum a demonstrat odinioară Galileu. Q.E.I.

EXEMPLUL 3. Fie linia AGK o hiperbolă, avînd asimptotele NX perpendiculară pe planul orizontal AK ; și să se afle densitatea mediului, care face ca proiectilul să se miște pe această linie.

Fie MX cealaltă asimptotă, întîlnind în V ordonata DG prelungită; și din natura hiperbolei, dreptunghiul XV înmulțit cu VG va fi dat. Se dă de asemenea raportul DN către VX , și deci este dat și dreptunghiul $DN \times VG$. Fie acela bb : și completînd paralelogramul $DNXZ$; să numim BN , a ; BD , o ; NX , c ; și să presupunem că raportul dat VZ către ZX sau DN este $\frac{m}{n}$. Și DN va fi egal cu $a-o$, VG egal cu $\frac{bb}{a-o}$, VZ egal cu $\frac{m}{n}(a-o)$ și GD sau $NX - VZ - VG$ egal cu $c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{a-o}$. Să dezvoltăm termenul $\frac{bb}{a-o}$ în seria convergentă $\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa}o + \frac{bb}{a^3}o^2 + \frac{bb}{a^4}o^3$ etc. și GD va fi egal cu $c - \frac{m}{n}a + \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o - \frac{bb}{a^3}o^2 - \frac{bb}{a^4}o^3$ etc.



Termenul al doilea al acestei serii $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ trebuie folosit în loc de Qo , al treilea cu semnul schimbat $\frac{bb}{a^3}o^2$ în loc de Ro^2 , și al patrulea de asemenea cu semn schimbat $\frac{bb}{a^4}o^3$ în loc de So^3 , și coeficienții lor $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ și $\frac{bb}{a^4}$ trebuie scriși după regula de mai sus în loc de Q , R și S . Făcând acestea

densitatea mediului se obține ca

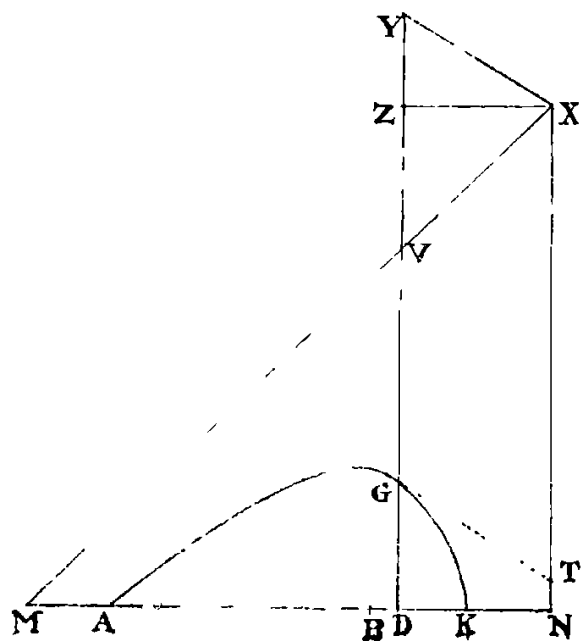
$$\frac{bb}{a^3} \sqrt{1 + \frac{mm}{nn} - \frac{2mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4}}$$

sau $\sqrt[1]{aa + \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}}$ adică, dacă în VZ luăm VY egal cu VG , precum

$\frac{1}{XY}$. Căci aa și $\frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ sînt pătratele lui XZ și ZY . Dar aflăm că raportul rezistenței către gravitate este $3XY$ către $2YG$, și viteza este aceea, cu care corpul s-ar mișca pe o parabolă avînd vîrfurile G , diametrul DG , și parametrul $\frac{XY^2}{VG}$. Să presupunem deci că densitățile mediilor în diversele locuri G sînt în raport invers cu distanțele XY , și că rezistența într-un loc oarecare G se raportează către gravitate precum $3XY$ către $2YG$; și corpul din locul A cu o viteză dată, va descrie hiperbola AGK . Q.E.I.

EXEMPLUL 4. Să presupunem în mod nedefinit, că linia AGK este o hiperbolă, cu centrul X , asimptotele MX , NX , descrisă în așa fel, că construind

dreptunghiul $XZDN$ a cărui latură ZD taie hiperbola în G și asimptota ei în V , VG să fie în raport invers cu o putere oarecare DN^n a lui RX sau DN , a cărui indice este numărul n : și să se afle densitatea mediului, în care un proiectil se mișcă pe această curbă. În loc de BN , BD , NX să scriem respectiv A , O , C , și fie VZ către XZ sau DN precum d către e și VG egal cu $\frac{bb}{DN^n}$, și DN va fi egal cu $A - O$, $VG = \frac{bb}{(A - O)^n}$, $VZ = \frac{d}{e} (A - O)$ și GD sau $NX - VZ - VG$ egal cu $C \frac{d}{e} A + \frac{d}{e} O - \frac{bb}{(A - O)^n}$.



Să dezvoltăm termenul $\frac{bb}{(A-O)^n}$ în seria infinită $\frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}} O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}} bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} bbO^3$ etc, și GD va fi egală cu $C - \frac{d}{e} A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e} O - \frac{nbb}{A^{n+1}} O - \frac{nn+n}{2A^{n+2}} bbO^2 - \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} bbO^3$ etc. Termenul al doilea $\frac{d}{e} O - \frac{nbb}{A^{n+1}} O$ al acestei serii trebuie folosit în loc de Qo , al treilea $\frac{nn+n}{2A^{n+2}} bbO^2$ în loc de Roo , al patrulea $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} bbO^3$ în loc de So^3 . Și de aici densitatea mediului

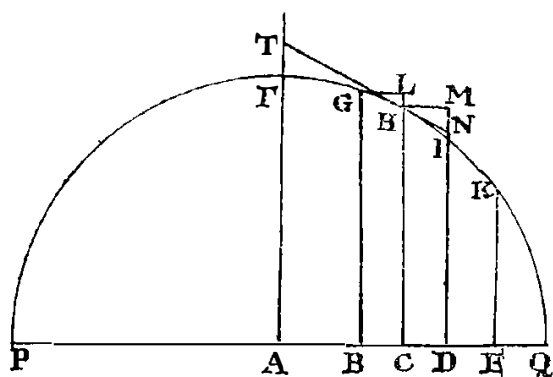
$$\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}} \text{ într-un loc oarecare } G, \text{ va fi } \frac{n+2}{3\sqrt{A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{dnbb}{eA^n} + \frac{nbb^4}{A^{2n}}}}$$

și deci dacă în VZ luăm VY egal cu $n \times VG$, densitatea este în raport invers cu XY . Căci A^2 și $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{dnbb}{eA^n} + \frac{nbb^4}{A^{2n}}$ sînt pătratele lui XZ și ZY . Dar rezistența în același loc G este către gravitate precum $3S$ înmulțit cu $\frac{XY}{A}$ către $4RR$, adică, precum XY către $\frac{2nn+2n}{n+2} VG$. Și viteza tot acolo este aceeași, cu care corpul aruncat s-ar mișca pe o parabolă, avînd vîrfurile G , diametrul GD și parametrul $\frac{1+QQ}{R}$ sau $\frac{XY^2}{(nn+n) \times VG}$. Q.E.I

SCOLIE

În același fel în care densitatea mediului se obține ca $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ în primul corolar, dacă rezistența se ia ca o putere oarecare V^n a vitezei V , se va afla densitatea mediului ca $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \left(\frac{AC}{HT}\right)^{n-1}$. Și de aceea, dacă se poate afla

o curbă în așa fel ca raportul lui $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ către $\left(\frac{HT}{AC}\right)^{n-1}$, sau $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ către $(1+QQ)^{n-1}$



să fie dat: corpul se va mișca pe această curbă într-un mediu uniform, cu o rezistență care este precum puterea V^n a vitezei. Dar să revenim la curbe mai simple.

Deoarece mișcare nu poate avea loc pe o parabolă decît într-un mediu fără rezistență, pe cînd pe hiperbola descrisă aici este produsă de o rezistență perpetuă; este evident că linia, pe care o descrie un proiectil într-un mediu uniform rezistent, se apropie mai mult de aceste hiperbole decît de parabole. Acea linie este de sigur de genul hiperbolei, dar care în apropierea vîrfului este mai îndepărtată de asimptote; în părțile mai îndepărtate de vîrf se apropie mai mult de ele decît hiperbolele pe care le-am descris aici. Totuși

diferența între acestea și aceea nu este așa de mare, încît în locul ei în practică să nu poată fi comod întrebuințată aceasta în locul aceleia. Și acestea poate sînt mai utile decît o hiperbolă mai precisă și în același timp mai complicată. Apoi acestea se pot întrebuința în felul următor.

Să completăm paralelogramul $XYGT$, și dreapta GT să atingă hiperbola în G , și deci densitatea mediului în G este invers proporțională cu tangenta GT , și viteza tot acolo precum $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$, iar rezistența către forța gravitației precum GT către $\frac{2nn+2n}{n+2}$ înmulțit cu GV .

Prin urmare dacă un corp aruncat din locul A după dreapta AH descrie hiperbola AGK , și AH prelungită întâlnește asimptota NX în H , și AI dusă paralelă cu ea întâlnește asimptota MX în I : densitatea mediului în A va

fi în raport invers cu AH , și viteza corpului cu $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, și rezistența în același loc către gravitate precum AH către $\frac{2m+2n}{n+2}$ înmulțit cu AI . De unde provin următoarele reguli.

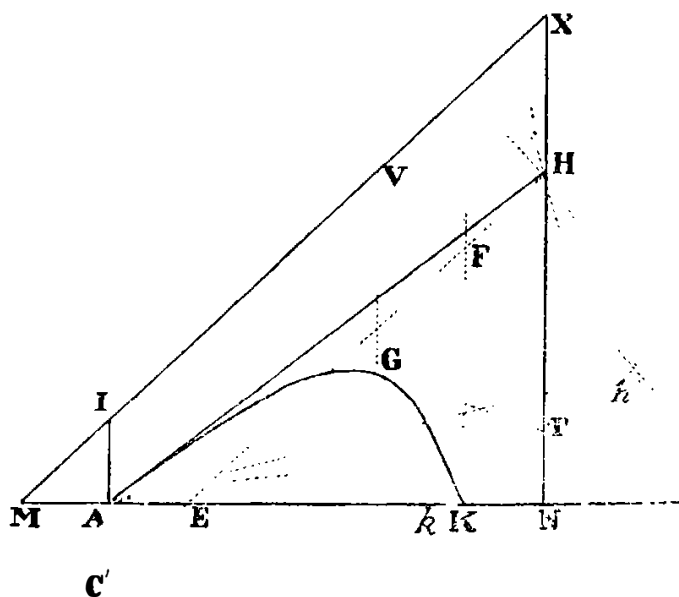
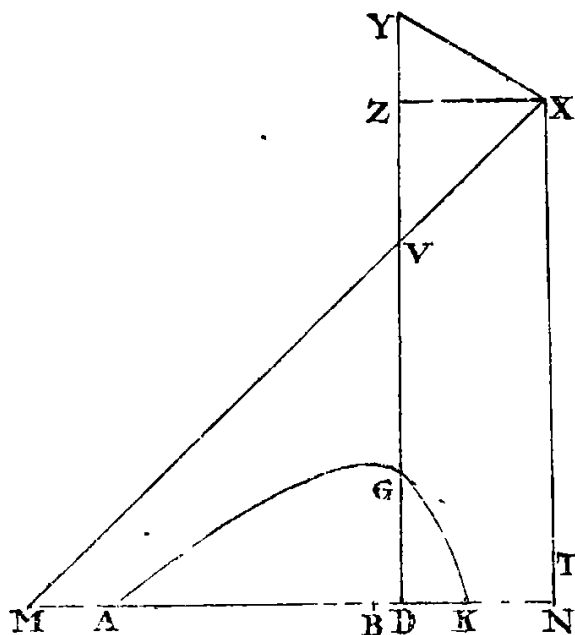
REGULA 1. Dacă atît densitatea mediului în A , cît și viteza cu care se aruncă corpul rămîn aceleași, și unghiul NAH variază; vor rămîine aceleași lungimile AH , AI , HX . Și deci dacă acele lungimi se determină într-un caz

oarecare, după aceea se poate afla hiperbola cu ușurință dintr-un unghi oarecare dat NAH .

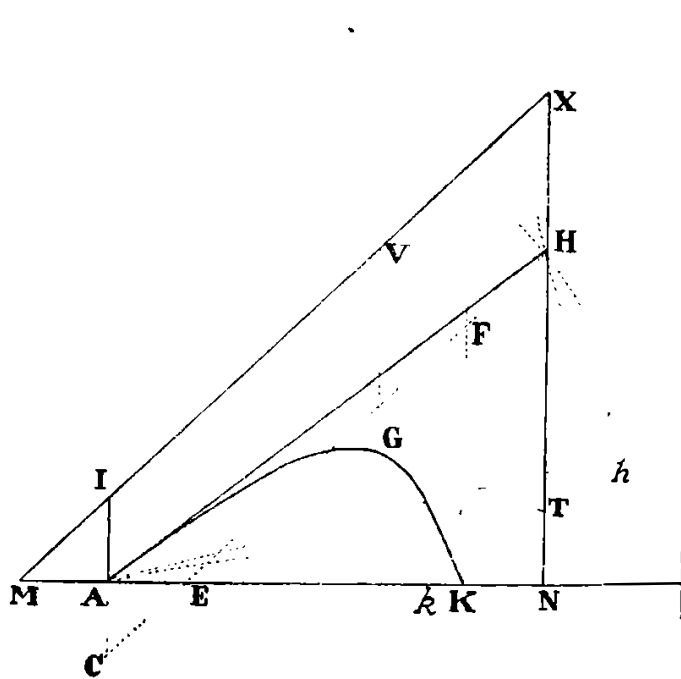
REGULA 2. Dacă se păstrează atît unghiul NAH , cît și densitatea mediului în A , și viteza cu care este aruncat corpul variază, va rămîine aceeași lungimea AH , și va varia AI invers proporțional cu pătratul vitezei.

REGULA 3. Dacă atît unghiul NAH , cît și viteza corpului în A , și greutatea acceleratoare rămîn aceleași, și proporția rezistenței în A către gravitatea motoare crește într-un raport oarecare; proporția AH către AI va crește

în același raport, rămînînd același parametru al parabolei menționate, și



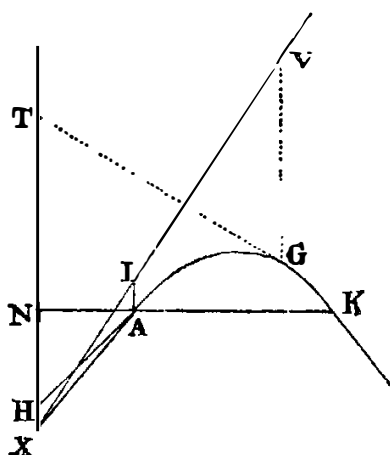
luăm o lungime oarecare AH sau Ah , și apoi să luăm în mod grafic lungimile AK , Ak , potrivit regulei 6. Dacă raportul AK către Ak este același cu raportul lui d către e , lungimea AH a fost luată corect. Dacă este mai mică, să luăm pe dreapta infinită SM lungimea SM egală cu cea luată AH , și să ridicăm perpendiculara MN egală cu diferența $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ a rapoartelor înmulțită cu o dreaptă oarecare dată. În mod analog din mai multe lungimi date AH se pot afla mai multe puncte N , și prin toate se poate duce o linie curbă regulată $NNXN$, tăind dreapta SM în X . În sfârșit să luăm AH egală cu abscisa SX , și apoi să aflăm din nou lungimea AK ; și lungimile, care sînt către lungimea dată AI și aceasta din urmă AH , precum lungimea AK cunoscută prin experiență către lungimea AK aflată în urmă, AI și AH vor fi lungimile adevărate, care trebuiau aflate. Dar acestea fiind date va fi dată și rezistența mediului în locul A , care este către forța gravității



precum AH către $\frac{4}{3} AI$. Dar densitatea mediului trebuie mărită prin regula 4 și rezistența tocmai aflată, dacă se mărește în același raport, va fi mai precisă.

REGULA 8. Lungimile AH , HX fiind aflate; dacă se caută poziția dreptei AH după care proiectilul, emis, cu viteza dată, cade într-un punct oarecare K : în punctele A și K să ridicăm dreptele AC , KF perpendiculare pe orizont, dintre care AC este îndreptată în jos, și este egală cu AI sau $\frac{1}{2} HX$. Cu asimptotele AK , KF să descriem o hiperbolă, a cărei conjugată să treacă prin punctul C , și din centrul A și cu intervalul AH să descriem un cerc tăind hiperbola în punctul H ; și proiectilul aruncat în direcția dreptei AH va cădea în punctul K . Q.E.I. Căci punctul H , dată fiind lungimea AH , va fi situat undeva pe cercul descris. Să ducem CH întâlnind pe AK și KF , pe aceea în E , pe aceasta în F ; și din cauza că CH , MX sînt paralele și AC , AI sînt egale, AE va fi egală cu AM , și de aceea va fi egală și cu KN . Dar CE este către AE precum FH către KN și de aceea CE și FA sînt egale. Prin urmare punctul H cade pe hiperbola descrisă cu asimptotele AK , KF , a cărei conjugată trece prin punctul C , și de aceea se află la intersecția comună a hiperbolei și a cercului descris. Q.E.D. Este de observat că această operație este aceeași, fie că dreapta AKN este paralelă cu orizontul, fie că este înclinată față de orizont de un unghi oarecare: și că din două intersecții H , h se nasc două unghiuri NAH , NAh ; și că în practica mecanică este de ajuns să descriem o dată cercul, apoi să aplicăm rigla neînterminată CH astfel la punctul C , ca partea ei FH , cuprinsă între cerc și dreaptă FK , să fie egală cu partea ei CE situată între punctul C și dreapta AK .

Cele spuse despre hiperbole se aplică ușor la parabole. Căci dacă $XAGK$ reprezintă o parabolă pe care dreapta XV o atinge în vârful X , și ordonatele IA , VG sînt ca puterile oarecare XI'' , XV'' , ale absciselor XI , XV ; să ducem



XT , GT , AH dintre care XT să fie paralelă cu VG , și GT , AH să atingă parabola în G și A : și corpul aruncat dintr-un loc oarecare A , în direcția unei drepte AH prelungită, cu o viteză dată, va descrie această parabolă, dacă numai densitatea mediului, în diversele locuri G , este în raport invers cu tangenta GT . Dar viteza în G va fi aceea cu care se va mișca proiectilul, într-un spațiu fără rezistență, pe o parabolă conică avînd vârful G , diametrul VG prelungit în jos, și parametrul $\frac{GT^2}{(nm-n) \times VG}$. Și rezistența în G va fi către forța gravitațională pre-

cum GT către $\frac{2nn - 2n}{n - 2} VG$. De unde dacă NAK reprezintă o linie orizontală și atît densitatea mediului în A , cît și viteza cu care este aruncat corpul rămîn aceleași, unghiul NAH va fi oarecum schimbat; lungimile AH , AI , HX vor rămîne, și deci va fi dat vârful X al parabolei, și poziția dreptei XI , și luînd VG către IA precum XV'' către XI'' , vor fi date toate punctele G ale parabolei, prin care va trece proiectilul.

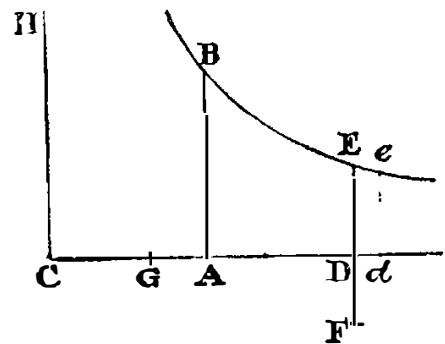
SECȚIUNEA III

Despre mișcarea corpurilor cărora li se opune o rezistență, parte în raport cu viteza, parte în raport cu pătratul ei.

PROPOZIȚIA XI. TEOREMA VIII

Dacă unui corp i se opune o rezistență, parte în raport cu viteza, parte în raport cu pătratul vitezei, și el se mișcă într-un mediu uniform numai prin forța inerentă, iar timpul crește în progresie aritmetică; cantitățile invers proporționale cu vitezele, mărite cu o cantitate oarecare, vor fi în progresie geometrică.

Din centrul C , cu asimptotele dreptunghiulare $CADd$ și CH , să descriem hiperbola BEe , și fie AB , DE de paralele cu asimptota CH . Pe asimptota CD fie date punctele A , G : și dacă timpul se reprezintă prin aria hiperbolică $ABED$ uniform crescătoare; zic că viteza se poate exprima prin lungimea DF , a cărei reciprocă GD împreună cu CG dată formează lungimea CD crescătoare în progresie geometrică.



Căci fie mica arie $DEed$ creșterea cât se poate de mică dată a timpului, și Dd va fi în raport invers cu DE , și deci proporțională cu CD . Dar descreșterea $\frac{1}{CD}$ a ei, care (potrivit lemei II a acestei Cărți) este $\frac{Dd}{GD^2}$, va fi precum $\frac{CD}{GD^2}$ sau $\frac{CG + GD}{GD^2}$, adică, precum $\frac{1}{GD} + \frac{CG}{GD^2}$. Prin urmare timpul $ABED$ crescând în mod uniform prin adunarea particulelor date $EDde$, $\frac{1}{GD}$ descrește în același raport cu viteza. Căci descreșterea vitezei este precum rezistența, adică, (prin ipoteză) precum suma a două cantități, din care una este precum viteza, cealaltă precum pătratul vitezei; și descreșterea lui $\frac{1}{GD}$ este precum suma cantităților $\frac{1}{GD}$ și $\frac{CG}{GD^2}$, dintre care cea dintâi este însăși $\frac{1}{GD}$, și cea din urmă $\frac{CG}{GD^2}$ este precum $\frac{1}{GD^2}$: deci $\frac{1}{GD}$, descreșterile fiind analoge, este precum viteza. Și dacă cantitatea GD , invers proporțională cu $\frac{1}{GD}$, crește cu cantitatea dată CG ; suma CD , timpul $ABED$ crescând în mod uniform, va crește în progresie geometrică. Q.E.D.

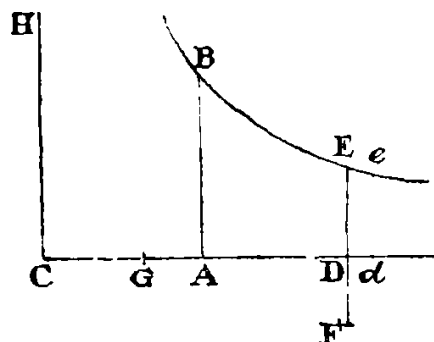
COROLARUL 1. Așadar dacă, punctele A , G fiind date, timpul se exprimă prin aria hiperbolică $ABED$, viteza se poate exprima prin inversa $\frac{1}{GD}$ a lui GD .

COROLARUL 2. Luînd însă GA către GD ca inversa vitezei la început, către inversa vitezei la sfârșitul unui timp oarecare $ABED$, se va afla punctul G . Aflîndu-l însă, viteza se poate afla dintr-un alt timp oarecare dat.

PROPOZIȚIA XII. TEOREMA IX

Fiind presupuse aceleași, zic că dacă spațiile descrise se iau în progresie aritmetică, vitezele mărite cu o cantitate oarecare dată vor fi în progresie geometrică.

Pe asimptota CD fie dat punctul R , și ridicînd perpendiculara RS , care întîlnește hiperbola în S , să exprimăm spațiul descris prin aria hiperbolică $RSED$; și viteza va fi precum lungimea GD , care împreună cu CG dată va forma lungimea CD descrescătoare după o progresie geometrică, în timp ce spațiul $RSED$ crește în progresie aritmetică.



Căci fiindcă creșterea $EDde$ a spațiului este dată, linioara Dd , care este descreșterea lui GD , va fi în raport invers, cu ED , și deci proporțională cu CD , adică precum suma lui GD și a lungimii date CG . Dar descreșterea vitezei, într-un timp invers proporțional cu ea, în care se descrie intervalul dat al spațiului $DdeE$, este precum rezistența

și timpul luate împreună, adică precum suma a două cantități, dintre care una este precum viteza, cealaltă precum pătratul vitezei, și în raport invers cu viteza; și astfel în același raport cu suma a două cantități, dintre care una se dă, iar cealaltă este precum viteza. Prin urmare atît descreșterea vitezei cît și a liniei GD , este precum cantitatea dată și cantitatea descrescătoare luate împreună, și din cauza descreșterilor analoge, cantitățile descrescătoare vor fi totdeauna analoge; anume viteza și linia GD . Q.E.D.

COROLARUL 1. Dacă exprimăm viteza prin lungimea GD , spațiul descris va fi precum aria hiperbolică $DESR$.

COROLARUL 2. Și dacă punctul R se ia oriunde, punctul G se va afla luînd GR către GD , precum viteza inițială către viteza după ce s-a descris un spațiu oarecare $RSED$. Aflînd însă punctul G , se dă spațiul din viteza dată și invers.

COROLARUL 3. De unde dacă (potrivit propoziției XI) se dă viteza din timpul dat, și prin această propoziție se dă spațiul din viteza dată; se va da spațiul din timpul dat: și invers.

PROPOZIȚIA XIII. TEOREMA X

Presupunînd că un corp atras în jos de o gravitate uniformă se urcă sau coboară pe o dreaptă și că i se opune o rezistență parte în raport cu viteza, parte în raport cu pătratul ei, zic că, dacă ducem drepte paralele cu diametrele prin capetele diametrelor conjugate, și vitezele sînt precum oarecare segmente ale paralelelor duse de la un punct dat; timpurile vor fi precum sectoarele ariilor, tăiate de drepte duse de la centru la capetele segmentelor și invers.

CAZUL 1. Să presupunem mai întîi că corpul se urcă, și din centrul D și cu un semidiametru oarecare DB să descriem un cadran $BETF$ de cerc,

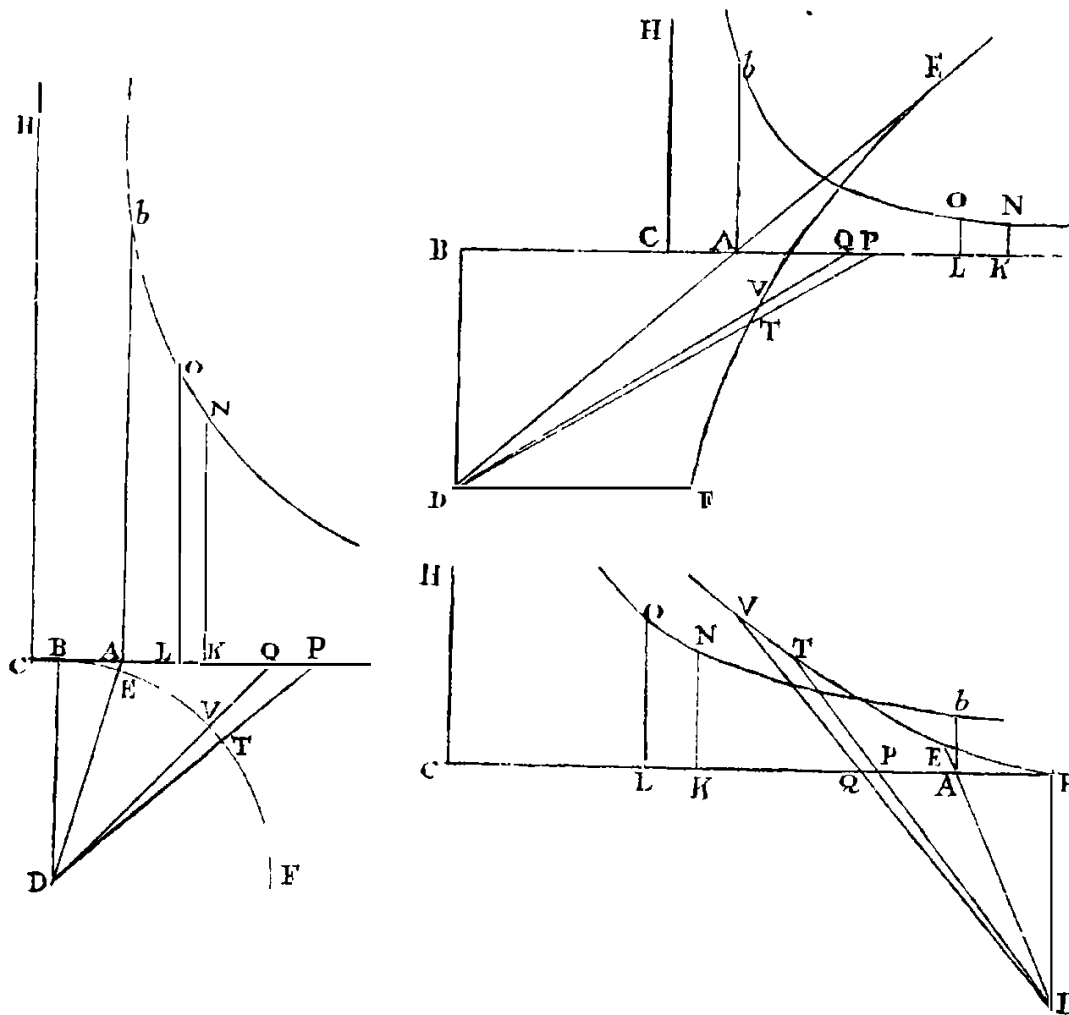
Căci descreșterea PQ a vitezei, produsă într-un interval dat de timp, este precum suma rezistenței $AP^2 + 2BAP$ și a gravității $AB^2 - BD^2$, adică, precum $BP^2 - BD^2$. Dar aria DTV este către aria DPQ , precum DT^2 către DP^2 ; și de

CAZUL 3. Fie AP viteza în coborîrea corpului, și $AP^2 + 2BAP$ rezistența, și $BD^2 - AB^2$ forța gravitației, unghiul DBA fiind drept. Și dacă din centrul D , cu vîrfurile principale B descriem hiperbola dreptunghiulară $BETV$ tăind dreptele prelungite DA , DP și DQ în E , T și V ; sectorul DET al acestei hiperbole va fi precum timpul întreg de coborîre.

Căci creșterea PQ a vitezei, și aria DPQ proporțională cu ea, este precum excesul gravității asupra rezistenței, adică, precum $BD^2 - AB^2 -$

cu $\frac{2PQ + 2BA \times PQ}{Z}$ sau $\frac{2PQ}{Z}$, și momentul $KLON$ al ariei $AbNK$ egal cu $\frac{2PQ \times LO}{Z}$ sau $\frac{PQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$.

CAZUL 1. Dacă corpul se urcă, și gravitatea este precum $AB^2 + BD^2$, fiind un cerc BET (în prima figură) linia AC , care este proporțională cu

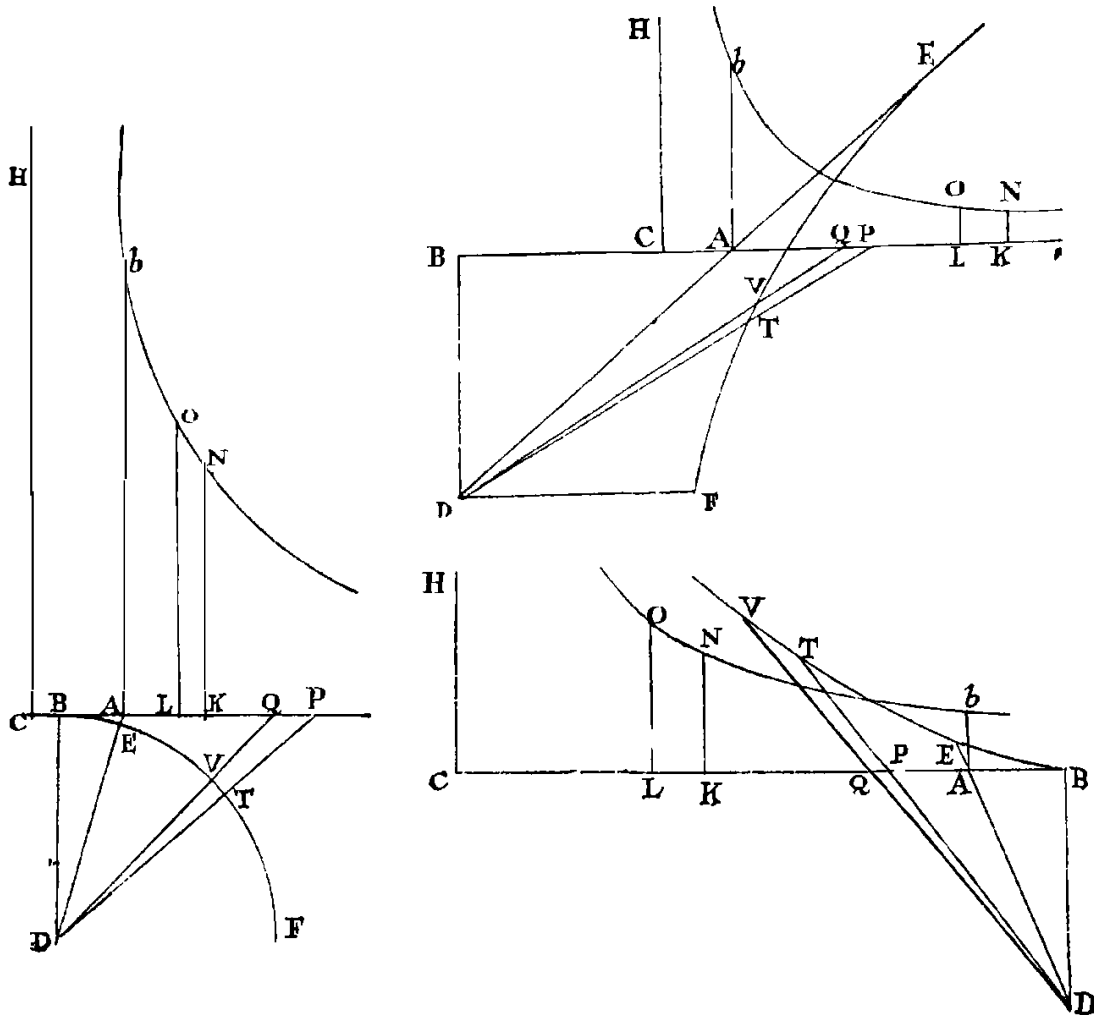


gravitatea, va fi $\frac{AB^2 + BD^2}{Z}$, și DP^2 sau $AP^2 + 2BAP + AB^2 + BD^2$ va fi $AK \times Z + AC \times Z$ sau $CK \times Z$; și astfel aria DTV va fi către aria DPQ precum DT^2 sau DB^2 către $CK \times Z$.

CAZUL 2. Dacă corpul se urcă, și gravitatea este precum $AB^2 - BD^2$, linia AC (în figura a doua) va fi $\frac{AB^2 - BD^2}{Z}$, și DT^2 va fi către DP^2 precum DF^2 sau DB^2 către $BP^2 - BD^2$ sau $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, adică, către $AK \times Z + AC \times Z$ sau $CK \times Z$. Și deci aria DTV va fi către aria DPQ precum DB^2 către $CK \times Z$.

CAZUL 3. Și prin același raționament, dacă corpul se coboară, și de aceea gravitatea este precum $BD^2 - AB^2$, și linia AC (în figura a treia) este egală cu $\frac{BD^2 - AB^2}{Z}$; aria DTV va fi către aria DPQ precum DB^2 către $CK \times Z$: ca mai sus.

Așadar, deoarece acele arii sînt totdeauna în acest raport; dacă în locul ariei DTV , prin care se exprimă momentul timpului totdeauna egal cu el însuși, să se scrie un dreptunghi oarecare determinat, anume $BD \times m$, aria DBQ , adică $\frac{1}{2} BD \times PQ$ va fi către $BD \times m$ precum $CK \times Z$ către BD^2 . Și de aceea $PQ \times BD^3$ devine egal cu $2BD \times m \times CK \times Z$, și momentul $KLON$ al ariei $AbNK$ aflat mai sus devine $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Să scădem din aria



DET momentul ei DTV sau $BD \times m$, și va rămîne $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Prin urmare diferența momentelor, adică, momentul diferenței ariilor este egal cu $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; și de aceea deoarece $\frac{BD \times m}{AB}$ este dat precum viteza AP , adică, precum momentul spațiului pe care-l descrie corpul urcîndu-se sau coborîndu-se. Și de aceea diferența ariilor și spațiul, crescînd sau descrescînd cu momente proporționale și începînd sau dispărînd deodată cu ele, sînt proporționale. Q.E.D.

COROLAR. Dacă lungimea, care se naște aplicînd aria DET la linia BD , se numește M ; și se ia o altă lungime V avînd către lungimea M , raportul pe care-l are linia DA către linia DE : spațiul, pe care-l descrie corpul în urcarea sau coborîrea în întreg mediul rezistent, va fi către spațiul, pe care-l poate descrie corpul într-un mediu fără rezistență căzînd din repaus în ace-

lași timp, ca diferența ariilor sus-menționate către $\frac{BD \times V^2}{AB}$; și deci este dat din timpul dat. Căci spațiul într-un mediu fără rezistență este precum pătratul timpului, sau precum V^2 ; și din cauză că BD și AB sînt date precum $\frac{BD \times V^2}{AB}$. Această arie este egală cu aria $\frac{DA^2 \times BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$, și momentul lui M este m ; și de aceea momentul acestei arii este $\frac{DA^2 \times BD \times 2M \times m}{DE^2 \times AB}$. Dar acest moment este către momentul diferenței ariilor amintite mai sus DET și $AbNK$, adică către $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, precum $\frac{DA^2 \times BD \times M}{DE^2}$ către $\frac{1}{2} BD \times AP$, sau precum $\frac{DA^2}{DE^2}$ înmulțit cu DET către DAP ; și deci, cînd ariile DET și DAP sînt cît se poate de mici, în raport de egalitate. Prin urmare aria $\frac{BD \times V^2}{AB}$, și diferența ariilor DET și $AbnK$, cînd toate aceste arii sînt cît se poate de mici, au momente egale; și deci sînt egale. De unde deoarece vitezele, și de aceea și spațiile descrise simultan în ambele medii la începutul coborîrii sau la sfîrșitul ascensiunii se apropie de egalitate; și deci atunci sînt între ele precum aria $\frac{BD \times V^2}{AB}$, și diferența ariilor DET și $AbNK$; și de aceea cum spațiul într-un mediu fără rezistență este totdeauna precum $\frac{BD \times V^2}{AB}$, și spațiul într-un mediu rezistent este totdeauna precum diferența ariilor DET și $AbNK$: este necesar ca spațiile în ambele medii, descrise în timpuri oarecare egale, să fie între ele precum aria $\frac{BD \times V^2}{AB}$, și diferența ariilor DET și $AbnK$. Q.E.D.

SCOLIE

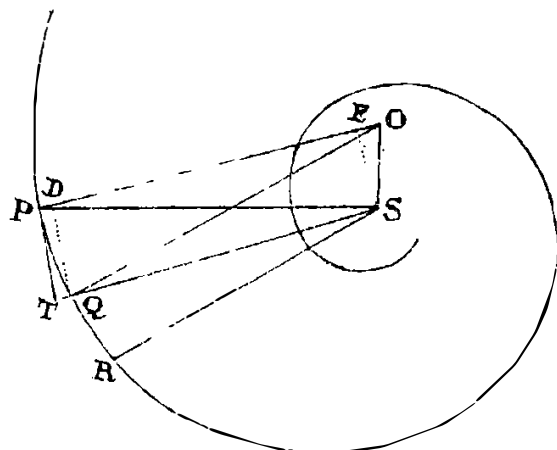
Rezistența corpurilor sferice în fluide provine parte din tenacitate, parte din frecare și parte din densitatea mediului. Și acea parte a rezistenței, care provine din densitatea fluidului am spus că este precum pătratul vitezei; cealaltă parte, care provine din tenacitatea fluidului este uniformă, adică precum momentul timpului: și deci putem trece deja la mișcarea corpurilor, cărora li se opune o rezistență, parte cu o forță uniformă sau în raportul momentelor timpului, și parte proporțional cu pătratul vitezei. Dar este de ajuns că am arătat drumul către acest raționament în propozițiile precedente VIII și IX, și în corolarele lor. În acelea ca și pentru rezistența uniformă a corpului ascendent, care provine din greutatea lui, se poate substitui rezistența uniformă, care provine din tenacitatea mediului, cînd corpul se mișcă numai prin forța inerentă; și corpul urcîndu-se pe o dreaptă este permis să adunăm această rezistență uniformă la forța gravitației; și să o scădem, cînd corpul se coboară pe o dreaptă. Putem trece de asemenea la mișcarea corpurilor, cărora li se opune o rezistență parte în mod uniform, parte în raport cu viteza, și parte în raport cu pătratul vitezei. Și am arătat calea în propozițiile precedente XIII și XIV în care și rezistența uniformă, ce se naște din tenacitatea mediului se poate substitui forței gravitației, sau se poate compune cu ea, ca mai înainte. Dar mă grăbesc la altele.

SECȚIUNEA IV

Despre mișcarea circulară a corpurilor în medii rezistente

LEMA III

Fie PQR o spirală ce taie toate razele SP, SQ, SR etc. sub unghiuri egale. Să ducem dreapta PT care o atinge într-un punct oarecare P , și taie raza SQ în T ; și ridicând perpendicularele PO, QO pe spirală și concurente în O , să unim SO . Zic că dacă punctele P și Q se apropie unul de altul și coincid, unghiul PSO devine drept, și raportul ultim al dreptunghiului $TQ \times 2PS$ către PQ^2 va fi un raport de egalitate.



Căci din unghiurile drepte OPQ, OQR să scădem unghiurile egale SPQ, SQR , și vor rămâne unghiurile egale OPS, OQS . Prin urmare cercul care trece prin punctele O, S, P va trece și prin punctul Q . Să coincidă punctele P și Q , și acest cerc atinge spirala în locul de întâlnire PQ , și de aceea va tăia dreapta OP perpendicular. Deci OP va fi diametrul acestui cerc, și unghiul OSP din semicerc un unghi drept. Q.E.D.

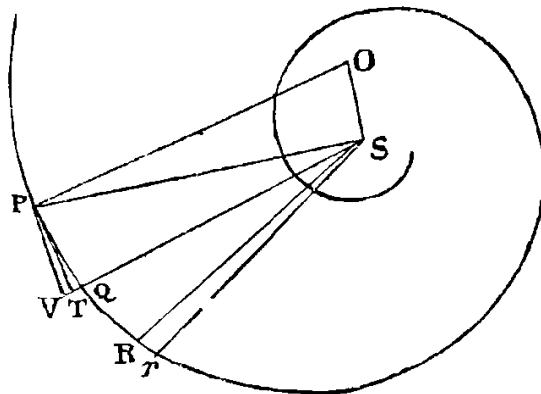
Pe OP să coborâm perpendicularele QD, SE , și rapoartele ultime ale liniilor vor fi de acest fel: TQ către PD precum TS sau PS către PE , sau $2PO$ către $2PS$; la fel PD către PQ precum PQ către $2PO$; și prin egalitate perturbată TQ către PQ precum PQ către $2PS$. De unde PQ^2 devine egal cu $TQ \times 2PS$. Q.E.D.

PROPOZIȚIA XV. TEOREMA XII

Dacă densitatea mediului în diversele locuri este în raport invers cu distanța locurilor de la un centru imobil, și fie forța centripetă proporțională cu pătratul densității: zic că corpul se poate roti într-o spirală, care taie toate razele duse din acel centru sub un unghi dat.

Să presupunem cele din lema de mai sus, și să prelungim pe SQ în V , ca să fie SV egală cu SP . Într-un timp oarecare, într-un mediu rezistent, un corp să descrie un arc foarte mic PQ , și într-un timp dublu arcul cât se poate de mic PR ; și descreșterile arcelor născute din rezistență, adică diferențele de la arcele, care ar fi descrise într-un mediu fără rezistență în aceleași timpuri, vor fi între ele precum pătratele timpurilor în care ele se nasc. Așadar descreșterea arcului PQ este a patra parte a descreșterii arcului PR . De unde de asemenea dacă luăm aria QSR egală cu aria PSQ , descreșterea arcului PQ va fi egală cu jumătatea linioarei Rr ; și deci forța rezistenței și forța centripetă sînt între ele precum linioarele $\frac{1}{2}Rr$ și TQ pe care le produc

în același timp. Deoarece forța centripetă, cu care corpul este acționat în P este în raport invers cu SP^2 , și (potrivit lemei X, Cartea I), linioara TQ , care este născută din acea forță, este într-un raport compus din raportul acestei forțe și pătratul raportului timpului în care se descrie arcul PQ (căci în acest caz neglijez rezistența, ca fiind infinit de mică față de forța centripetă) va fi $TQ \times SP^2$, adică (potrivit lemei celei mai noi) $\frac{1}{2}PQ^2 \times SP$, proporțional cu pătratul timpului, și deci timpul este precum $PQ \times \sqrt{SP}$; și viteza corpului, cu care se descrie arcul PQ în acel timp, precum $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ sau $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, adică, în raport invers cu rădăcina pătrată a lui SP .



Și printr-un raționament analog, viteza cu care se descrie arcul QR , este în raport invers cu rădăcina pătrată a lui SQ . Dar arcele PQ și QR sînt precum vitezele de descriere între ele, adică, precum rădăcina pătrată a raportului lui SQ către SP , sau precum SQ către $\sqrt{SP \times SQ}$; și fiindcă unghiurile SPQ , SQR sînt egale și ariile PSQ , QSR sînt egale, arcul PQ este către arcul QR precum SQ către SP . Să luăm diferențele consecventelor proporționale, și va fi arcul PQ către arcul Rr precum SQ către $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, sau $\frac{1}{2} VQ$. Căci suprapunîndu-se punctele P și Q , raportul ultim $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ către $\frac{1}{2} VQ$ este un raport de egalitate. Deoarece descreșterea arcului PQ , născută din rezistență, sau dublul acestuia Rr , este precum rezistența și pătratul timpului luate împreună; rezistența va fi precum $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$. Dar PQ era către Rr , precum SQ către $\frac{1}{2} VQ$, și deci $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$ devine ca $\frac{\frac{1}{2} VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ sau precum $\frac{\frac{1}{2} OS}{OP \times SP^2}$. Căci punctele P și Q suprapunîndu-se, SP și SQ coincid, și unghiul PVQ devine drept; și triunghiurile PVQ , PSO fiind asemenea, avem PQ către $\frac{1}{2} VQ$ precum OP către $\frac{1}{2} OS$. Prin urmare $\frac{OS}{OP \times SP^2}$ este precum rezistența, adică, în raportul densității mediului în P și a pătratului vitezei luate împreună. Să scădem pătratul raportului vitezei, adică raportul $\frac{1}{SP^2}$, și va rămîne densitatea mediului în P precum $\frac{OS}{OP \times SP}$. Fie dată spirala, și fiind raportul OS către OP , densitatea mediului în P va fi precum $\frac{1}{SP}$. Așadar în mediul a cărui densitate este în raport invers cu distanța SP de la centru, corpul se poate învîrți pe această spirală. Q.E.D.

COROLARUL 1. Viteza într-un loc oarecare P este totdeauna aceea cu care corpul se poate roti într-un mediu fără rezistență cu aceeași forță centripetă pe un cerc, la aceeași distanță SP de la centru.

COROLARUL 2. Densitatea mediului, dacă se dă distanța SP , este precum $\frac{OS}{OP}$, iar dacă distanța nu este dată, precum $\frac{OS}{OP \times SP}$. Și de aici spirala se poate adapta la orice densitate a mediului.

în raport invers cu rădăcina pătrată a distanțelor de la centru (adică, precum AS către media proporțională între AS și BS) corpul va continua să descrie nenumărate revoluții asemenea BFC , CGD etc. și prin intersecții va împărți raza AS în părțile AS , BS , CS , DS etc., continuu proporționale. Iar timpurile de revoluție vor fi precum perimetrele orbitelor AEB , BFC , CGD etc. și în raport invers cu vitezele inițiale A , B , C ; adică, precum $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Și timpul întreg, în care corpul va ajunge la centru, va fi către timpul primei revoluții, precum suma tuturor mărimilor continuu proporționale $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, mergînd la infinit, către primul termen $AS^{\frac{3}{2}}$; adică, precum primul termen $AS^{\frac{3}{2}}$, către diferența primelor două $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, adică aproape precum $\frac{2}{3} AS$ către AB . De unde timpul întreg se poate ușor afla.

COROLARUL 8. De aici se poate deduce de asemenea destul de apropiat mișcarea corpurilor în medii, a căror densitate este sau uniformă sau deservă o altă lege oarecare dată. Din centrul S , cu intervalele continuu proporționale SA , SB , SC etc., să descriem niște cercuri, și să presupunem că timpul de revoluție între perimetrele a două oarecare din aceste cercuri, în mediul de care am vorbit, este către timpul de revoluție între aceleași în mediul propus, precum este densitatea mijlocie a mediului propus între aceste cercuri, către densitatea mijlocie a mediului de care am vorbit între aceleași aproximativ. Dar și în același raport este secanta unghiului sub care spirala determinată mai sus, în mediul de care am vorbit, taie raza AS , către secanta unghiului sub care noua spirală taie aceeași rază în mediul propus. Și de asemenea după cum sînt tangentele acelor unghiuri aproximativ tot așa este numărul tuturor revoluțiilor între aceleași două cercuri aproximativ. Dacă aceste au loc totdeauna între două cercuri, mișcarea va continua pe toate cercurile. Și în acest fel ne putem ușor imagina în ce fel și în ce timpuri vor trebui să se rotească corpurile într-un mediu oarecare regulat.

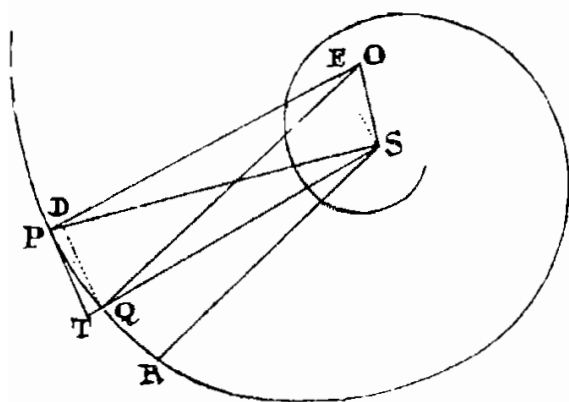
COROLARUL 9. Și chiar dacă mișcările excentrice au loc pe spirale apropiate de forma ovală; totuși închipuindu-ne că diversele revoluții ale acelor spirale sînt la intervale egale între ele, și se apropie de centru în aceleași grade cu spirala descrisă mai sus, înțelegem și în ce fel se efectuează mișcările corpurilor pe acest fel de spirale.

PROPOZIȚIA XVI. TEOREMA XIII

Dacă densitatea mediului în diversele locuri este în raport invers cu distanța locurilor de la centrul imobil, și forța centripetă este în raport invers cu o putere oarecare a aceleiași distanțe, zic că corpul se poate învîrți pe o spirală care intersectează toate razele duse din centru sub un unghi dat.

Se demonstrează cu aceeași metodă ca în propoziția de mai sus. Căci dacă forța centripetă în P este în raport invers cu o putere oarecare SP^{n+1} a distanței SP al cărui indice este $n + 1$; se conchide ca mai sus, că timpul,

în care corpul descrie un arc oarecare PQ , va fi precum $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; și rezistența în P precum $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$, sau precum $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$ și de aceea precum $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, adică, din cauză că $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) \times OS}{OP}$ este dat, în raport invers cu SP^{n+1} . Și de aceea, cum viteza este în raport invers cu $SP^{\frac{1}{2}n}$, densitatea în P va fi în raport invers cu SP .



COROLARUL 1. Rezistența este către forța centripetă precum $(1 - \frac{1}{2}n) \times OS$ către OP .

COROLARUL 2. Dacă forța centripetă este în raport invers cu SP^3 va fi $1 - \frac{1}{2}n$ egal cu zero, și deci rezistența și densitatea mediului va fi nulă, ca în propoziția IX din Cartea I.

COROLARUL 3. Dacă forța centripetă este în raport invers cu o putere oarecare a razei SP al cărei indice este mai mare ca numărul 3, rezistența pozitivă va trece în negativă.

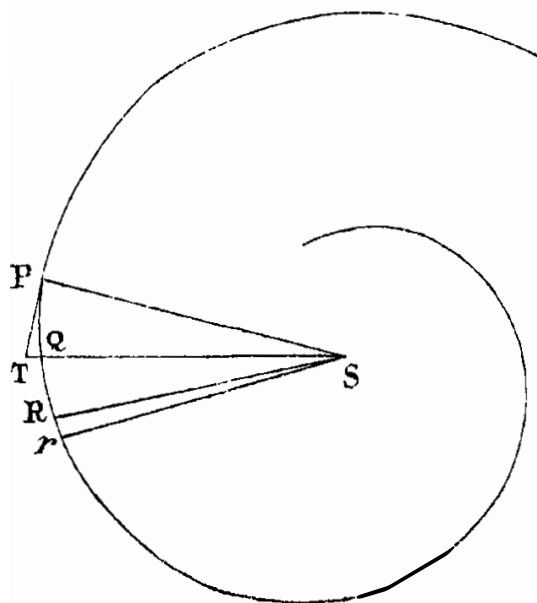
SCOLIE

De altfel această propoziție și cele de mai sus, care se referă la medii de densități neegale, trebuie înțelese ca fiind aplicate asupra mișcării corpurilor atât de mici, încât nu trebuie luată în seamă densitatea mai mare dintr-o parte a corpului decât din cealaltă. Iar rezistența, celelalte mărimi fiind egale, o presupun proporțională cu densitatea. De unde în mediile, a căror forță de rezistență nu este precum densitatea, densitatea trebuie să crească sau să se micșoreze atât de mult, încât sau să suprimă surplusul rezistenței sau să completeze lipsa.

PROPOZIȚIA XVII. PROBLEMA IV

Să aflăm forța centripetă și rezistența mediului, cu care se poate învîrți un corp pe o spirală dată, legea vitezei fiind dată.

Fie spirala PQR . Din viteza, cu care corpul parcurge arcul foarte mic PQ , se va da timpul, și din înălțimea TQ , care este precum forța centripetă și pătratul timpului se va da forța. Apoi din diferența RSr a ariilor PSQ și QSR descrise în intervale egale de timp, se va da întârzierea corpului, și din întârziere se va afla rezistența și densitatea mediului.



PROPOZIȚIA XVIII. PROBLEMA V

Fiind dată legea forței centripete, să aflăm densitatea mediului în diverse locuri, în care corpul va descrie o spirală dată.

Din forța centripetă trebuie aflată viteza în diversele locuri, apoi din întârzierea vitezei trebuie determinată densitatea mediului; ca în propoziția de mai sus.

Dar am expus metoda de a trata aceste probleme în propoziția X și lema II a acestei Cărți; și nu vreau să rețin pe cititor mai mult în astfel de cercetări complicate. Va trebui acum să adaug unele lucruri despre forțele corpurilor la înaintare, și despre densitatea și rezistența mediilor, în care au loc mișcările expuse până aici și cele înrudite cu ele.

SECȚIUNEA V

Despre densitatea și compresiunea fluidelor și despre hidrostatică

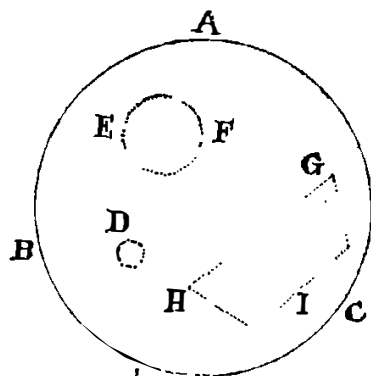
DEFINIȚIA FLUIDULUI

Fluid este orice corp, ale cărui părți cedează la orice forță imprimată, și cedînd se mișcă ușor între ele

PROPOZIȚIA XIX. TEOREMA XIV

Toate părțile unui fluid omogen și nemișcat, care este închis într-un vas oarecare nemișcat și este comprimat din toate părțile, (punînd la o parte considerația condensării, greutateii și a tuturor forțelor centripete) sînt apăsate în mod egal din toate părțile, și rămîn în locurile lor fără vreo mișcare provenită de la acea presiune.

CAZUL 1. Într-un vas sferic ABC să închidem și să comprimăm în mod uniform un fluid din toate părțile: zic că nici o parte a lui nu se va mișca din cauza presiunii. Căci dacă o parte oarecare D se mișcă, este necesar ca toate părțile de acest fel, situate la aceeași distanță de centru, să se miște



simultan cu o mișcare asemănătoare; și aceasta din cauză că presiunea tuturor este asemenea și egală și se exclude orice mișcare dacă nu provine de la acea presiune. Și nici nu pot să se apropie toate de centru, decît dacă fluidul se condensează spre centru; contrar ipotezei. Nu pot nici să se îndepărteze mai mult, decît dacă fluidul s-ar condensa spre circumferință; iarăși contrar ipotezei. Nu se pot mișca într-o direcție păstrîndu-și distanțele de la centru, fiindcă din cauză analogă se vor mișca în direcție contrară; dar aceeași parte nu se poate mișca

în același timp, în părți contrarii. Prin urmare nici o parte a fluidului nu se va mișca din locul său. Q.E.D.

CAZUL 2. Mai zic, că toate părțile sferice ale acestui fluid sînt comprimate în mod egal din toate părțile. Căci fie EF o parte sferică a fluidului, și dacă aceasta nu se comprimă în mod egal din toate părțile, să mărim presiunea mai mică, pînă ce ea este comprimată în mod egal din toate părțile; și părțile lui potrivit primului caz, vor rămîne la locurile lor. Dar înainte de a mări presiunea vor rămîne la locurile lor, potrivit iarăși primului caz, și prin adunarea noii presiuni se vor mișca din locurile lor, potrivit definiției fluidului. Dar aceste două sînt în contrazicere. Deci în mod fals se spunea că sfera EF nu era comprimată în mod egal din toate părțile. Q.E.D.

CAZUL 3. De aceea zic că presiunea diverselor părți sferice este egală. Căci părțile sferice vecine se apasă în punctul de contact în mod egal, potrivit legii III a mișcării. Dar și potrivit cazului 2 sînt apăsate din toate părțile cu aceeași forță. Așadar două părți sferice oarecare care nu sînt vecine, deoarece partea sferică intermediară le poate atinge pe amîndouă, sînt apăsate, cu aceeași forță. Q.E.D.

CAZUL 4. Zic apoi că toate părțile fluidului sînt apăsate pretutindenea în mod egal. Căci două părți oarecare pot fi atinse de părțile sferice în puncte oarecare, și acolo apasă în mod egal acele părți sferice, potrivit cazului 3 și la rîndul lor sînt apăsate în mod egal, potrivit legii a treia a mișcării. Q.E.D.

CAZUL 5. Așadar fiindcă o parte oarecare GHI a fluidului este închisă în restul fluidului ca într-un vas, și este comprimată în mod egal din toate părțile, iar părțile lui se apasă reciproc în mod egal și sînt în repaus între ele; este evident că toate părțile unui fluid oarecare GHI , care este apăsător din toate părțile în mod egal, se apasă reciproc în mod egal, și sînt în repaus între ele. Q.E.D.

CAZUL 6. Prin urmare dacă fluidul este închis într-un vas nerigid, și nu este comprimat în mod egal din toate părțile; el va ceda presiunii mai intense, potrivit definiției fluidității.

CAZUL 7. Și de aceea într-un vas rigid, fluidul nu va susține o presiune mai intensă dintr-o parte decît din alta, ci îi va ceda, și anume într-un moment de timp, deoarece latura rigidă a vasului nu urmează lichidului care cedează. Dar cedînd va apăsa latura opusă și astfel presiunea va tinde din toate părțile spre egalitate. Și fiindcă fluidul tinde să se îndepărteze cît mai iute de la partea mai apăsată, este oprit de rezistența vasului la partea opusă; presiunea se reduce din toate părțile la egalitate, într-un moment de timp fără mișcare locală: și în consecință părțile fluidului, potrivit cazului 5 se apasă reciproc în mod egal, și sînt în repaus între ele. Q.E.D.

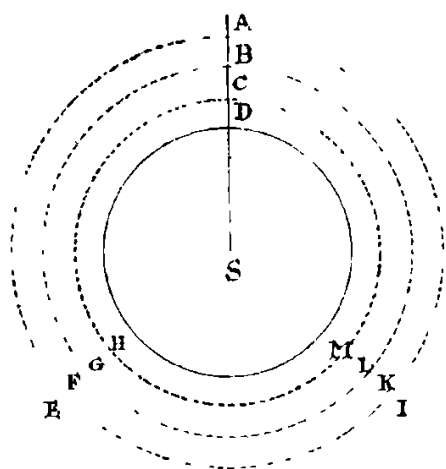
COROLAR De unde nici mișcările părților fluidului între ele, nu se pot schimba, printr-o presiune imprimată fluidului undeva pe suprafața externă, decît dacă sau se schimbă undeva figura suprafeței, sau toate părțile fluidului apăsîndu-se reciproc mai intens sau mai slab alunecă între ele mai greu sau mai ușor.

PROPOZIȚIA XX. TEOREMA XV

Dacă diversele părți ale unui fluid sferic și omogen la distanțe egale de centru, situat pe un fundament sferic concentric gravitează spre centrul întregului, fundamentul va susține greutatea unui cilindru, a cărui bază este egală cu suprafața fundului, și înălțimea aceeași cu a fluidului ce apasă.

Fie DHM suprafața fundului, și AEI suprafața superioară a fluidului. Să împărțim fluidul în orbite concentrice de grosime egală prin nenumăratele orbite sferice BFK , CGL ; și să ne închipuim că forța gravitației acționează numai pe fața superioară a fiecărei orbite, și că acțiunile sînt egale pe părțile egale ale tuturor suprafețelor. Prin urmare suprafața superioară AE este apăsată cu forța simplă a gravitației proprii, cu care sînt apăsate în mod egal atît toate părțile orbitei superioare cît și suprafața a doua BFK (potrivit propoziției XIX) după măsura sa. De aceea suprafața a doua BFK este apăsată cu forța proprie a gravitației, care adunată la forța de mai sus dublează presiunea. Cu această presiune, potrivit măsurii sale, și în plus cu forța proprie a gravitației, adică cu presiune triplă, este apăsată suprafața a treia CGL . Și la fel suprafața a patra este acționată de o presiune

cvadruplă, a cincia de una cvintuplă și așa mai departe. Deci presiunea cu care este acționată fiecare suprafață, nu este precum cantitatea solidă a fluidului apăsător, ci precum numărul orbitelor pînă la partea de sus a



fluidului; și este egală cu gravitatea orbitei inferioare înmulțită cu numărul orbitelor, adică, cu gravitatea solidului a cărui ultim raport către cilindrul determinat mai sus (dacă numai numărul orbitelor crește și grosimea scade la infinit, astfel că acțiunea gravității de la suprafața cea mai de jos la cea mai de sus să devină continuă) va fi un raport de egalitate. Prin urmare suprafața cea mai de jos susține greutatea cilindrului determinat mai sus. Q.E.D. Și printr-un raționament analog este evidentă propoziția, cînd gravitatea descrește într-un raport oarecare dat cu distanțe de la centru, precum și cînd fluidul mai sus este mai rar, jos mai dens. Q.E.D.

COROLARUL 1. Prin urmare fundul nu este acționat de greutatea întreagă a fluidului apăsător ci susține numai acea parte a greutatei care este descrisă în propoziție; restul greutății este susținut de figura boltită a fluidului.

COROLARUL 2. Dar la distanțe egale de la centru cantitatea presiunii este totdeauna aceeași, fie că suprafața apăsată este paralelă cu orizontul sau perpendiculară sau oblică; fie că fluidul continuat în sus de la suprafața apăsată, se urcă perpendicular după o linie dreaptă, sau șerpuiește în mod oblic prin cavități sinuoase și canale, fie că ele sînt regulate sau foarte neregulate, largi sau foarte înguste. Se poate demonstra că în aceste împrejurări, presiunea nu se schimbă, aplicînd demonstrația acestei teoreme la cazul diverselor fluide.

COROLARUL 3. Prin același raționament se demonstrează de asemenea (potrivit propoziției XIX) că părțile fluidului greu, nu capătă nici o mișcare între ele din presiunea greutății apăsătoare; dacă excludem mișcarea produsă de condensare.

COROLARUL 4. Și de aceea dacă un alt corp de aceeași greutate specifică, lipsit de condensare se cufundă în acest fluid, el nu va primi nici o mișcare din presiunea greutății apăsătoare: nu se va coborî, nu se va urca nu va fi silit să-și schimbe figura. Dacă este sferic va rămîne sferic, indiferent de presiune; dacă este pătrat va rămîne pătrat; și aceasta fie că este moale, fie că este foarte fluid; fie că înoată liber în fluid, fie că se coboară la fund. Căci orice parte interioară a unui fluid se află în situația unui corp cufundat, și la fel este situația tuturor corpurilor cufundate de aceeași mărime, figură și greutate specifică. Dacă un corp cufundat păstrîndu-și greutatea se lichiefiază și ia forma fluidului: acesta dacă mai întîi se urcă sau se coboară sau din cauza presiunii ia o figură nouă, și acum se urcă sau se coboară sau va tinde să ia o figură nouă: aceasta din cauza că greutatea lui și celelalte cauze ale mișcării se mențin. Dar (potrivit cazului 5, propoziția XIX) el va rămîne în repaus și-și va păstra figura. Deci și în cazul precedent.

COROLARUL 5. Prin urmare corpul care specific este mai greu decît fluidul care-l înconjură se va cufunda, și cel care este specific mai ușor

se va urca, și urmează atîta mișcare și schimbare a figurii cîtă poate produce acel surplus sau lipsă de greutate. Căci surplusul sau deficitul este echivalent cu impulsul cu care este acționat un corp, de altfel în echilibru cu părțile fluidului; și se poate asemana cu surplusul sau lipsa greutății într-unul din talerele balanței.

COROLARUL 6. Așadar gravitatea corpurilor așezate în fluid este de două feluri: una adevărată și absolută, cealaltă aparentă, vulgară și comparativă. Gravitatea absolută este forța întreagă cu care corpul tinde în jos: relativă și vulgară este surplusul gravității cu care tinde în jos mai mult decît fluidul înconjurător. În gravitatea de felul întîi părțile fluidelor și ale tuturor corpurilor gravitează în locurile lor: și astfel unindu-se greutatețile compun greutatea întregului. Căci totul luat împreună este greu, după cum se poate experimenta cu vasele pline de lichide: și greutatea întregului este egală cu greutatețile tuturor părților și deci se compune din ele. În greutatea de celălalt fel corpurile nu gravitează în locurile lor, adică, comparate între ele nu sunt preponderente, ci împiedicînd reciproc tendințele de coborîre rămîn în locurile lor, ca și cînd nu ar fi grele. Cele care sînt în aer și nu sînt preponderente, de obicei nu se consideră grele. Cele care sînt preponderente de obicei se consideră grele, întrucît nu sînt susținute de greutatea aerului. Greutățile obișnuite nu sînt altceva decît surplusul greutateților adevărate față de greutatea aerului. De aceea în mod obișnuit se numesc ușoare acelea care sînt mai puțin grele, și cedînd aerului preponderent tind în sus. Sînt ușoare în mod relativ, nu adevărat deoarece coboară în vid. Astfel în apă corpurile, care se coboară sau se urcă din cauza greutății mai mari sau mai mici, sînt în mod comparativ și aparent grele sau ușoare, și greutatea sau ușurința lor comparativă și aparentă este surplusul sau lipsa cu care greutatea lor adevărată sau întrece în mărime greutatea apei sau este întrecută de ea. Dar acelea care nici nu coboară fiind preponderente, nici nu urcă cedînd celor preponderente, deși cu greutatețile lor adevărate se adună la greutatea întregului, totuși în mod comparativ și în sens obișnuit nu sînt grele în apă. Căci demonstrația cazului acestora este analogă.

COROLARUL 7. Cele demonstrate despre gravitate, se aplică la orice alte forțe centripete.

COROLARUL 8. Prin urmare dacă mediul, în care se mișcă un corp oarecare, este acționat fie de gravitatea proprie, sau de altă forță centripetă oarecare și corpul este acționat mai tare de acea forță; diferența forțelor este forța motoare, pe care am considerat-o în propozițiile precedente ca pe o forță centripetă. Dacă corpul este acționat mai ușor de acea forță, diferența forțelor trebuie considerată ca o forță centrifugă.

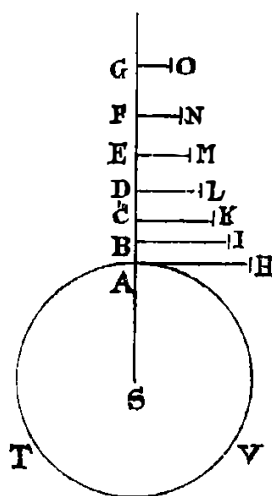
COROLARUL 9. Dar cum fluidele apăsînd corpurile închise nu schimbă figurile lor externe, mai apare (potrivit corolarului propoziției XIX) că nu vor schimba situația părților interne între ele: și deci, dacă animalele se cufundă, și orice senzație se naște din mișcarea părților corpurile cufundate nici nu suferă, nici nu vor produce vreo senzație, decît dacă aceste corpuri pot fi condensate prin comprimare. Și la fel este situația oricărui sistem de corpuri înconjurat de un fluid ce comprimă. Toate părțile sistemului vor fi agitate de aceleași mișcări, ca și cînd ar fi situate în vid, și ar reține numai greutatea lor comparativă, afară de cazul cînd fluidul sau rezistă mișcărilor lor, sau este necesar să le unească prin compresiune.

PROPOZIȚIA XXI. TEOREMA XVI

Fie densitatea unui fluid oarecare proporțională cu compresiunea, și părțile lui fie atrase în jos de o forță centripetă invers proporțională cu distanțele lor de centru: zic, că dacă acele distanțe se iau continuu proporționale, densitățile fluidului înmulțite cu acele distanțe de asemenea vor fi continuu proporționale.

Să reprezinte ATV fundul sferic pe care apasă fluidul, S centrul, SA , SB , SC , SD , SE , SF etc., distanțele continuu proporționale. Să ridicăm perpendicularele AH , BI , CK , DL , EM , FN etc. care să fie precum densitățile mediului în locurile A , B , C , D , E , F ; și greutatea specifică în acele locuri vor fi precum $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$ etc. sau, ceea ce este același lucru, precum $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$ etc.

Să ne închipuim mai întâi că aceste greutăți se continuă în mod uniform de la A la B , de la B la C , de la C la D etc., descreșterile în punctele B , C , D etc., fiind efectuate în mod gradat. Și aceste greutăți înmulțite cu înălțimile AB , BC , CD etc., vor da presiunile AH , BI , CK etc., prin care este acționat fundul ATV (potrivit teoremei XV). Prin urmare particula A susține toate presiunile AH , BI , CK , DL , mergând la infinit; și particula B toate presiunile afară de cea dintâi AH : și particula C pe toate afară de primele două AH , BI ; și așa mai departe: și de aceea densitatea AH a primei particule A este

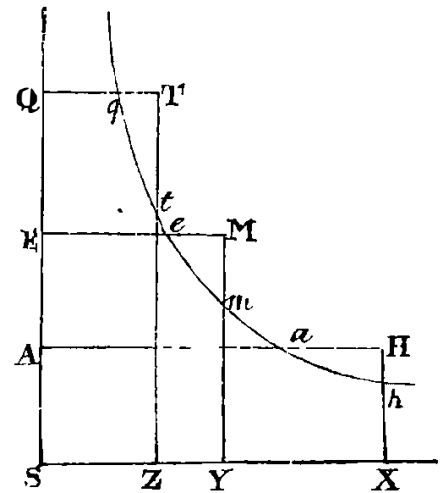


către densitatea BI a particulei a doua B precum suma tuturor $AH + BI + CK + DL$, la infinit, către suma tuturor $BI + CK + DL$ etc. Și BI densitatea particulei a doua B este către CK densitatea particulei a treia C , precum suma tuturor $BI + CK + DL$ etc., către suma tuturor $CK + DL$ etc. Așadar sumele acelea sînt proporționale cu diferențele lor AH , BI , CK etc., și de aceea continuu proporționale (potrivit lemei I a acestei Cărți) și prin urmare diferențele AH , BI , CK etc., proporționale cu sumele, sînt și continuu proporționale. Din care cauză cum densitățile în locurile A , B , C etc., sînt precum AH , BI , CK etc., acestea de asemenea vor fi continuu proporționale. Să procedăm prin salt, și prin egalitate la distanțele SA , SC , SE continuu proporționale, densitățile AH , CK , EM vor fi continuu proporționale. Și prin

același raționament la distanțe oarecare continuu proporționale SA , SD , SG , densitățile AH , DL , GO vor fi continuu proporționale. Să coincidă acum punctele A , B , C , D , E etc., în așa fel ca progresia greutăților specifice de la fundul A spre partea cea mai de sus a fluidului să devină continuă și la distanțe oarecare continuu proporționale SA , SD , SG , densitățile AH , DL , GO fiind totdeauna continuu proporționale, vor rămîne și acum continuu proporționale. Q.E.D.

COROLAR. De aici dacă se dă densitatea fluidului în două locuri, anume A și E , se poate obține densitatea lui într-un loc oarecare Q . Din centrul S , cu asimptotele dreptunghiulare SQ , SX să descriem o hiperbolă

tăind perpendicularele AH , EM , QT în a , e , q , precum și perpendicularele HX , MY , TZ , coborâte pe asimptota SX , în h , m , și t . Fie aria $YmtZ$ către aria dată $YmhX$ precum aria dată $EeqQ$ către aria dată $EeaA$; și linia Zt prelungită va tăia QT proporțională cu densitatea. Căci dacă liniile SA , SE , SQ sînt continuu proporționale, ariile $EeqQ$, $EeaA$ vor fi egale, și de aici ariile proporționale cu ele $YmtZ$, $XhmY$ de asemenea egale, și liniile SX , SY , SZ , adică, AH , EM , QT continuu proporționale, cum trebuie. Și dacă liniile SA , SE , SQ obțin o altă ordine oarecare în seria celor continuu proporționale, liniile AH , EM , QT , din cauză că ariile hiperbolice sînt proporționale, vor obține aceeași ordine într-o altă serie a cantităților continuu proporționale.



PROPOZIȚIA XXII. TEOREMA XVII

Fie densitatea unui fluid oarecare proporțională cu compresiunea, și părțile lui fie atrase în jos de o gravitate invers proporțională cu pătratele distanțelor lor de centru; zic că, dacă distanțele se iau în raport armonic, densitățile fluidului la aceste distanțe vor fi în progresie geometrică.

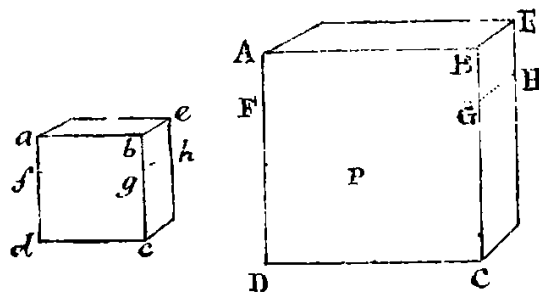
Să reprezinte S centrul, și SA , SB , SC , SD , SE distanțele în progresie geometrică. Să ridicăm perpendicularele AH , BI , CK etc., care sînt precum densitățile fluidului în locurile A , B , C , D , E etc., și greutatea lui specifice în aceleași locuri vor fi $\frac{AH}{SA^2}$, $\frac{BI}{SB^2}$, $\frac{CK}{SC^2}$ etc. Să ne închipuim că aceste gravități continuă în mod uniform, cea dintîi de la A la B , a doua de la B la C , a treia de la C la D etc., și acestea înmulțite cu înălțimile AB , BC , CD , DE etc., sau ceea ce este același lucru, cu distanțele SA , SB , SC etc., proporționale cu înălțimile, vor da exponenții presiunilor $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$ etc. De aceea fiindcă densitățile sînt precum sumele presiunilor diferențele densităților $AH - BI$, $BI - CK$ etc., vor fi precum diferențele $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$ etc., a acestor sume. Din centrul S , cu asimptotele SA , Sx , să descriem o hiperbolă oarecare, care să taie perpendicularele AH , BI , CK etc., în a , b , c etc., precum și perpendicularele Ht , Iu , Kw , duse pe asimptota Sx în h , i , k ; și diferențele densităților tu , uw etc., vor fi precum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$ etc. Și dreptunghiurile $tu \times th$, $uw \times ui$ etc., sau tp , uq etc., precum $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$ etc., adică precum Aa , Bb etc. Căci, din natura hiperbolei, SA este către AH sau St , precum th către Aa , și deci $\frac{AH}{SA} \frac{th}{SA}$ este egal cu Aa . Și printr-un raționament analog $\frac{BI}{SB} \frac{ui}{SB}$ este egal cu Bb etc. Dar Aa , Bb , Cc etc. sînt continuu proporționale, și de aceea proporționale cu diferențele lor $Aa - Bb$, $Bb - Cc$ etc., și deci cu aceste diferențe sînt proporționale dreptunghiurile tp , uq etc., precum și cu sumele diferențelor $Aa - Cc$

ocupat de fluid în raport invers cu această forță. Ne putem imagina alte legi de condensare, ca aceea cînd cubul forței de compresiune este precum puterea a patra a densității, sau cubul pătratului forței același cu puterea a patra a raportului densității. În care caz, dacă gravitatea este în raport invers cu pătratul distanței de la centru, densitatea va fi în raport invers cu cubul distanței. Să ne închipuim că cubul forței de compresiune este precum puterea a cincia a densității, și dacă gravitatea este în raport invers cu pătratul distanței, densitatea va fi în raport invers cu puterea $\frac{3}{2}$ a distanței. Să ne închipuim că forța de compresiune este proporțională cu pătratul densității și gravitatea în raport invers cu pătratul distanței, și densitatea va fi în raport invers cu distanța. Ar fi prea lung să considerăm toate cazurile. De altfel prin experiență se constată că densitatea aerului este sau precis sau cel puțin cît se poate de aproape precum forța de compresiune: și de aceea densitatea aerului în atmosfera Pămîntului este precum greutatea întregului aer ce apasă, adică precum înălțimea mercurului în barometru.

PROPOZIȚIA XXIII. TEOREMA XVIII

Dacă densitatea unui fluid compus din particule care fug una de alta, este precum compresiunea, forțele centrifuge ale particulelor sînt invers proporționale cu distanțele centrelor lor. Și viceversa, particulele forțelor care sînt invers proporționale cu distanțele centrelor care fug una de alta, compun un fluid elastic, a cărui densitate este proporțională cu compresiunea.

Să ne închipuim fluidul închis în spațiul cubic ACE , apoi redus prin compresiune la un spațiu cubic mai mic ace ; și distanțele particulelor, obținînd o situație asemenea între ele în ambele spații, vor fi precum laturile AB , ab , ale cuburilor; și densitățile mediilor în raport invers cu spațiile cuprinzătoare AB^3 și ab^3 . În fața plană $ABCD$ a cubului mai mare să luăm pătratul DP egal cu fața plană db a cubului mai mic; și prin ipoteză, presiunea, cu care pătratul DP apasă fluidul închis, va fi către presiunea cu care pătratul db acționează asupra fluidului închis, precum densitățile mediilor între ele, adică precum ab^3 către AB^3 . Dar presiunea cu care pătratul DB apasă fluidul închis, este către presiunea, cu care pătratul DB apasă același fluid, precum pătratul DB către pătratul DP , adică precum AB^2 către ab^2 . Deci, prin egalitate, presiunea cu care pătratul DB acționează fluidul, este către presiunea cu care pătratul db acționează asupra fluidului, precum ab către AB . Să împărțim fluidul în două părți prin planele FGH , fgh , duse prin mijlocul cuburilor, și acestea se apasă reciproc cu aceleași forțe, cu care sînt apăsate de planele AC , ac , adică, în raportul lui ab către AB : și deci forțele centrifuge, cu care aceste forțe sînt susținute, sînt în același raport. Numărul particulelor fiind egal și situat asemenea în fiecare cub, forțele pe care toate particulele le exercită asupra tuturor după planele FGH , fgh , sînt precum forțele



pe care fiecare le exercită asupra fiecăruia. Prin urmare forțele, pe care fiecare le exercită asupra fiecăruia după planul fgh în cubul mai mare, sînt către forțele, pe care fiecare le exercită pe fiecare după planul fgh în cubul mai mic, precum ab către AB , adică în raport invers cu distanțele reciproce ale particulelor. Q.E.D.

Și viceversa, dacă forțele diverselor particule sînt în raport invers cu distanțele, adică, în raport invers cu laturile AB , ab ale cuburilor; sumele forțelor vor fi în același raport, și presiunile laturilor DB , db precum sumele forțelor; și presiunea pătratului DP către presiunea laturei DB precum ab^2 către AB^2 . Și, prin egalitate, presiunea pătratului DP către presiunea laturii db precum ab^3 către AB^3 , adică, forța de compresiune către forța de compresiune precum densitatea către densitate. Q.E.D.

SCOLIE

Printr-un raționament analog, dacă forțele centrifuge ale particulelor sînt în raport invers cu pătratul distanțelor între centre, cuburile forțelor de compresiune vor fi precum puterea a patra a densităților. Dacă forțele centrifuge sînt în raport invers cu puterea a treia sau a patra a distanțelor, cuburile forțelor de compresiune vor fi precum puterea a cincia sau a șasea a densităților. Și în mod universal, dacă D este distanța, și E densitatea fluidului comprimat, și forțele centrifuge sînt în raport invers cu puterea oarecare D^n a distanței, al cărui indice este numărul n ; forțele de compresiune vor fi precum laturile cubice ale puterii E^{n+2} , al cărui indice este numărul $n+2$; și invers. Dar toate acestea trebuie înțelese despre forțele centrifuge ale particulelor care se termină în particulele învecinate, sau nu sînt împrăștiate prea departe. Un astfel de exemplu avem în corpurile magnetice. Forța atractivă a acestora se termină aproape în corpurile învecinate de genul lor. Forța magneților se reduce printr-o lamă de fier interpusă, și se termină aproape în fier. Căci corpurile mai îndepărtate sînt atrase nu atît de magnet cît de lămă. În același fel dacă particulele fug de alte particule de genul lor foarte apropiate, dar asupra particulelor îndepărtate nu exercită nici o forță, din particule de acest fel se compun fluidele care au fost tratate în această propoziție. Căci dacă forța unei particule oarecare se propagă la infinit, va fi necesară o forță mai mare pentru o condensare egală a unei cantități mai mari de fluid. Dar că fluidele elastice constau din particule care se resping reciproc, este o chestiune de fizică. Noi am demonstrat în mod matematic proprietatea fluidelor constînd din particule de acest fel, pentru a da ocazie filozofilor să se ocupe de această chestiune.

SECȚIUNEA VI

Despre mișcarea și rezistența corpurilor pendulare

PROPOZIȚIA XXIV. TEOREMA XIX

Cantitățile de materie în corpurile pendulare, ale căror centre de oscilație sînt la distanțe egale de la centrul de suspensiune, sînt într-un raport compus din raportul greutateilor și pătratul raportului timpurilor de oscilație în vid.

Căci viteza pe care o poate naște o forță dată într-o materie dată, într-un timp dat, este precum forța și timpul, și în raport invers cu materia. Cu cît este mai mare forța sau este mai mare timpul, sau este mai mică materia, cu atît se va naște o viteză mai mare. Ceea ce este evident potrivit legii II a mișcării. Într-adevăr dacă pendulele au aceeași lungime, forțele motoare în locurile situate la distanțe egale de perpendiculară sînt precum greutateile: și de aceea dacă două corpuri oscilînd descriu arce egale, și arcele se împart în părți egale; cum timpurile în care corpurile descriu diversele părți corespunzătoare ale arcelor sînt precum timpurile oscilațiilor întregi, vitezele vor fi între ele în părțile corespunzătoare ale oscilațiilor, precum forțele motoare și timpurile întregi de oscilații și în raport invers cu cantitățile de materie: și deci cantitățile de materie sînt precum forțele și timpurile de oscilație și în raport invers cu vitezele. Dar vitezele sînt în raport invers cu timpurile, și deci timpurile sînt în același raport și vitezele în raport invers cu pătratele timpurilor, și de aceea cantitățile de materie sînt precum forțele motoare și pătratele timpurilor, adică, precum greutateile și pătratele timpurilor Q.E.D.

COROLARUL 1. Și de aceea dacă timpurile sînt egale, cantitățile de materie în diversele corpuri vor fi precum greutateile.

COROLARUL 2. Dacă greutateile sînt egale, cantitățile de materie vor fi precum pătratele timpurilor.

COROLARUL 3. Dacă cantitățile de materie sînt egale, greutateile vor fi în raport invers cu pătratele timpurilor.

COROLARUL 4. De unde cum pătratele timpurilor, celelalte fiind egale, sînt precum lungimile pendulelor; dacă și timpurile și cantitățile de materie sînt egale, greutateile vor fi precum lungimile pendulelor.

COROLARUL 5. Și în mod universal, cantitatea de materie pendulară este precum greutatea și pătratul timpului, și în raport invers cu lungimea pendulului.

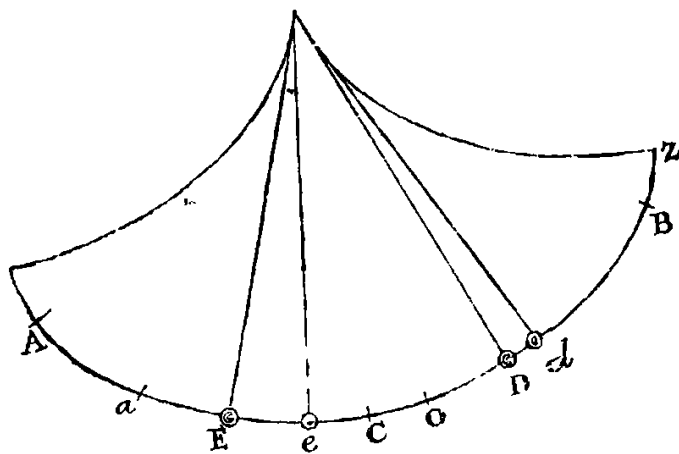
COROLARUL 6. Dar și într-un mediu fără rezistență cantitatea de materie pendulară este precum greutatea comparativă și pătratul timpului și în raport invers cu lungimea pendulului. Căci greutatea comparativă este forța motoare a corpului într-un mediu oarecare greu, după cum am explicat mai sus; și deci prestează tot atîta într-un astfel de mediu fără rezistență ca și greutatea absolută în vid.

COROLARUL 7. Și de aici devine evidentă o metodă atît pentru a compara corpurile între ele, în ceea ce privește cantitatea de materie în fiecare, cît și de a compara greutateile aceluiași corp în diverse locuri, pentru a cunoaște variația gravității. Făcînd însă experiențe foarte precise totdeauna am aflat cantitatea de materie în diversele corpuri proporțională cu greutatea lor.

PROPOZIȚIA XXV. TEOREMA XX

Corpurile pendulare căroră, într-un mediu oarecare, li se opune o rezistență în raport cu momentele timpului, și corpurile pendulare care se mișcă într-un mediu fără rezistență de aceeași greutate specifică, efectuează oscilațiile pe o cicloidă în același timp, și descriu simultan părți proporționale de arce.

Fie AB un arc de cicloidă, pe care un corp D îl descrie într-un timp oarecare oscilînd într-un mediu fără rezistență. Să-l bisectăm prin C , în așa fel ca C să fie punctul cel mai jos al ei; și forța acceleratoare cu care corpul este acționat într-un loc oarecare D sau d sau E va fi precum lungimea arcului CD sau Cd sau CE . Să exprimăm forța prin același arc, și cum rezistența este precum momentul timpului, și deci este dată, să o reprezentăm prin partea dată CO a arcului cicloidei, și să luăm arcul Od în același raport către arcul CD pe care-l are arcul OB către arcul CB ; și forța cu care corpul în d este acționat într-un mediu rezistent, deoarece este surplusul forței Cd asupra rezistenței CO , se va exprima prin arcul Od , și deci va fi către forța, cu care corpul D este acționat într-un mediu fără rezistență în locul D , precum arcul Od către arcul CD ; și de aceea și în locul B precum arcul OB către arcul CB . Prin urmare, dacă două corpuri D , d pleacă din locul B , și sînt acționate de aceste forțe: cum forțele la început sînt precum arcele CB și OB , vitezele prime și arcele descrise mai întîi vor fi în același raport. Fie acele arce BD și Bd , și arcele rămase CD , Od vor fi în același raport. Prin urmare forțele, proporționale cu CD , Od vor rămîne în același raport ca și la început, și de aceea corpurile vor continua să descrie împreună arce în același raport.



Prin urmare forțele și vitezele și arcele rămase CD , Od vor fi totdeauna precum arcele întregi CB , OB și de aceea arcele rămase vor fi descrise împreună. Din care cauză cele două corpuri D , d vor ajunge împreună la locurile C și O , anume unul într-un mediu fără rezistență la locul C , și celălalt într-un mediu rezistent la locul O . Cum însă vitezele în C și O sînt precum

arcele CB , OB ; arcele, pe care le descriu corpurile mai tîrziu înaintînd împreună, vor fi în același raport. Fie acelea CE și Oe . Forța cu care corpul D este întîrziat într-un mediu fără rezistență în E este precum CE , și forța cu care un corp d este întîrziat într-un mediu rezistent în e este precum suma forței Ce și a rezistenței CO , adică precum Oe ; și de aceea forțele cu care corpurile sînt întîrziate, sînt precum arcele CB , OB proporționale cu arcele CE , Oe ; și deci vitezele, întîrziate în raportul dat, rămîn în același raport dat. Așadar vitezele și arcele descrise cu ele sînt totdeauna între ele în raportul dat al arcelor CB și OB ; și de aceea dacă se adună arcele întregi AB , aB în același raport, corpurile D , d vor descrie împreună arcele, și în locurile A și a vor pierde simultan orice mișcare. Așadar oscilațiile complete sînt izocrone,

și părțile oarecare BD , Bd sau BE , Be care sînt descrise în același timp sînt proporționale cu arcele întregi BA , Ba Q.E.D.

COROLAR. Așadar mișcarea cea mai rapidă într-un mediu rezistent nu cade în punctul cel mai de jos C , ci se află în acel punct O , prin care se bisectează arcul întreg descris aB . Și corpul progresînd apoi spre a , este întîrziat cu aceleași grade cu care mai înainte era accelerat în căderea sa de la B la O .

PROPOZIȚIA XXVI. TEOREMA XXI

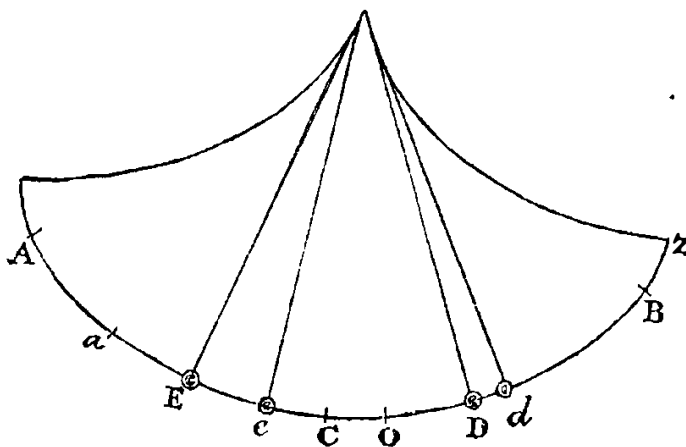
Oscilațiile pe o cicloidă ale corpurilor pendulare, cărora li se opune o rezistență în raportul vitezelor, sînt izocrone.

Căci dacă două corpuri, egal depărtate de la centrele de suspensiune, oscilînd descriu arce neegale, și vitezele în părțile corespunzătoare ale arcelor sînt între ele precum arcele întregi; rezistențele proporționale cu vitezele, vor fi și între ele precum arcele. Prin urmare dacă aceste rezistențe se scad sau se adună la forțele motoare produse de gravitate, care sînt precum arcele, diferențele sau sumele vor fi între ele în același raport al arcelor: și cum creșterile sau descreșterile vitezelor sînt precum aceste diferențe sau sume, vitezele, totdeauna vor fi precum arcele întregi. Așadar vitezele, dacă într-un caz oarecare sînt precum arcele întregi, vor rămîne totdeauna în același raport. Dar la începutul mișcării, cînd corpurile încep să coboare și să descrie acele arce, forțele, fiind proporționale cu arcele, vor produce viteze proporționale cu arcele. Așadar vitezele totdeauna vor fi precum arcele întregi ce trebuie descrise, și de aceea arcele vor fi descrise simultan. Q.E.D.

PROPOZIȚIA XXVII. TEOREMA XXII

Dacă unor corpuri pendulare li se opune o rezistență proporțională cu pătratul vitezelor, diferențele dintre timpurile de oscilație într-un mediu rezistent și timpurile de oscilație într-un mediu fără rezistență de aceeași greutate specifică, vor fi aproape proporționale cu arcele descrise prin oscilare.

Căci să presupunem că pendule egale într-un mediu rezistent descriu arcele neegale A , B ; și rezistența corpului pe arcul A va fi către rezistența corpului în partea corespunzătoare a arcului B , proporțională cu pătratul vitezelor, adică, aproximativ precum AA către BB . Dacă rezistența pe arcul B este către rezistența pe arcul A precum AB către AA ; timpurile în arcele A și B vor fi egale, potrivit propoziției de mai sus. Și de aceea rezistența AA în arcul A , sau AB în arcul B , cauzează surplusul timpului în arcul A asupra timpului



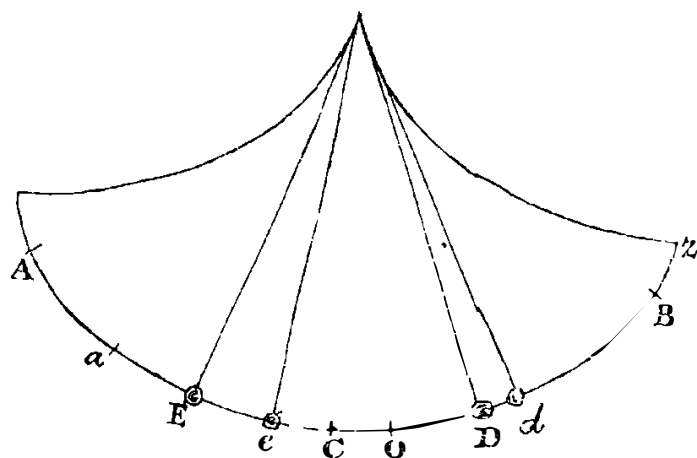
într-un mediu fără rezistență; și rezistența BB cauzează excesul de timp în arcul B asupra timpului într-un mediu fără rezistență. Dar acele surplussuri sînt aproape precum forțele eficiente AB și BB , adică, precum arcul A și B . Q.E.D.

COROLARUL 1. Deci din timpurile de oscilație, într-un mediu rezistent, efectuate pe arce neegale, se pot cunoaște timpurile de oscilație într-un mediu fără rezistență de aceeași greutate specifică. Căci diferența timpurilor va fi către surplusul timpului pe arcul mai mic față de timpul într-un mediu fără rezistență, precum diferența arcelor către arcul mai mic.

COROLARUL 2. Oscilațiile mai scurte sînt mai izocrone, și acele foarte scurte decurg aproximativ în aceeași timpuri ca într-un mediu fără rezistență. Dar timpurile acelor care se întîmplă în arce mai mari, sînt cu ceva mai mari, fiindcă rezistența în coborîrea corpului în care timpul se prelungește, este mai mare în proporția lungimii descrise în coborîre, decît rezistența în urcarea următoare în care timpul se scurtează. Dar timpul oscilațiilor, atît al celor scurte cît și a celor lungi se pare că se prelungește întrucîtva prin mișcarea mediului. Căci corpurilor întîrziate li se opune o rezistență ceva mai mică, în raport cu viteza, și corpurilor accelerate ceva mai mare decît acelor care înaintează în mod uniform: și aceasta fiindcă mediul, cu mișcarea pe care a primit-o de la corpurile, înaintînd în aceeași direcție, în primul caz este agitat mai tare, în cel din urmă mai puțin; și astfel conspiră mai mult sau mai puțin cu corpurile mișcate. Prin urmare pendulelor în coborîre le rezistă mai mult, în urcare mai puțin în raport cu viteza, și din ambele motive timpul se prelungește.

PROPOZIȚIA XXVIII. TEOREMA XXIII

Dacă unui corp pendular oscilînd pe o cicloidă i se opune o rezistență în raportul momentelor timpului, rezistența lui către forța gravitației, va fi precum surplusul arcului descris în coborîrea întregă față de arcul descris în urcarea următoare, către dublul lungimii pendulului.



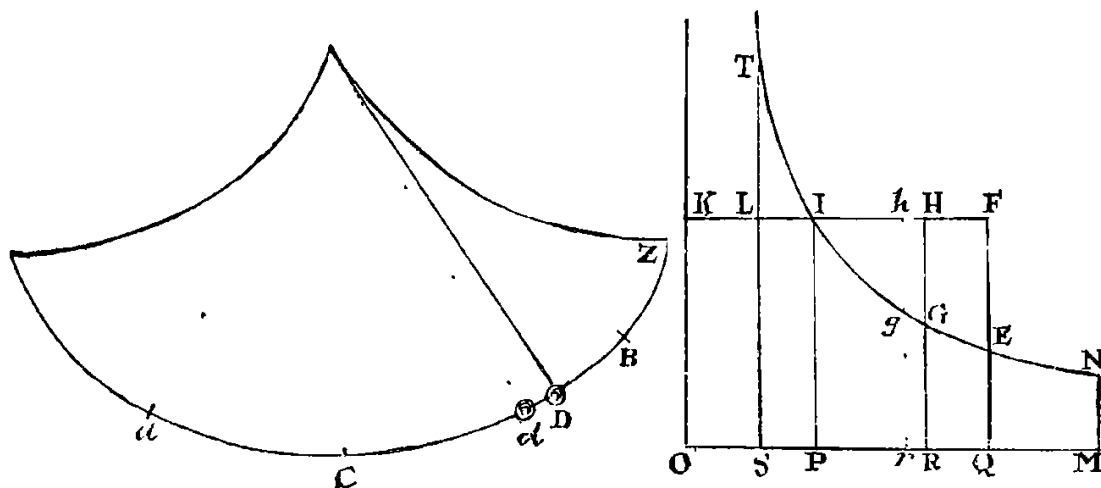
Să reprezinte BC arcul descris în coborîre, Ca arcul descris în urcare, și Aa diferența arcelor: și rămînînd cele construite și demonstrate în propoziția XXV, forța, cu care corpul oscilant este acționat într-un loc oarecare D , va fi către forța de rezistență precum arcul CD către arcul CO , care este jumătatea diferenței Aa . Și de aceea forța cu care corpul oscilant este acționat la începutul sau în punctul cel mai înalt al cicloidei, adică, forța gravitației, va fi către rezistență precum arcul cicloidei între punctul cel mai înalt și punctul cel mai de jos C către

arcul CO ; adică (dacă arcele se dublează) precum arcul întregi cicloide, sau lungimea dublă a pendulului către arcul Aa . Q.E.D.

PROPOZIȚIA XXIX. PROBLEMA VI

Presupunînd că unui corp oscilînd pe o cicloidă i se opune o rezistență proporțională cu pătratul vitezei: să aflăm rezistența în diversele locuri.

Fie Ba arcul descris de o oscilație întreagă, și fie C punctul cel mai de jos al cicloidei, și CZ jumătatea arcului întreg al cicloidei, egal cu lungimea pendulului; și se cere rezistența corpului într-un loc oarecare D . Să tăiem dreapta infinită OQ prin punctele O, S, P, Q , în așa fel, ca (dacă se ridică perpendicularele OK, ST, PI, QE , și din centrul O și cu asimptotele OK, OQ se descrie iperbola $TIGE$ tăind perpendicularele ST, PI, QE în T, I și E , și prin punctul I se duce KF paralelă cu asimptota OQ întîlnind asimptota OK în K , și perpendicularele ST și QE în L și F) aria hiperbolică $PIEQ$ va fi către aria hiperbolică $PITS$ precum arcul BC descris în coborîrea corpului către arcul Ca descris în urcarea corpului, și aria IEF către aria ILT



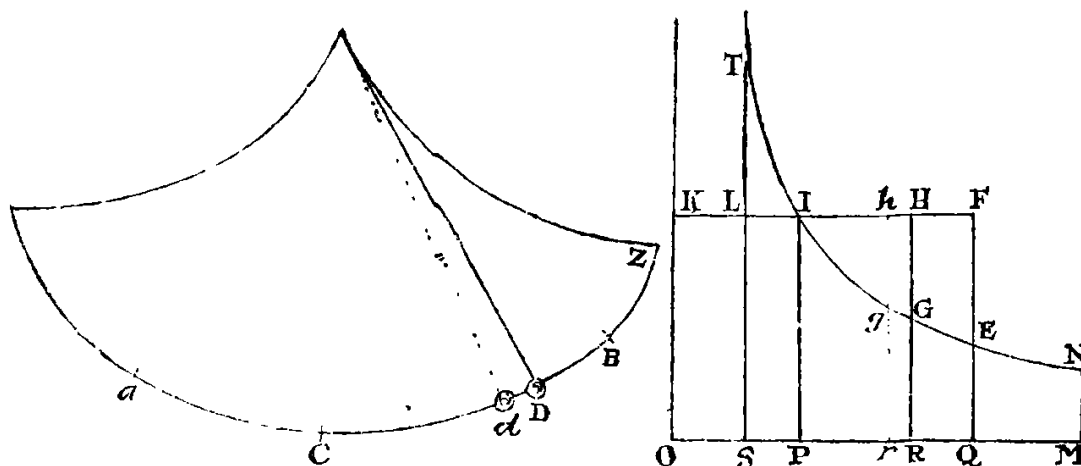
precum OQ către OS . Apoi din perpendiculara MN să tăiem aria hiperbolică $PINM$ care să fie către aria hiperbolică $PIEQ$ precum arcul CZ către arcul BC descris în coborîre. Și dacă prin perpendiculara RG tăiem aria hiperbolică $PIGR$, care să fie către aria $PIEQ$ precum arcul CZ către arcul BC descris în coborîre. Și dacă cu perpendiculara RG se taie aria hiperbolică $PIGR$, care este către aria $PIEQ$ precum un arc oarecare CD către arcul BC descris în coborîrea întreagă; rezistența în locul D va fi către forța gravitației, precum aria $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ către aria $PINM$.

Căci cum forțele născute din gravitatea cu care corpul este acționat în locurile Z, B, D, a , sînt precum arcele CZ, CB, CD, Ca , și acele arce sînt precum ariile $PINM, PIEQ, PIGR, PITS$; să exprimăm atît arcele cît și forțele respectiv prin aceste arii. Afară de aceea, fie Dd un spațiu cît se poate de mic descris de corpul în coborîre, și să-l exprimăm prin aria foarte mică $RGgr$ cuprinsă de paralele RG, rg ; și să prelungim rg pînă în h , așa fel ca $GHhg$, și $RGgr$ să fie descreșterile contemporane ale ariilor $IGH, PIGR$.

Și creșterea $GHhg - \frac{Rr}{OQ} IEF$, sau $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ} IEF$ a ariei $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$, va fi către descreșterea $RGgr$, sau $Rr \times RG$ a ariei $PIGR$, precum $HG - \frac{IEF}{OQ}$ către RG ; și deci precum $OR \times HG - \frac{OR}{OQ} IEF$ către $OR \times GR$ sau $OP \times PI$, adică (din cauza că $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, $PIHR$ și $PIGR + IGH$ sînt egale) precum $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ} IEF$ către $OPIK$. Prin urmare dacă aria $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ se numește Y , și se dă descreșterea $RGgr$ al ariei $PIGR$, creșterea ariei Y va fi precum $PIGR - Y$.

Căci dacă V înseamnă forța născută din gravitatea proporțională cu arcul CD ce trebuie descris, cu care corpul este acționat în D , și punem R pentru rezistență; $V - R$ va fi forța întreagă cu care corpul este acționat în D . Prin urmare creșterea vitezei este precum $V - R$ și intervalul de timp, în care este născută luată împreună. Dar și viteza însăși este precum creșterea contemporană a spațiului descris și în raport invers cu intervalul de timp. De unde, dacă rezistența prin ipoteză este precum pătratul vitezei, creșterea rezistenței (potrivit lemei II) va fi precum viteza și creșterea vitezei împreună, adică precum momentul spațiului și $V - R$ luate împreună; și deci, dacă se dă momentul spațiului, precum $V - R$; și de aceea, dacă în loc de V scriem expresia ei $PIGR$, și rezistența R se exprimă printr-o altă arie oarecare Z , precum $PIGR - Z$.

Prin urmare aria $PIGR$ descrescînd în mod uniform prin scăderea momentelor date, aria Y crește în raportul lui $PIGR - Y$, și aria Z în raportul $PIGR - Z$. Și de aceea dacă ariile Y și Z încep deodată și la început sînt egale, prin adunarea momentelor egale vor continua să fie egale, și apoi descrescînd la fel prin momente egale, vor dispărea deodată. Și invers, dacă încep deodată și dispar deodată, vor avea momente egale și totdeauna vor fi egale: aceasta fiindcă dacă rezistența Z crește, viteza împreună cu arcul Ca , care este descris în urcarea corpului, se micșorează; și punctul în care întreaga



mișcare împreună cu rezistența încetează apropiindu-se de punctul C , rezistența va dispărea mai repede ca aria Y . Și se va întîmpla contrariul cînd rezistența scade.

Într-adevăr aria Z începe și se termină cînd rezistența este nulă, adică la începutul mișcării cînd arcul CD este egal cu arcul CB și dreapta RG cade

pe dreapta QE , și la sfârșitul mișcării când arcul CD este egal cu arcul Ca și RG cade pe dreapta ST . Și aria Y sau $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ începe și se termină când este nulă; și deci când $\frac{OR}{OQ}IEF$ și IGH sînt egale: adică (prin construcție) când dreapta RG cade succesiv pe dreptele QE și ST . Și deci ariile încep și dispar deodată, și de aceea sînt egale totdeauna. Prin urmare aria $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ este egală cu aria Z , prin care se exprimă rezistența și de aceea este către aria $PINM$, prin care se exprimă gravitatea, precum rezistența către gravitate. Q.E.D.

COROLARUL 1. Așadar rezistența în locul cel mai de jos C este către forța gravității, precum aria $\frac{OP}{OQ}IEF$ către aria $PINM$.

COROLARUL 2. Dar ea devine maximă, când aria $PIHR$ este către aria IEF precum OR către OQ . Căci în acest caz momentul ei (anume $PIGR - Y$) devine nul.

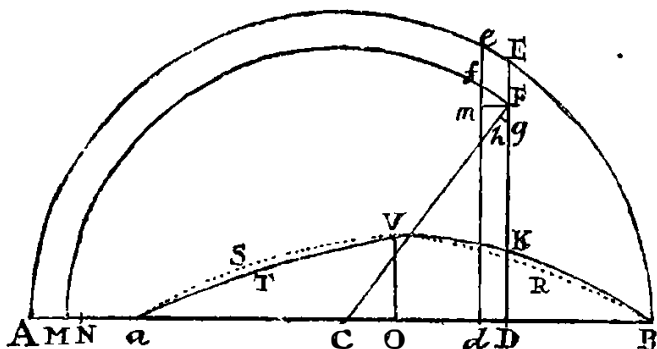
COROLARUL 3. De aici se cunoaște și viteza în diversele locuri: căci ea este precum rădăcina pătrată a rezistenței, și la începutul mișcării este egală cu viteza corpului ce oscilează pe cicloidă fără vreo rezistență.

De altfel din cauza dificultății calculului prin care trebuie aflate rezistența și viteza prin această propoziție, am socotit necesar să adaug următoarea propoziție.

PROPOZIȚIA XXX. TEOREMA XXIV

Dacă o dreaptă aB este egală cu arcul cicloidei pe care o descrie un corp oscilînd, și la diversele ei puncte D se ridică perpendicularele DK , care sînt către lungimea pendulului precum rezistența corpului în punctele corespunzătoare ale arcului către forța gravității, zic că diferența între arcul descris în coborîrea totală și arcul descris în urcarea totală următoare înmulțită cu semisuma arcelor, va fi egală cu aria BKa înconjurată de toate perpendicularele DK .

Căci să exprimăm atît arcul cicloidei, descris într-o oscilație întreagă, prin dreapta aB egală cu ea cît și arcul care ar fi descris în vid prin lungimea AB . Să bisectăm pe AB prin C , și punctul C va reprezenta punctul cel mai de jos al cicloidei, și CD va fi precum forța născută de gravitate, prin care corpul în D este acționat în direcția tangentei cicloidei, și va avea către lungimea pendulului raportul pe care-l are forța în D către forța gravității. Să exprimăm deci, forța aceea prin lungimea CD , și forța gravității prin lungimea pendulului și dacă pe DE luăm DK în acel raport către lungimea pendulului pe care-l are rezistența către gravitate, DK va fi



expresia rezistenței. Din centrul C și cu intervalul CA sau CB să construim semicercul $BEeA$.

Să presupunem că corpul descrie într-un timp, cât se poate de mic spațiul Dd , și ridicând perpendicularele DE , de întâlnind circumferințele în E și e , acestea vor fi precum vitezele pe care corpul coborînd în vid din punctul B , le-ar cîștiga în locurile D și d . Aceasta este evident (potrivit propoziției LII, Cartea I).

Să exprimăm așadar aceste viteze prin perpendicularele DE , de ; și fie DF viteza pe care o cîștigă în D , căzînd din B într-un mediu rezistent. Și dacă din centrul C și cu intervalul CF descriem cercul FfM întâlnind dreptele de și AB în f și M , M va fi locul spre care s-ar urca apoi fără rezistență ulterioară, și df viteza pe care ar cîștiga-o în d . De unde, de asemenea dacă Fg înseamnă momentul vitezei pe care corpul D , descriind spațiul cât se poate de mic Dd , îl pierde din rezistența mediului; și se ia CN cu Cg : atunci N va fi locul spre care s-ar urca corpul după aceea fără o rezistență ulterioară, și MN va fi descreșterea urcării provenită din pierderea acelei viteze. Să coborîm pe df perpendiculara Fm , și descreșterea Fg a vitezei DF născută de rezistența DK , va fi către creșterea fm a aceleiași viteze născută de forța CD , precum forța generatoare DK către forța generatoare CD . Dar și din cauza triunghiurilor asemenea Fmf , Fhg , FDC , este fm către Fm sau Dd precum CD către DF ; și prin egalitate Fg către Dd precum DK către DF . La fel Fh către Fg precum DF , către CF ; și prin egalitate perturbată, Fh sau MN către Dd precum DK către CF sau CM ; și deci suma tuturor $MN \times CM$ va fi egală cu suma tuturor $Dd \times DK$. La punctul mobil M să ne închipuim ridicată totdeauna o ordonată dreptunghiulară egală cu nedeterminata CM , care printr-o mișcare continuă este înmulțită cu lungimea întreagă Aa ; și trapezul descris prin acea mișcare sau dreptunghiul $Aa \times \frac{1}{2}aB$ egal cu el va fi egal cu suma tuturor $MN \times CM$, și deci cu suma tuturor $Dd \times DK$, adică, cu aria $BKVTa$. Q.E.D.

COROLAR. Deci din legea rezistenței și din diferența Aa a arcelor Ca , CB se poate determina aproximativ proporția rezistenței, către gravitate. Căci dacă rezistența Dk este uniformă, figura $BKTa$ va fi un dreptunghi format de Ba și DK ; și deci dreptunghiul format de $\frac{1}{2}Ba$ și Aa va fi egal cu dreptunghiul format de Ba și DK , și DK va fi egal cu $\frac{1}{2}Aa$. Din care cauză cum DK este expresia rezistenței, și lungimea pendulului expresia gravității, rezistența va fi către gravitate precum $\frac{1}{2}Aa$ către lungimea pendulului; tocmai cum s-a demonstrat în propoziția XXVIII.

Dacă rezistența este precum viteza, figura $BKTu$ va fi aproximativ o elipsă. Căci dacă un corp, într-un mediu fără rezistență, ar descrie într-o oscilație întreagă lungimea BA , viteza într-un loc oarecare D va fi precum ordonata DE a cercului descris pe diametrul AB . Prin urmare cum Ba într-un mediu rezistent, și BA într-un mediu fără rezistență, sînt descrise aproape în timpuri egale, și deci vitezele în diversele puncte ale lui Ba sînt aproximativ către vitezele în punctele corespunzătoare ale lungimii BA , precum este Ba către BA ; viteza în punctul D într-un mediu rezistent va fi precum ordonata cercului sau elipsei descrise pe diametrul Ba ; și deci

figura $BKVTa$ va fi aproximativ o elipsă. Deoarece rezistența se presupune proporțională cu viteza, fie OV expresia rezistenței în punctul mediu O ; și elipsa $BRV Sa$, descrisă din centrul O , cu semiaxele OB , OV , va fi egală aproximativ cu figura $BKVTa$, și cu dreptunghiul $Aa \times Bo$ egal cu ea. Prin urmare $Aa \times BO$ este către $OV \times BO$ este precum aria elipsei către $OV \times BO$: adică Aa către OV precum aria semicercului către pătratul razei, sau aproximativ precum 11 către 7: Și de aceea $\frac{7}{11} Aa$ către lungimea pendulului precum rezistența corpului oscilant în O către gravitatea lui. Căci dacă rezistența DK este proporțională cu pătratul vitezei, figura $BKVTa$ va fi aproape o parabolă avînd vîrfurile V și axa OV , și deci va fi aproximativ egală cu dreptunghiul format de $\frac{2}{3} BA$ și OV . Așadar dreptunghiul format de $\frac{1}{2} Ba$ și Aa este egal cu dreptunghiul format de $\frac{2}{3} Ba$ și OV , și deci egal cu $\frac{3}{1} Aa$: și de aceea rezistența în O a corpului oscilant către gravitatea lui precum $\frac{3}{4} Aa$ către lungimea pendulului.

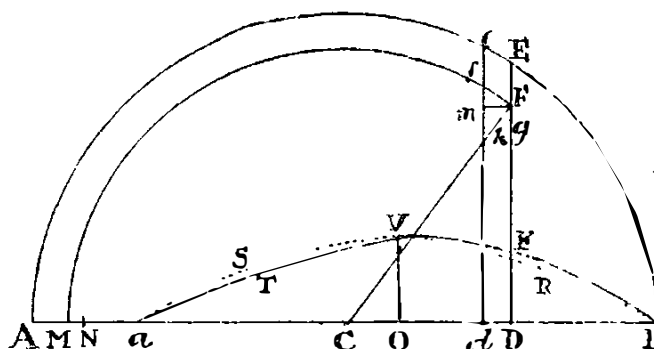
Dar cred că aceste concluzii sînt destul de precise în problemele practice. Căci fiindcă elipsa sau parabola $BRV Sa$ coincide cu figura $BKVTa$ în punctul mijlociu V , aceasta dacă întrece în mărime figura de partea BRV sau $V Sa$, va fi mai mică decît ea de cealaltă parte, și astfel va fi aproximativ egală cu ea.

PROPOZIȚIA XXXI. TEOREMA XXV

Dacă rezistența unui corp oscilant în diversele părți proporționale ale arcelor descrise se mărește sau se micșorează după un raport dat, diferența între arcul descris la coborîre și arcul descris la urcarea următoare, va crește sau va descrește în același raport.

Căci diferența se naște din întîrzierea pendulului din cauza rezistenței mediului, și deci este precum întîrzierea întreagă și rezistența întîrziătoare proporțională cu ea. În propoziția precedentă dreptunghiul format de dreapta $\frac{1}{2} aB$ și diferența Aa a arcelor CB , Ca era egal cu aria $BK Ta$. Și aria aceea, dacă lungimea aB rămîne, se mărește sau se micșorează în raportul ordonatelor DK ; adică, în raportul rezistenței, și deci este precum lungimea aB și rezistența luate împreună. Așadar dreptunghiul format de Aa și $\frac{1}{2} aB$ este precum aB și rezistența luate împreună, și de aceea Aa precum rezistența. Q.E.D.

COROLARUL 1. De unde dacă rezistența este precum viteza, diferența arcelor în același mediu va fi precum arcul întreg descris: și invers.



COROLARUL 2. Dacă rezistența este în raportul pătratului vitezei, diferența va fi proporțională cu pătratul arcului întreg: și invers.

COROLARUL 3. Și în general, dacă rezistența este proporțională cu puterea a treia sau alta oarecare a vitezei, diferența va fi în același raport cu arcul întreg și invers.

COROLARUL 4. Și dacă rezistența este parte în raportul simplu cu viteza, parte în raportul pătratului, diferența va fi parte în raportul arcului întreg și parte în raportul pătratului ei: și invers. Legea și raportul rezistenței pentru viteză, vor fi aceleași ca și ale diferenței pentru lungimea arcului.

COROLARUL 5. Și deci, dacă, un pendul descriind succesiv arce neegale, se poate afla raportul creșterii și al descreșterii acestei diferențe pentru lungimea arcului descris; vom avea de asemenea raportul creșterii și descreșterii rezistenței pentru o viteză mai mare sau mai mică.

SCOLIE GENERALĂ

Din aceste propoziții, prin oscilațiile pendulelor în medii oarecare, se poate afla rezistența mediilor. Într-adevăr eu am aflat rezistența aerului prin experiențele următoare. Am suspendat o sferă de lemn avînd greutatea de $57\frac{7}{22}$ uncii romane, diametrul de $6\frac{7}{8}$ degete de Londra, cu ajutorul unui fir subțire de un cui destul de solid, în așa fel ca distanța dintre cui și centrul de oscilație al sferei să fie de $10\frac{1}{2}$ picioare. Pe fir am notat un punct situat la distanța de zece picioare și o uncie de la centrul de suspensiune; și din regiunea aceluia punct am pus o riglă divizată în degete, cu ajutorul căreia notam lungimile arcelor descrise de pendul. Apoi am numărat oscilațiile în care sfera pierdea a opta parte a mișcării sale. Dacă pendulul era scos din poziția verticală la o distanță de două degete, și apoi se lăsa liber; în așa fel ca în întreaga lui coborîre descria un arc de două degete, și în prima oscilație întreagă, compusă dintr-o coborîre și urcare consecutivă, un arc de aproape patru degete, în 164 de oscilații el a pierdut a opta parte a mișcării sale, astfel că în ultima sa urcare descria un arc de un deget cu trei sferturi de deget. Dacă în prima coborîre a descris un arc de patru degete; a pierdut a opta parte a mișcării în 121 oscilații, în așa fel că în ultima urcare descria un arc de $3\frac{1}{2}$ degete. Dacă în prima coborîre a descris un arc de 8, 16, 32 sau 64 degete, a pierdut a opta parte a mișcării în respectiv 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$ oscilații. Așadar diferența între arcele descrise în prima coborîre și ultima urcare era în cazul întâi, al doilea, al treilea, al patrulea, al cincilea, al șaselea, respectiv de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 degete. Să împărțim diferențele în fiecare caz prin numărul oscilațiilor, și într-o oscilație medie, în care s-a descris un arc de $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 degete, diferența arcelor descrise într-o coborîre și în urcarea următoare, va fi respectiv de $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ părți de degete. Dar acestea în oscilațiile mai mari sînt aproximativ în raportul pătratelor arcelor descrise, iar în cele mai mici

cu puțin mai mari decît în acel raport; și de aceea (potrivit corolarului 2, propoziția XXXI a acestei Cărți) rezistența sferei, cînd se mișcă mai repede, este aproximativ precum pătratul vitezei; cînd se mișcă mai încet, cu ceva mai mare decît în acel raport.

Fie acum V viteza maximă într-o oscilație oarecare, și fie A , B , C cantități date, și să ne închipuim că diferența arcelor este $AV + BV^{\frac{2}{3}} + CV^2$. Cum vitezele maxime sînt pe cicloidă precum jumătățile arcelor descrise, iar pe cerc precum coardele jumătăților acelor arce; și de aceea în arce egale sînt mai mari pe cicloidă decît pe cerc, în raportul jumătăților arcelor către coardele lor; dar timpurile pe cerc sînt mai mari decît pe cicloidă în raport invers cu viteza; este evident că diferențele arcelor (care sînt precum rezistența și pătratul timpului luate împreună) vor fi aceleași aproximativ, în ambele curbe: căci ar trebui ca diferențele să crească pe cicloidă, împreună cu rezistența, aproximativ cu pătratul raportului arcului către coardă, din cauza creșterii vitezei în acel raport simplu și să descrească împreună cu pătratul timpului, după același raport al pătratului.

Așadar ca să facem reducerea la cicloidă, trebuie luate aceleași diferențe ale arcelor care au fost observate pe cerc, iar vitezele maxime trebuie presupuse analoge sau cu jumătățile sau cu arcele întregi, adică cu numerile $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16. Prin urmare să scriem în cazul al doilea, al patrulea, și al șaselea numerele 1, 4 și 16 în loc de V ; și vom obține diferența arcelor $\frac{1}{121} = A + B + C$ în cazul al doilea; $\frac{2}{352} = 4A + 8B + 16C$ în cazul al patrulea; $\frac{8}{9 \cdot \frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ în cazul al șaselea. Și din aceste ecuații, prin compararea trebuincioasă și reducerea analitică, avem $A = 0,0000916$, $B = 0,0010847$ și $C = 0,0029558$. Prin urmare diferența arcelor este precum $0,0000916V + 0,0010847 V^{\frac{2}{3}} + 0,0029558 V^2$; și de aceea cum (potrivit corolarului propoziției XXX aplicat la acest caz) rezistența sferei în mijlocul arcului descris prin oscilație, unde viteza este V , este către greutatea ei precum $\frac{7}{11} AV + \frac{7}{10} BV^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{4} CV^2$, către lungimea pendulului; dacă în loc de A, B și C scriem numerele aflate, rezistența sferei către greutatea ei va fi precum $0,0000583V + 0,0007593 V^{\frac{2}{3}} + 0,0022169 V^2$ către lungimea pendulului între centrul de suspensiune și riglă, adică, către 121 degete. De unde cum V în cazul al doilea reprezintă 1, în al patrulea 4, în al șaselea 16: rezistența va fi către greutatea sferei în cazul al doilea precum 0,0030345 către 121 în al patrulea precum 0,041748 către 121 în al șaselea precum 0,61705 către 121.

Arcul pe care punctul marcat pe fir l-a descris în cazul al șaselea, era de $120 - \frac{8}{9 \cdot \frac{2}{3}}$ sau $119 \frac{5}{29}$ degete. Și de aceea cum raza era de 121 degete, și lungimea pendulului între punctul de suspensiune și centrul sferei era de 126 degete, arcul pe care l-a descris centrul sferei era de $124 \frac{3}{31}$ degete. Deoarece viteza maximă a corpului oscilant, din cauza rezistenței aerului, nu coincide cu punctul cel mai de jos al arcului descris, ci se află aproape

de partea de mijloc a arcului întreg: aceasta va fi aproape aceeași ca și când sfera în coborîrea sa întreagă într-un mediu fără rezistență ar descrie jumătatea de $62\frac{3}{62}$ degete a celui arc, și aceasta pe cicloida, la care am redus mai sus mișcarea pendulului: și de aceea viteza aceea va fi egală cu viteza pe care o poate cîștiga sfera, căzînd perpendicular și descriind în căderea sa o înălțime egală cu sinus versus-ul celui arc. Dar acel sinus versus din cicloidă este către acest arc de $62\frac{3}{62}$ precum același arc către lungimea dublă 252 a pendulului, și de aceea egal cu 15,278 degete. Din care cauză viteza este aceea pe care o poate cîștiga corpul căzînd și descriind în căderea sa spațiul de 15,278 degete. Prin urmare cu o astfel de viteză sfera întâlnește o rezistență, care este către greutatea ei precum 0,61705 către 121, sau (dacă se consideră numai acea parte a rezistenței care este în raportul pătratului vitezei) precum 0,56752 către 121.

Printr-o experiență hidrostatică am aflat însă că greutatea acestei sfere de lemn este către greutatea unei sfere de apă de aceeași mărime precum 55 către 97: și de aceea cum 121 este către 213,4 în același raport, rezistența opusă sferei de apă progresînd cu viteza menționată va fi către greutatea ei precum 0,56752 către 213,4 adică, precum 1 către $376\frac{1}{50}$. De unde cum greutatea sferei de apă, în timp ce sfera descrie cu o viteză continuată în mod uniform o lungime de 30,556 degete, poate naște întreaga acea viteză în sfera căzătoare; este evident că forța de rezistență continuată în mod uniform în același timp poate anula o viteză mai mică în raportul de 1 către $376\frac{1}{50}$, adică, partea $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ a întregii viteze. Și de aceea în timp ce

sfera, cu acea viteză continuată în mod uniform, poate descrie lungimea semidiametrului său, sau de $3\frac{7}{11}$ degete, în același timp va pierde partea $\frac{1}{3342}$ a mișcării sale.

Am numărat de asemenea oscilațiile în care pendulul își pierde a patra parte a mișcării. În tabloul următor numerele de mai sus însemnează lungimea arcului descris în prima coborîre, exprimată în degete și părți de degete: numerele de la mijloc însemnează lungimea arcului descris în ultima urcare; și în locul cel mai de jos stau numerele oscilațiilor. Am descris experiența ca fiind mai precisă decît aceea în care mișcarea ar pierde numai a opta parte. Să încerce calculul, cine vrea.

<i>Prima coborîre</i>	2	4	8	16	32	64
<i>Ultima urcare</i>	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
<i>Nr. oscilațiilor</i>	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

După aceea am atîrnat o sferă de plumb de 2 degete diametru, și o greutate de $26\frac{1}{2}$ uncii romane de același fir, astfel ca între centrul sferei și punctul de suspensiune să fie un interval de $10\frac{1}{2}$ picioare, și am numărat oscilațiile în care se pierde partea dată a mișcării. Primul din tablourile

următoare arată numărul oscilațiilor în care s-a pierdut a opta parte a mișcării întregi; al doilea numărul oscilațiilor în care s-a pierdut a patra parte a ei.

<i>Prima coborîre</i>	1	2	4	8	16	32	64
<i>Ultima urcare</i>	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
<i>Nr. oscilațiilor</i>	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30
<i>Prima coborîre</i>	1	2	4	8	16	32	64
<i>Ultima urcare</i>	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
<i>Nr. oscilațiilor</i>	510	518	420	318	204	121	70

Alegînd în tabloul de mai sus observația a treia, a cincia și a șaptea și exprimînd vitezele maxime în aceste observații în particular, respectiv prin numerele 1,4,16 și în general prin cantitatea V ca mai sus: din a treia observație rezultă $\frac{1}{193} = A + B + C$, din a cincia $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, din a șaptea $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$.

Într-adevăr aceste ecuații reduse dau $A = 0,001414$, $B = 0,000297$, $C = 0,000879$. Și de aici apare rezistența sferei mișcată cu viteza V în acel raport către greutatea sa de $26\frac{1}{4}$ uncii pe care îl are $0,0009V + 0,000208V^{\frac{3}{2}} + 0,000659V^2$ către lungimea de 121 degete a pendulului. Și dacă considerăm numai acea parte a rezistenței care este proporțională cu pătratul vitezei, aceasta va fi către greutatea sferei precum $0,000659V^2$ către 121 degete. Dar această parte a rezistenței în prima experiență era către greutatea sferei de lemn de $57\frac{7}{22}$ uncii precum $0,002217V^2$ către 121 și de aici rezistența sferei de lemn este către rezistența sferei de plumb (vitezele lor fiind egale) precum $57\frac{7}{22}$ înmulțit cu $0,002217$ către $26\frac{1}{4}$ înmulțit cu $0,000659$, adică, precum $7\frac{1}{3}$ către 1. Diametrele celor două sfere erau de $6\frac{7}{8}$ și 2 degete, și pătratele lor sînt între ele aproximativ precum $47\frac{1}{4}$ și 4, sau $11\frac{13}{16}$ și 1. Așadar rezistențele sferelor de viteze egale erau într-un raport mai mic decît al pătratului diametrelor. Și încă nu am considerat rezistența firului, care desigur era foarte mare, și trebuia scăzută din rezistența aflată a pendulelor. Aceasta nu am putut-o defini în mod precis, dar am aflat-o totuși mai mare ca a treia parte a întregii rezistențe a pendulului mai mic; și de aici am dedus că rezistențele sferelor, scăzînd rezistența firului, sînt aproximativ în raportul pătratului diametrelor. Căci raportul $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ către $1 - \frac{1}{3}$ sau $10\frac{1}{2}$ către 1 nu este prea deosebit de pătratul raportului diametrelor $11\frac{13}{16}$ către 1.

Deoarece rezistența firului în sfere mai mari este de importanță mai mică, am încercat și experiența cu o sferă al cărui diametru era $18\frac{3}{4}$ degete. Lungimea pendulului între punctul de suspensiune și centrul de oscilație era de $122\frac{1}{2}$ degete, între punctul de suspensiune și nodul din fir de $109\frac{1}{2}$ degete. Arcul descris de nod în prima coborîre a pendulului de 32 degete.

Arcul descris de același nod în ultima urcare de 28 degete după cinci oscilații. Suma arcelor sau arcul întreg descris într-o oscilație mijlocie de 60 degete. Diferența arcelor de 4 degete. A zecea parte a ei sau diferența între coborîrea și urcarea într-o oscilație mijlocie $\frac{2}{5}$ degete. După cum raza $109\frac{1}{2}$ către raza $122\frac{1}{2}$ tot astfel arcul întreg de 60 degete descris de nod într-o oscilație medie către arcul întreg de $67\frac{1}{8}$ degete descris de centrul sferei într-o oscilație medie și tot așa diferența $\frac{2}{5}$ către diferența nouă 0,4475. Dacă lungimea pendulului, menținînd lungimea arcului descris, ar crește în raportul de 126 către $122\frac{1}{2}$, timpul de oscilație ar crește și viteza pendulului s-ar micșora în raportul rădăcinii pătrate, iar diferența arcelor descrise în coborîrea și urcarea următoare ar rămîne 0,4475. Apoi dacă arcul descris s-ar mări în raportul de $124\frac{3}{31}$ către $67\frac{1}{8}$, diferența aceasta 0,4475 ar crește precum pătratul acelui raport, și deci ar deveni 1,5295. Acestea se întîmplă astfel, în ipoteza că rezistența pendulului ar fi precum pătratul vitezei. Prin urmare dacă pendulul ar descrie arcul întreg de $124\frac{3}{31}$ degete, și lungimea lui între punctul de suspensie și centrul de oscilație ar fi de 126 degete, diferența arcelor descrise în coborîrea și urcarea următoare ar fi de 1,5295 degete. Și această diferență înmulțită cu greutatea sferei pendulului, care era de 208 uncii, dă produsul 318,136. Iarăși dacă pendulul de mai sus construit din sfera de lemn cu centrul de oscilație care era la o distanță de 126 degete de punctul de suspensiune, descria arcul întreg de $124\frac{3}{31}$ degete, diferența arcelor descrise în coborîre și urcare era de $\frac{123}{121}$ înmulțit cu $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, care

înmulțită cu greutatea sferei de $57\frac{7}{22}$ uncii, dă 49,396. Dar eu am înmulțit acestea cu greutatea sferei, ca să aflu rezistențele lor. Căci diferențele se nasc din rezistențe, și sînt în același raport cu rezistențele și în raport invers cu greutatea. Deci rezistențele sînt precum numerele 318,136 și 49,396. Dar partea rezistenței sferei mai mici care este în raportul pătratului vitezei, era către rezistența întreagă precum 0,56752 către 0,61675, adică, precum 45,453 către 49,396; și partea rezistenței sferei mai mari egalează aproape rezistența ei întreagă; și deci acele părți sînt precum aproximativ 318,136 și 45,453 adică precum 7 și 1. Dar diametrele sferelor sînt $18\frac{3}{4}$ și $6\frac{7}{8}$ și pătratele lor $351\frac{9}{16}$ și $47\frac{17}{64}$ sînt precum 7,438 și 1, adică precum aproximativ rezistențele 7 și 1 ale sferelor. Diferența rapoartelor nu este mai mare decît aceea care a putut proveni din rezistența firului. Așadar acele părți ale rezistențelor care sînt, sferele fiind egale, precum pătratele vitezelor; sînt de asemenea, la viteze egale, precum pătratele diametrelor sferelor.

De altfel cea mai mare dintre sferele de care m-am folosit în aceste experiențe, nu era perfect sferică, și de aceea în calculul făcut aici am neglijat lucrurile mai mici pentru a scurta; fiind prea puțin preocupat de un calcul precis într-o experiență puțin precisă. Aș dori deci, fiindcă demonstrația

vidului depinde de aceasta, să se încerce experiența cu sfere și mai multe și mai mari și mai precise. Dacă luăm sferele în proporție geometrică, anume ale căror diametre sînt de 4,8,16,32 degete; din progresia stabilită prin experiențe se va afla ce ar trebui să se întîmple cu sfere și mai mari.

Într-adevăr comparînd rezistențele diverselor fluide între ele am încercat următoarele. Am construit o cutie de lemn de patru picioare lungime, de cîte un picior lățime și înălțime. Pe aceasta lipsită de capac am umplut-o cu apă de fîntină, și am făcut ca cufundînd pendule în mijlocul apei să se miște oscilînd. Astfel o sferă de plumb de greutate de $166\frac{1}{6}$ uncii, diametrul $3\frac{5}{8}$ degete se mișca după cum am descris în tabloul următor, anume lungimea pendulului de la punctul de suspensiune la un punct oarecare notat pe fir fiind de 126 degete, iar la centrul de oscilație de $134\frac{3}{8}$ degete.

Arcul descris în prima coborîre de

<i>punctul notat pe fir, în degete</i>	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
--	----	----	----	---	---	---	---	---------------	---------------

Arcul descris în ultima urcare,

<i>în degete</i>	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
------------------	----	----	----	---	---	----------------	---------------	---------------	----------------

Diferența arcelor proporțională

<i>cu mișcarea pierdută, în degete</i>	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
--	----	---	---	---	---	---------------	---------------	---------------	----------------

<i>Numărul de oscilații în apă</i>		$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
------------------------------------	--	-----------------	----------------	---	---	-----------------	-----------------	-----------------

<i>Numărul de oscilații în aer</i>	$85\frac{1}{2}$	287	535
------------------------------------	-----------------	-----	-----

În experiența coloanei a patra, s-au pierdut mișcări egale cu 535 oscilații în aer, și $1\frac{1}{5}$ în apă. În adevăr oscilațiile în aer erau cu ceva mai repezi decît în apă. Dar dacă oscilațiile în apă s-ar accelera într-un astfel de raport încît mișcările pendulelor în ambele medii să fie de viteze egale, ar rămîne același număr de $1\frac{1}{5}$ oscilații în apă, în care s-ar pierde aceeași mișcare ca mai înainte; din cauză că rezistența a crescut și în același timp pătratul timpului a scăzut în același raport pătratic. Așadar vitezele pendulelor fiind egale s-au pierdut mișcări egale în aer în 535 oscilații și în apă în $1\frac{1}{5}$ oscilații; și deci rezistența pendulului în apă este către rezistența lui în aer precum 535 către $1\frac{1}{5}$. Aceasta este proporția rezistențelor întregi în cazul coloanei a patra.

Căci să fie $AV + CV^2$ diferența arcelor descrise în coborîre și în urcarea următoare de o sferă mișcată în aer cu viteza maximă V ; și cum viteza maximă în cazul coloanei a patra este către viteza maximă în cazul primei coloane, precum 1 către 8, iar diferența arcelor în cazul coloanei a patra către diferența în cazul primei coloane precum $\frac{2}{535}$ către $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, sau precum $85\frac{1}{2}$ către 4280; să scriem în aceste cazuri 1 și 8, pentru viteze și $85\frac{1}{2}$ și 4280 pentru diferențele arcelor, și va fi $A + C = 85\frac{1}{2}$ și $8A + 64C = 4280$ sau

$A + 8C = 535$; și de aici prin reducerea ecuațiilor vom avea $7C = 449\frac{1}{2}$ și $C = 64\frac{3}{14}$ și $A = 21\frac{2}{7}$: și de aceea rezistența, deoarece este precum $\frac{7}{11}4V + \frac{3}{4}CV^2$, va fi precum $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. De aceea în cazul coloanei a patra, unde viteza era 1, rezistența întreagă este către partea sa proporțională cu pătratul vitezei, precum $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$ sau $61\frac{12}{17}$ către $48\frac{9}{56}$; și de aceea rezistența pendulului în apă este către acea parte a rezistenței în aer, care este proporțională cu pătratul vitezei, și care singură trebuie luată în considerare în mișcări mai rezezi, precum $61\frac{12}{17}$ către $48\frac{9}{56}$ și 535 către $1\frac{1}{5}$ luate împreună, adică, precum 571 către 1. Dacă firul întreg al pendulului oscilînd în apă ar fi cufundat, rezistența lui ar fi cu mult mai mare; astfel că rezistența pendulului ce oscilează în apă, care este proporțională cu pătratul vitezei, și care singură trebuie considerată în corpurile mai rezezi, este către rezistența aceluiași pendul întreg, oscilînd cu aceeași viteză în aer, precum aproximativ 850 către 1, adică, aproximativ precum densitatea apei către densitatea aerului.

În acest calcul ar fi trebuit să luăm în considerare acea parte a rezistenței pendulului în apă, care este proporțională cu pătratul vitezei, dar (ceea ce poate s-ar părea ciudat) rezistența în apă creștea după un raport mai mare ca pătratul vitezei. Cercetînd cauza acestui fapt, am aflat că cutia este prea mică față de mărimea sferei pendulului, și împiedica prea mult din cauza îngustimii sale mișcarea apei care ceda. Căci dacă sfera pendulară, a cărui diametru era de un deget, era cufundată, rezistența creștea aproape în raportul pătratului vitezei. Am probat aceasta construind un pendul din două sfere, dintre care cea inferioară și mai mică oscila în apă, cea superioară și mai mare era fixată de fir aproape deasupra apei, și oscilînd în aer, ajuta mișcarea pendulului și o făcea mai lungă. Iar experiențele aranjate în acest fel rezultau după cum se descrie în tabloul următor.

<i>Arcul descris în prima coborîre</i>	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
<i>Arcul descris în a doua urcare</i>	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
<i>Diferența arcelor proporțională în</i>							
<i>mișcarea pierdută n</i>	4	2	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	
<i>Numărul de oscilații</i>	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Comparînd rezistențele mediilor între ele, am pus de asemenea ca pendule de fier să oscileze în mercur. Lungimea firului de fier era de aproape trei picioare, și diametrul sferei pendulului aproape a treia parte a unui deget. Iar imediat deasupra mercurului era atîrnată o altă sferă de plumb de ajuns de mare ca să poată continua mișcarea pendulului mai mult timp. Apoi am umplut un vas, care cuprindea aproape trei funți de mercur, alternativ cu mercur și apă obișnuită, astfel ca pendulul oscilînd succesiv în amîndouă fluidele, să afle proporția rezistențelor: și a rezultat rezistența mercurului către rezistența apei precum aproximativ 13 sau 14 către 1: adică

precum densitatea mercurului către densitatea apei. Dacă foloseam o sferă pendulară ceva mai mare, anume al cărei diametru era aproape $\frac{1}{3}$ sau $\frac{2}{3}$ părți a unui deget, se obținea rezistența mercurului în acel raport cu rezistența apei, pe care-l are aproximativ numărul 12 sau 10 către 1. Dar trebuie să avem mai multă încredere în prima experiență, deoarece în acestea din urmă vasul era prea îngust față de mărimea sferei cufundate. Mărind sfera, ar fi trebuit mărit și vasul. Intenționez, ce este drept să repet experiențele de acest fel în vase mai mari și cu fluide atît ale metalelor topite, cît și cu altele atît calde cît și reci: dar nu am avut timp să le experimentez pe toate, și din cele deja descrise este destul de evident că rezistența corpurilor mișcate mai repede este aproximativ proporțională cu densitatea fluidelor în care se mișcă. Nu zic exact. Căci fluidele mai tenace, pe lîngă densitatea egală, rezistă fără îndoială mai mult decît cele mai lichide, astfel uleiul rece mai mult decît cel cald, cel cald mai mult decît apa de ploaie, apa decît spirtul de vin. Într-adevăr în lichide, care pentru simț sînt destul de fluide, precum în aer, în apa fie dulce, fie sărată, în spirturile de vin, de terebentină și săruri. În uleiul curățit de murdării prin distilare și încălzit, în uleiul de vitriol și mercur, în metale lichefiate și în altele de acest fel, care sînt atît de fluide încît agitate în vase păstrează mai mult timp mișcarea imprimată, și vărsate curgînd în jos se desfac foarte ușor. În picături, nu mă îndoiesc că regula stabilită este satisfăcută destul de precis: în deosebi dacă se fac experiențe cu pendule și mai mari și mișcate mai repede.

În sfîrșit cum unii sînt de părerea, că există un mediu oarecare eteric și foarte subtil, care pătrunde liber prin toți porii și canalele tuturor corpurilor; dar din partea unui astfel de mediu ce curge prin porii corpurilor ar trebui să se nască o rezistență: pentru a afla dacă rezistența, pe care o constatăm în mișcările corpurilor, se află întreagă pe suprafața lor externă, sau dacă și părțile interne simt pe suprafețele proprii o rezistență importantă, am imaginat următoarea experiență. Cu un fir de unsprezece picioare lungime, am atîrnat de un cui de oțel destul de solid, cu ajutorul unui inel de oțel o cutie rotundă de brad, încît să constituie un pendul de lungimea menționată. Cuiul era foarte ascuțit, în partea de sus cu o muchie concavă, astfel că inelul apăsînd cu arcul său superior pe muchie să se miște cît se poate de liber. Iar de arcul inferior era atîrnat firul. Pendulul astfel preparat îl îndepărtam de perpendiculară la o distanță de aproape șase picioare. și aceasta într-un plan perpendicular pe muchia cuiului, încît inelul, în timpul oscilației pendulului, să nu poată aluneca înapoi și încolo deasupra muchiei cuiului. Căci punctul de suspensiune, în care inelul atinge cuiul, trebuie să rămînă nemișcat. Așadar am notat precis locul, la care scoteam pendulul, apoi lăsînd liber pendulul, am notat alte trei locuri la care se întorcea la sfîrșitul oscilației întîi, a doua și a treia. Aceasta o repetam adesea, ca să pot afla locurile cît se poate de precis. Apoi umpleam cutia cu plumb și cu greutate metalice, care îmi erau la îndemînă. Dar mai întîi cîntăream cutia goală, împreună cu partea firului care era înfășurată în jurul cutiei și cu jumătatea părții rămase care era întinsă între cui și cutia pendulară. Căci firul întins totdeauna, acționează cu jumătatea greutății sale asupra pendulului scos din poziția perpendiculară. La această greutate adăugam greutatea aerului conținut de vas. Și greutatea întreagă era aproape a 78-a parte a cutiei plină

cu metale. Atunci deoarece cutia plină cu metale, întinzînd firul prin greutatea sa, mărea lungimea pendulului, scurtam firul așa fel ca lungimea pendulului oscilant să fie aceeași ca mai înainte. Apoi ducînd pendulul la locul notat mai înainte și lăsîndu-l liber, numărăm aproape 77 de oscilații, pînă ce cutia se întorcea la locul notat a doua oară, apoi tot de atîtea ori pînă ce cutia se întorcea la locul notat a treia oară, și apoi din nou tot de atîtea ori pînă ce cutia în revenirea sa ajungea la locul al patrulea. De unde conchid că rezistența întreagă a cutiei pline nu avea o proporție mai mare către rezistența cutiei goale decît 78 către 77. Căci dacă rezistențele ambelor ar fi egale, cutia plină din cauza forței sale inerente de 78 ori mai mare decît forța inerentă a cutiei goale, ar trebui să-și păstreze mișcarea oscilatoare cu atît mai mult timp, și de aceea completînd totdeauna 78 de oscilații să revină la locurile notate. Dar a revenit la ele la capătul a 77 de oscilații.

Prin urmare fie A rezistența cutiei pe suprafața ei externă, și B rezistența cutiei goale în părțile interne; și dacă rezistențele corpurilor de viteze egale în părțile lor interne sînt precum materia, sau numărul particulelor cărora li se rezistă, $78B$ va fi rezistența cutiei pline în părțile ei interne, și deci rezistența întreagă $A+B$ a cutiei goale va fi către rezistența întreagă $A+78B$ a cutiei pline precum 77 către 78, și separînd $A+B$ către $77B$, precum 77 către 1, și deci $A+B$ către B precum 77×77 către 1, și separînd A către B precum 5928 către 1. Așadar rezistența cutiei goale în părțile interne este de cinci mii de ori mai mică decît rezistența ei pe suprafața externă, și mai bine. Într-adevăr aceasta o deducem din ipoteza că rezistența mai mare a cutiei pline, nu provine dintr-o altă cauză latentă, ci numai din acțiunea unui fluid oarecare subtil închis în metal.

Această experiență am relatat-o din memorie. Căci hîrtia, în care am descris-o cîndva, s-a pierdut. De aceea părțile fracționare de numere care au dispărut din memorie, am fost silit să le omit.

Căci nu am timp să le încerc toate din nou. Întîia dată, deoarece m-am folosit de un cui nu de ajuns de solid, cutia plină era întîrziată mai repede. Cercetînd cauza, am aflat că cuiul puțin solid ceda greutatei cutiei și urmînd oscilațiilor lui se îndoia în toate părțile. Mi-am procurat deci un cui solid, pentru ca punctul de suspensiune să rămînă nemișcat, și atunci toate s-au întîmplat după cum le-am descris mai sus.

SECȚIUNEA VII

Despre mișcarea fluidelor și rezistența proiectilelor

PROPOZIȚIA XXXII. TEOREMA XXVI

Dacă două sisteme asemenea de corpuri constau dintr-un număr egal de particule, și particulele corespunzătoare sînt asemenea și proporționale, fiecare dintr-un sistem cu fiecare din celălalt, și situate asemenea între ele, și au între ele un raport dat de densitate, și încep să se miște în mod asemănător între ele în timpuri proporționale (cele dintr-un sistem între ele și cele din celălalt iarăși între ele) și dacă cele din același sistem nu se ating între ele, decît în momentele de reflexie, și nici nu se atrag sau se resping reciproc, decît cu forțele acceleratoare care sînt în raport invers cu diametrele particulelor corespunzătoare și în raport direct cu pătratele vitezelor: zic că particulele sistemelor continuă să se miște între ele în mod asemănător în timpuri proporționale.

Corpurile asemenea și situate asemenea, zic că se mișcă în mod asemănător în timpuri proporționale, dacă pozițiile lor reciproce la sfîrșitul acelor timpuri totdeauna sînt asemenea: anume dacă asemănăm particulele unui sistem cu particulele corespunzătoare ale celuilalt. De unde timpurile în care particule corespunzătoare descriu părți asemenea și proporționale ale figurilor asemenea vor fi proporționale. Așadar dacă avem două sisteme de acest fel, particulele corespunzătoare, din cauza asemănării mișcărilor începute, continuă a se mișca în mod asemănător, pînă ce se întîlnesc. Căci dacă nu sînt acționate de nici o forță, vor progresa uniform în linii drepte potrivit legii I a mișcării. Dacă se acționează reciproc cu forțe oarecare, și forțele sînt în raport invers cu diametrele particulelor corespunzătoare și direct cu pătratele vitezelor; deoarece pozițiile particulelor sînt asemenea iar forțele proporționale, forțele întregi cu care sînt acționate particulele corespunzătoare, compuse din diversele forțe active (potrivit corolarului II al legilor), vor avea determinări asemenea, ca și cînd ar privi centre situate asemenea între particule; și forțele întregi vor fi între ele precum diversele forțe componente, adică în raport invers cu diametrele particulelor corespunzătoare, și în același raport cu pătratele vitezelor: și de aceea vor face ca particulele corespunzătoare să continue a descrie figuri asemenea. Acestea se vor întîmpla astfel (potrivit corolarelor 1 și 8, propoziția IV, Cartea I) dacă centrele sînt în repaus. Dacă însă se mișcă, fiindcă din cauza asemănării translațiilor, situațiile lor între particulele sistemelor rămîn asemenea, se vor introduce schimbări asemenea în figurile pe care le descriu particulele. Prin urmare mișcările particulelor corespunzătoare și asemenea vor fi asemenea pînă la primele lor întîlniri, și de aceea vor fi asemenea întîlnirile, și reflexiile, și apoi (potrivit celor arătate) asemenea mișcările între ele pînă ce se vor întîlni din nou și așa mai departe la infinit. Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici dacă două corpuri oarecare, care sînt asemenea și situate asemenea față de particulele corespunzătoare ale sistemelor, încep

să se miște între ele în mod asemănător în timpuri proporționale și mărimile și densitățile lor între ele sînt precum mărimile și densitățile particulelor corespunzătoare: acestea vor continua să se miște în mod asemănător în timpuri proporționale. Căci raportul părților mai mari ale ambelor sisteme și ale particulelor este același.

COROLARUL 2. Și dacă toate părțile asemenea și situate asemenea ale sistemelor sînt în repaus între ele: și dacă două din ele, care sînt mai mari ca celelalte, și se corespund reciproc în fiecare sistem, încep să se miște după linii situate asemenea cu mișcările asemenea într-un fel oarecare: acestea vor excita mișcări asemenea în celelalte părți ale sistemelor și vor continua să se miște în mod asemănător între ele în timpuri proporționale; și de aceea să descrie spații proporționale cu diametrele lor.

PROPOZIȚIA XXXIII. TEOREMA XXVII

Presupunînd aceleași, zic că părților mai mari ale sistemelor li se opune o rezistență după un raport compus din pătratul raportului vitezelor lor și pătratul raportului diametrelor și raportul densității părților sistemelor.

Căci rezistența se naște parte din forțele centripete sau centrifuge prin care se acționează reciproc particulele sistemelor, parte din întîlnirile și reflexiile particulelor și părților mai mari. Dar rezistențele de primul gen sînt între ele precum forțele motoare întregi din care provin, adică precum forțele acceleratoare întregi și cantitățile de materie în părțile corespunzătoare; adică (prin ipoteză) precum pătratele vitezelor și în raport invers cu distanțele particulelor corespunzătoare și în același raport cu cantitățile de materie în părțile corespunzătoare; și deci cum distanțele particulelor unui sistem sînt către distanțele corespunzătoare ale particulelor celuilalt, precum diametrul particulei sau părții în sistemul de mai sus către diametrul particulei sau părții corespunzătoare în celălalt, și cantitățile de materie sînt precum densitățile părților și cuburile diametrelor; rezistențele sînt între ele precum pătratele vitezelor și pătratele diametrelor și densitățile părților sistemelor. Q.E.D. Rezistențele de felul din urmă sînt precum numerele și forțele reflexiilor corespunzătoare luate împreună. Dar numerele reflexiilor sînt între ele precum vitezele părților corespunzătoare, și în raport invers cu spațiile dintre reflexiile lor. Și forțele de reflexie sînt precum vitezele și mărimile și densitățile părților corespunzătoare luate împreună; adică precum vitezele și cuburile diametrelor și densităților părților. Și unind toate aceste rapoarte, rezistențele părților corespunzătoare sînt între ele precum pătratele vitezelor și pătratele diametrelor și densitățile părților luate împreună. Q. E. D.

COROLARUL 1. Prin urmare, dacă sistemele sînt două fluide elastice la fel cu aerul, și părțile lor sînt în repaus între ele: iar două corpuri, asemenea și proporționale cu părțile fluidelor în ce privește mărimea și densitatea, și situate asemenea între părți, se proiectează oarecum după linii situate asemenea; iar forțele acceleratoare, prin care se agită reciproc particulele fluidelor, sînt în raport invers cu diametrele corpurilor proiectate, și în același raport cu pătratele vitezelor: corpurile în timpuri proporționale

vor excita mișcări asemenea în fluide, și vor descrie spații asemenea și proporționale cu diametrele lor.

COROLARUL 2. Așadar în același fluid un proiectil rapid întâlnește o rezistență, care este aproximativ în raportul pătratului vitezei. Căci dacă forțele, cu care se acționează reciproc particulele distante, s-ar mări în raportul pătratului vitezei, rezistența va fi în același raport pătratic; și deci într-un mediu, ale cărui părți distanțate între ele nu se acționează reciproc cu nici o forță, rezistența este exact în raportul pătratului vitezei. Fie deci trei medii A, B, C , constând din părți asemenea și egale și dispuse în mod regulat la distanțe egale. Părțile mediilor A și B să se respingă reciproc cu forțe care sînt între ele precum T și V , iar părțile mediului C să fie lipsite de orice astfel de forțe. Și dacă patru corpuri egale D, E, F, G , se mișcă în aceste medii, primele două D și E în primele două A și B , și celelalte două F și G în al treilea C ; și fie viteza corpului D către viteza corpului E , și viteza corpului F către viteza corpului G precum rădăcina pătrată a raportului forțelor T către forțele V : rezistența corpului D va fi către rezistența corpului E și rezistența corpului F către rezistența corpului G , în raportul pătratelor vitezelor; și de aceea rezistența corpului D va fi către rezistența corpului F precum rezistența corpului E către rezistența corpului G . Fie corpurile D și F de aceeași viteză cu corpurile E și G ; și mărim vitezele corpurilor D și F într-un raport oarecare, și micșorînd forțele particulelor mediului B în același raport pătratic, mediul B se va apropia de forma și condiția mediului C după voie și deci rezistențele corpurilor egale și de viteze egale E și G în aceste medii, se vor apropia neconținut de egalitate, astfel că diferența lor în sfîrșit va deveni mai mică decît oricare dată. Astfel cum rezistențele corpurilor D și F sînt între ele precum rezistențele corpurilor E și G , acestea de asemenea se vor apropia în mod analog de raportul egalității. Așadar, rezistențele corpurilor D și F , cînd se mișcă foarte repede, sînt aproximativ egale; și de aceea cum rezistența corpului F este proporțională cu pătratul vitezei, rezistența corpului D va fi aproximativ în același raport.

COROLARUL 3. Rezistența unui corp ce se mișcă foarte repede într-un fluid elastic este oarecum aceeași ca și cînd părțile fluidului ar fi lipsite de forțele centrifuge, și nu ar fugi una de alta: dacă numai forța elastică a fluidului se naște din forțele centrifuge ale particulelor, și viteza este atît de mare încît forțele nu au timp de ajuns să acționeze.

COROLARUL 4. Dar cum rezistențele corpurilor asemenea și de viteze egale, într-un mediu ale cărui părți distante nu fug una de alta, sînt precum pătratele diametrelor; rezistențele corpurilor de viteze egale și în mișcare foarte rapidă într-un mediu elastic de asemenea sînt aproximativ precum pătratele diametrelor.

COROLARUL 5. Și cum corpurile asemenea, egale și de viteză egală în medii de aceeași densitate, ale căror particule nu fug deodată, fie că particulele sînt mai multe și mai mici, fie că sînt mai puține și mai mari, lovesc o cantitate de materie egală în timpuri egale, și îi imprimă o cantitate de mișcare egală și la rîndul lor (potrivit legii III a mișcării) suferă din partea ei o reacțiune egală, adică li se opune o rezistență egală: este evident de asemenea că în fluide elastice de aceeași densitate cînd se mișcă foarte repede, rezistențele lor sînt aproape egale; fie că fluidele constau din particule

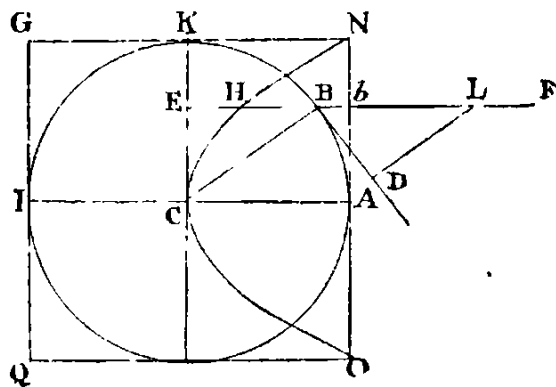
mai mari, fie din cele mai mici din toate. Din cauza subtilității mediului rezistența proiectilelor mișcate foarte repede nu se micșorează mult.

COROLARUL 6. Toate acestea se întâmplă astfel în fluidele ale căror forță elastică își are originea în forțele centrifuge ale particulelor. Căci dacă forța provine de alt undeva, cum ar fi expansiunea particulelor la fel cu lina și ramurile arborilor, sau din altă cauză oarecare, prin care mișcările particulelor între ele devin mai puțin libere: rezistența, din cauza fluidității mai mici a mediului, va fi mai mare ca în corolarele de mai sus.

PROPOZIȚIA XXXIV. TEOREMA XXVIII

Dacă o sferă și un cilindru descrise cu diametrele egale se mișcă în direcția axei cilindrului cu o viteză egală, într-un mediu rar constând din particule egale și așezate în mod liber la distanțe egale unul de altul: rezistența sferei va fi de două ori mai mică decât rezistența cilindrului.

În adevăr deoarece acțiunea mediului asupra corpului este aceeași (potrivit corolarului V al legilor) fie că corpul se mișcă într-un mediu în repaus, fie că particulele mediului acționează cu aceeași viteză asupra corpului în repaus: să considerăm corpul în repaus, și să vedem de ce forță va fi acționat de către mediul în mișcare. Fie deci $ABKI$ un corp sferic descris din centrul C cu semidiametrul CA , și să cadă particulele mediului cu o viteză dată asupra corpului sferic, după drepte paralele cu AC : și fie FB o dreaptă de acest fel. Să luăm pe ea LB egală cu semidiametrul CB , și să ducem BD care să atingă sfera în B . Pe KC și BD să coborâm perpendicularele BE , LD , și forța cu care o particulă a mediului, căzând în direcția dreptei FB în mod oblic, împinge sfera în B , va fi către forța cu care aceeași particulă ar duce cilindrul $ONGQ$ descris cu axa ACI în jurul sferei perpendicular în b , precum LD către IB sau BE către BC . La fel eficacitatea acestei forțe către sfera ce trebuie să se miște în direcția incidente sale FB sau AC , este către eficacitatea aceleiași către sfera ce trebuie să se miște în direcția determinării sale, adică, în direcția dreptei BC în care ea acționează sfera în mod



direct precum BE către BC . Și unind rapoartele, eficacitatea particulei asupra sferei în direcția dreptei FB ce cade în mod oblic, pentru a o mișca în direcția incidente sale, este către eficacitatea aceleiași particule în direcția aceleiași drepte căzând perpendicular pe cilindru, pentru a-l mișca în aceeași direcție, precum BE^2 către BC^2 . De aceea dacă pe bE , care este perpendiculară pe baza circulară NAO a cilindrului și egală cu raza AC , luăm bH egal cu $\frac{BE^2}{CB}$: bH va fi către bE , precum

efectul particulei asupra sferei către efectul particulei asupra cilindrului. Și de aceea solidul care este cuprins de toate dreptele bH va fi către solidul care este cuprins de toate dreptele bE , precum efectul tuturor particulelor asupra

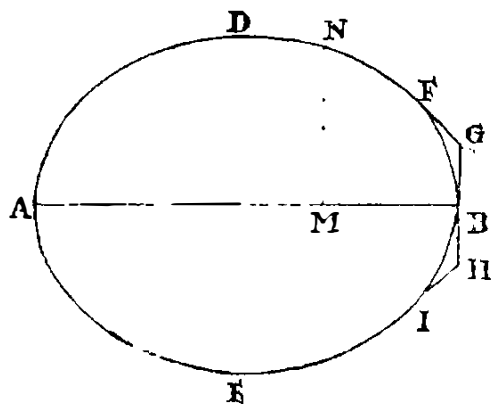
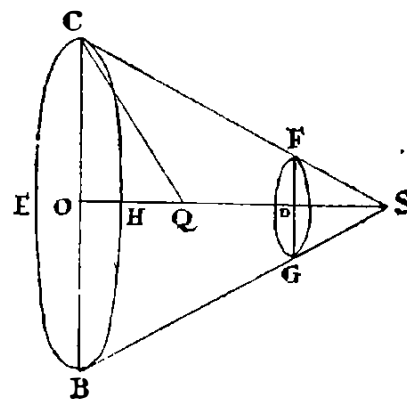
sferei către efectul tuturor particulelor asupra cilindrului. Dar primul solid este un paraboloid descris cu vârful C , axa CA și parametrul CA , și solidul din urmă este un cilindru circumscris paraboloidului: și se știe că paraboloidul este jumătatea cilindrului circumscris. Așadar forța întreagă a mediului asupra sferei este de două ori mai mică decât forța ei întreagă asupra cilindrului. Și de aceea, dacă particulele mediului sînt în repaus, și cilindrul și sfera se mișcă cu viteză egală, rezistența sferei va fi de două ori mai mică decât rezistența cilindrului. Q.E.D.

SCOLIE

În același fel se pot compara între ele alte figuri în ce privește rezistența, și se pot afla acelea care sînt mai potrivite pentru a continua mișcările lor în medii rezistente.

Astfel dacă pe baza circulară $CEBH$, care este descrisă din centrul O , cu raza OC , și înălțimea OD , se construiește bucata de con $CBGF$, care dintre toate fragmentele construite pe aceeași bază și înălțime și înaintînd în direcția axei sale spre D rezistă mai puțin: să bisectăm înălțimea OD în Q și să prelungim OQ pînă în S astfel ca QS să fie egal cu QC , și S va fi vârful conului al cărui trunchi se caută.

De unde în treacăt, deoarece unghiul CSB este totdeauna ascuțit, urmează că dacă solidul $ADBE$, s-ar naște prin rotirea figurii eliptice sau ovale $ADBE$ în jurul axei AB , și ar atinge figura generatoare de cele trei drepte FG , GH , HI în punctele F , B și I , în așa fel încît GH să fie perpendicular pe axă în punctul de contact b , și FG , HI să formeze unghiurile FGB , BHI de 135 grade cu GH , solidul, care este generat de rotirea figurii $ADFGHIE$ în jurul axei AB , întîmpină o rezistență mai mică



decît primul solid; dacă amîndouă progresează în direcția axei lor AB , și extremitatea B a fiecăruia merge înainte. Această propoziție cred că nu va fi fără folos la construcția corăbiilor.

Căci dacă figura $DNFG$ este o astfel de curbă, cît, dacă dintr-un punct oarecare N al ei se coboară pe axa AB perpendiculara NM , și din punctul dat G se duce dreapta GR care este paralelă cu

dreapta care atinge figura în N , și taie axa prelungită în R , atunci MN va fi către GR precum GR^3 către $4BR \times GB^2$; solidul care se descrie prin revoluția acestei figuri în jurul axei AB , mișcîndu-se în mediul rar menționat mai sus de la A spre B , va avea mai puțină rezistență decît oricare alt solid circular descris de aceeași lungime și lățime.

PROPOZIȚIA XXXV. PROBLEMA VII

Dacă un mediu rar constă din particule foarte mici în repaus de mărimi egale și liber dispuse la distanțe egale între ele: să se afle rezistența unei sfere ce progresează în mod uniform în acest mediu.

-CAZUL 1. Să ne închipuim că un cilindru descris cu același diametru și înălțime înaintază cu aceeași viteză în direcția lungimii sale în același mediu. Și să presupunem că particulele mediului, în care cade sfera sau cilindrul, se întorc cu o viteză de reflexie cât se poate de mare. Și cum rezistența sferei (potrivit propoziției celei mai noi) este jumătate din rezistența cilindrului, și sfera este către cilindru precum doi către trei, și cilindrul căzînd perpendicular pe particule, și reflectîndu-le cât se poate de tare, le va comunica viteza sa dublă: cilindrul, în timpul în care descrie jumătatea lungimii axei sale înaintînd în mod uniform, va comunica particulelor o mișcare, care este către mișcarea întreagă a cilindrului precum densitatea mediului către densitatea cilindrului; și sfera în timpul în care descrie lungimea întreagă a diametrului său înaintînd în mod uniform, va comunica aceeași mișcare particulelor, și în care timp descrie două treimi ale diametrului său, va comunica particulelor o mișcare, care este către mișcarea întreagă a sferei precum densitatea mediului către densitatea sferei. Și de aceea sfera suferă o rezistență, care este către forța cu care mișcarea ei întreagă poate fi sau anulată sau generată în timpul în care descrie două treimi ale diametrului său înaintînd în mod uniform, precum densitatea mediului către densitatea sferei.

CAZUL 2. Să presupunem că particulele mediului căzînd pe sferă sau pe cilindru nu se reflectă; și cilindrul căzînd în mod perpendicular pe particule le va comunica viteza sa simplă și deci suferă o rezistență de două ori mai mică decît în primul caz, și rezistența sferei de asemenea va fi de două ori mai mică decît în primul caz.

CAZUL 3. Să presupunem că particulele mediului se întorc de la sferă cu o forță de reflexie care nu este nici maximă nici nulă, ci una mijlocie oarecare; și rezistența sferei va fi în același raport mijlociu între rezistența din primul caz și rezistența din al doilea. Q.E.I.

COROLARUL 1. De aici dacă sfera și particulele sînt infinit de dure, și lipsite de orice forță elastică și deci și de orice forță de reflexie: rezistența sferei va fi către forța cu care întreaga ei mișcare poate fi sau anulată sau generată, în care timp sfera descrie patru treimi de părți ale diametrului său, precum densitatea mediului către densitatea sferei.

COROLARUL 2. Rezistența sferei, celelalte fiind egale, este precum pătratul vitezei.

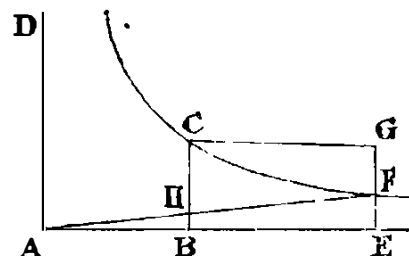
COROLARUL 3. Rezistența sferei, celelalte fiind egale, este precum pătratul diametrului.

COROLARUL 4. Rezistența sferei, celelalte fiind egale, este precum densitatea mediului.

COROLARUL 5. Rezistența sferei este într-un raport care se compune din raportul pătratului vitezei și al pătratului diametrului și din raportul diametrului densității mediului.

COROLARUL 6. Și mișcarea sferei împreună cu rezistența ei se pot exprima astfel. Fie AB timpul în care sfera din cauza rezistenței sale uni-

form continuată își poate pierde întreaga sa mișcare. Să ridicăm pe AB perpendicularele AD , BC . Și fie BC întreaga mișcare, și prin punctul C cu asimptotele AD , AB să descriem hiperbola CF . Să prelungim pe AB pînă într-un punct oarecare E . Să ridicăm perpendiculara EF întîlnind hiperbola în F . Să completăm paralelogramul $CBEF$, și să ducem AF care să întîlnească pe BC în H . Și dacă sfera într-un timp oarecare BE , continuînd prima sa mișcare BC în mod uniform, descrie într-un mediu fără rezistență spațiul $CBEF$ reprezentat prin aria paralelogramului, într-un mediu rezistent ea va descrie spațiul reprezentat prin aria hiperbolei, $CBEF$, și mișcarea ei la sfîrșitul aceluia timp se va reprezenta prin ordonata EF a hiperbolei, pierzîndu-se partea FG a mișcării sale. Și rezistența ei la sfîrșitul aceluiași timp se va exprima prin lungimea BH , pierzîndu-se partea CH a rezistenței. Toate acestea rezultă din corolarele 1 și 3 propoziția V, Cartea II.



COROLARUL 7. De aici dacă sfera în timpul T din cauza rezistenței R continuată în mod uniform își pierde întreaga sa mișcare M : aceeași sferă în timpul t într-un mediu rezistent, descrescînd din cauza rezistenței R în raportul pătratului vitezei, va pierde partea $\frac{tM}{T+t}$ a mișcării sale M , rămînînd partea $\frac{TM}{T+t}$; și va descrie un spațiu care este către spațiul descris cu mișcarea uniformă M în același timp t , precum logaritmul numărului $T - \frac{t}{r}$ înmulțit cu numărul 2,302585092994 este către numărul $\frac{t}{T}$, fiindcă aria hiperbolică $BCFE$ este către dreptunghiul $BCGE$ în această proporție.

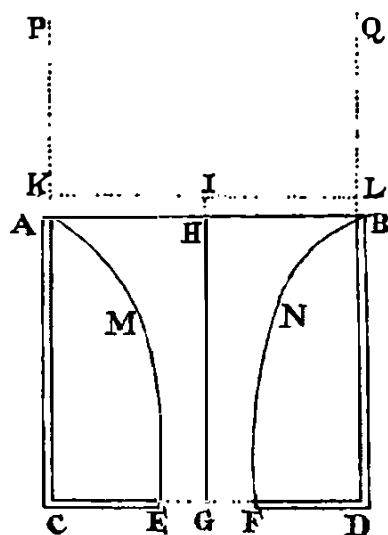
SCOLIE

În această propoziție am expus rezistența și întîrzierea proiectilelor sferice în medii fără continuitate, și am arătat că această rezistență este către forța cu care întreaga mișcare a sferei poate fi sau nimicită sau generată în timpul în care sfera poate descrie două treimi din diametrul său cu o viteză continuată în mod uniform, precum densitatea mediului către densitatea sferei, dacă sfera și particulele mediului sînt foarte elastice și posedă forța maximă de reflexie: și că această forță este de două ori mai mică cînd sfera și particulele mediului sînt infinit de dure și direct lipsite de forța de reflexie. În mediile continue însă, cum este apa, uleiul cald și mercurul, în care sfera nu cade imediat în toate particulele fluidului ce produc rezistență, ci apasă numai particulele apropiate și acestea apasă altele și acestea altele, rezistența este încă de două ori mai mică. În general o sferă în medii foarte fluide de acest fel suferă o rezistență care este către forța cu care întreaga ei mișcare poate fi sau anulată sau generată în timpul în care continuînd acea mișcare în mod uniform, poate descrie opt treimi din diametrul său, precum densitatea mediului către densitatea sferei. Ceea ce ne vom sili a demonstra în cele următoare.

PROPOZIȚIA XXXVI. PROBLEMA VIII

Să se afle mișcarea apei ce curge dintr-un vas cilindric printr-o deschidere efectuată în fund.

Fie $ACDB$ un vas cilindric, AB orificiul său superior, CD fundul paralel cu orizontul, EF o deschidere circulară în mijlocul fundului, G centrul deschiderii, și GH axa cilindrului perpendicular pe orizont. Și să ne închipuim un cilindru de gheață $APQB$ avînd aceeași lățime cu cavitatea vasului, și aceeași axă, și coborînd în mod continuu cu o mișcare uniformă și că părțile sale imediat ce ating suprafața AB se lichefiază, și prefăcîndu-se în apă curg în vas din cauza greutatei lor, și căzînd formează o cataractă sau coloană de apă $ABNFEM$, și trec prin deschiderea EF și o umple complet. Fie în ade-



văr viteza uniformă a gheții descendente și a apei vecine în cercul AB , aceea pe care o poate cîștiga apa căzînd și descriind în căderea sa înălțimea IH ; și fie IH și HG situate în aceeași direcție, și prin punctul I să ducem dreapta KL paralelă cu orizontul și întîlnind laturile gheții în K și L . Și viteza apei ce curge prin deschiderea EF va fi aceea pe care o poate cîștiga apa căzînd din I și descriind în căderea sa înălțimea IG . Și deci potrivit teoremei lui Galileu IG va fi către IH în raportul pătratului vitezei apei ce curge prin deschidere către viteza apei în cercul AB , adică, în raportul pătratului cercului AB către cercul EF ; căci aceste cercuri sînt în raport invers cu vitezele apelor care trec complet prin ele, în același timp și în cantități egale. Aici este vorba de viteza apei către

orizont. Și mișcarea paralelă cu orizontul în care părțile apei ce cade se apropie una de alta, deoarece nu provine din greutate, și nici nu schimbă mișcarea perpendiculară pe orizont provenită din cauza gravitației, aici nu se ia în considerare. Presupunem într-adevăr că părțile apei întrucîtva sînt coherente, și prin coeziunea lor în timpul căderii se apropie una de alta prin mișcări paralele cu orizontul, astfel că formează o singură cataractă și nu se divid în mai multe cataracte: dar aici nu considerăm mișcarea paralelă cu orizontul născută din acea coeziune.

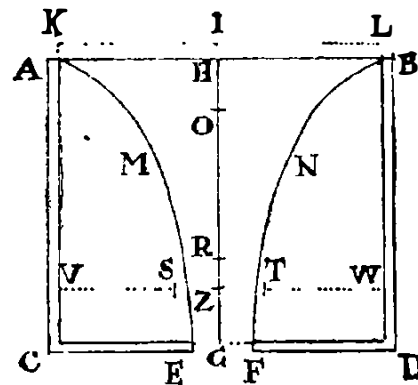
CAZUL 1. Să ne închipuim că întreaga cavitate a vasului, care înconjoară apa curgătoare $ABNFEM$, este plină cu gheață, astfel că apa trece prin gheață ca printr-o pîlnie. Și dacă apa numai că nu atinge gheața sau, ceea ce este același lucru, dacă o atinge și din cauza netezimii ei foarte mari alunecă pe gheață foarte liber și fără orice rezistență, ea se va scurge prin deschiderea EF cu aceeași viteză ca mai înainte, și greutatea totală a coloanei de apă $ABNFEM$ va fi folosită în producerea curgerii ei ca mai sus, și fundul vasului va susține greutatea gheții ce înconjoară coloana.

Să lăsăm acum să se topească gheața în vas; și scurgerea apei, în ce privește viteza, va rămîne aceeași ca mai înainte. Nu va fi mai mică, deoarece gheața topită în apă va tinde să coboare: nu mai mare, fiindcă gheața topită în apă nu se poate coborî decît împiedicînd coborîrea altei ape egală cu

coborîrea sa. Aceeași forță trebuie să producă aceeași viteză a apei curgătoare. Dar orificiul din fundul vasului, din cauza mișcărilor oblice ale particulelor apei curgătoare, trebuie să fie cu ceva mai mare decît mai înainte. Căci nu toate particulele apei trec pîrpendicular prin orificiu, ci adunîndu-se din toate părțile laturilor vasului, și convergînd în orificiu, trec prin mișcări oblice; și îndoindu-și cursul în jos se întîlnesc în vîna apei țîșnitoare, care dincoace de orificiu este mai îngustă decît în însuși orificiul, diametrul ei către diametrul deschiderii fiind precum 5 către 6 sau $5\frac{1}{2}$ către $6\frac{1}{2}$ aproximativ, dacă am măsurat corect diametrele. Căci am pregătît o lamă plană foarte subțire găurită la mijloc, avînd diametrul orificiului circular de cinci optimi de deget. Și pentru ca vîna apei țîșnitoare căzînd să nu fie accelerată și prin accelerație să nu devină mai îngustă, nu am fixat lama de fund ci pe latura vasului astfel ca vîna să iasă după o linie paralelă cu orizontul. Apoi cînd vasul era plin cu apă, am deschis orificiul ca apa să se scurgă; și diametrul vînei, măsurat la o distanță de aproape o jumătate de deget de la deschidere cu precizie cît se poate de mare, era de 21 pe 40 dintr-un deget. Prin urmare diametrul acestei deschideri circulare era către diametrul vînei precum 25 către 21 aproximativ. Deci apa trecînd prin deschidere, converge din toate părțile, și după ce se scurge din vas, devine mai îngustă convergînd, și prin îngustare se accelerează pînă ce ajunge la distanța de o jumătate de deget de la orificiu și la acea distanță este mai îngustă și mai rapidă decît în deschiderea însăși, aproximativ în raportul 25×25 către 21×21 sau 17 la 12, adică aproape precum raportul lui $\sqrt{2}$ către 1. Dar prin experiență se constată că, cantitatea de apă ce se scurge printr-un orificiu circular făcut în fundul unui vas, este aceea care trebuie să se scurgă în același timp cu viteza prezisă, nu prin acel orificiu, ci printr-o deschidere circulară, al cărei diametru este către diametrul acelei deschideri precum 21 către 25. Și de aceea apa curgînd are o viteză îndreptată în jos în însuși orificiul pe care aproximativ o poate cîștiga un corp greu, căzînd și descriind în căderea sa jumătatea înălțimii apei ce stagnează în vas. Dar după ce a ieșit din vas, se accelerează convergînd pînă ce ajunge la o distanță de orificiu aproape egală cu diametrul orificiului și cîștigă o viteză mai mare aproape în raportul lui $\sqrt{2}$ către 1; pe care aproximativ o poate cîștiga un corp greu căzînd și descriind în căderea sa întreaga înălțime a apei ce stagnează în vas. Așadar în cele ce urmează să reprezentăm diametrul vînei prin acea deschidere mai mică pe care am numit-o *EF*. Și să ne închipuim că paralel cu planul deschiderii *EF* ducem un alt plan superior *VW* la o distanță aproape egală cu diametrul deschiderii și străbătut de o deschidere mai mare *ST*; prin care să treacă o vîna, care să umple exact orificiul inferior *EF*, și al cărei diametru de aceea este către diametrul orificiului inferior aproape ca 25 către 21. Căci astfel vîna va trece perpendicular prin deschiderea inferioară; și cantitatea apei ce se scurge, potrivit mărimii acestei deschideri, va fi aproximativ aceea pe care o pretinde soluția problemei. Iar spațiul care este închis de două plane și vîna ce cade, se poate considera ca fundul vasului. Dar pentru ca soluția problemei să fie mai simplă și mai matematică, este avantajos să luăm numai planul inferior ca fundul vasului, și să ne închipuim că apa care curgea peste gheață ca printr-o pîlnie, și ieșea din vas prin deschiderea *EF* făcută în planul inferior, își păstrează totdeauna

cu cea circulară. Căci viteza în scurgere nu depinde de forma orificiului ci provine din înălțimea lui sub planul KL .

CAZUL 6. Dacă partea inferioară a vasului $ABDC$ se cufundă în apă stătătoare, și înălțimea apei stătătoare deasupra fundului vasului este GR ; viteza cu care apa ce se află în vas se scurge prin orificiul EF în apa stătătoare, va fi aceea pe care o poate câștiga apa căzînd și descriind în căderea sa înălțimea IR . Căci greutatea întregii ape din vas care este inferioară suprafeței apei stătătoare, va fi susținută în echilibru prin greutatea apei stătătoare și deci va accelera foarte puțin mișcarea apei ce coboară în vas. Acest caz de asemenea va fi clar prin experiențe, măsurînd anume timpurile în care se scurge apa.



COROLARUL 1. De aici dacă prelungim înălțimea CA a apei pînă în K , astfel ca AK să fie către CK precum pătratul raportului ariei deschiderii făcute într-o parte oarecare a fundului, către aria cercului AB ; viteza apei curgătoare va fi egală cu viteza pe care o poate cîștiga apa căzătoare și descriind în căderea sa înălțimea KC .

COROLARUL 2. Și forța, prin care se poate genera mișcarea întreagă a apei ce țîșnește, este egală cu greutatea unei coloane cilindrice de apă, a cărei bază este orificiul EF , și înălțimea $2GI$ sau $2CK$. Căci apa curgătoare în timpul în care egalează această coloană, căzînd din cauza greutății sale de la înălțimea GI , își poate cîștiga viteza, cu care țîșnește.

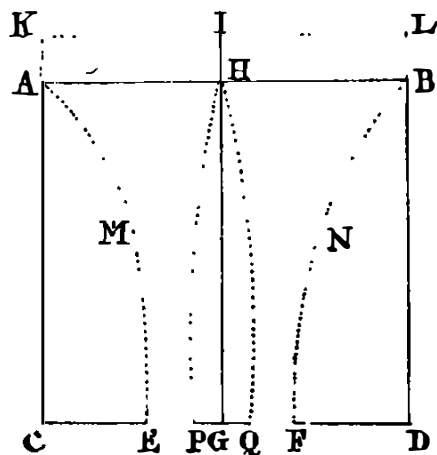
COROLARUL 3. Greutatea întregii ape în vasul $ABDC$ este către partea greutății, care se întrebuințează la scurgerea apei, precum suma cercurilor AB și EF către dublul cercului EF . Căci fie IO media proporțională între IH și IG ; și apa ieșind prin deschiderea EF , în timp ce o picătură căzînd din I ar putea descrie înălțimea IG , va fi egală cu cilindrul a cărui bază este cercul EF și înălțimea $2IG$, adică, cu cilindrul a cărui bază este cercul AB și înălțimea $2IO$, căci cercul EF este către cercul AB precum rădăcina patrată a raportului înălțimii IH către înălțimea IG , adică în raportul simplu al mediei proporționale IO către înălțimea IG ; și în timp ce o picătură căzînd din I poate descrie înălțimea IH , apa ce iese va fi egală cu un cilindru a cărui bază este cercul AB și înălțimea $2IH$; și în timp ce o picătură căzînd din I prin H în G descrie diferența HG a înălțimilor, apa ce iese, adică apa întreagă din solidul $ABNFEM$ va fi egală cu diferența cilindrilor, adică, cu cilindrul a cărui bază este AB și înălțimea $2HO$. Și de aceea apa întreagă din vasul $ABDC$ este către apa întreagă ce cade din solidul $ABNFEM$ precum HG către $2HO$, adică, precum $HO + OG$ către $2HO$, sau $IH + IO$ către $2IH$. Dar greutatea apei întregi din solidul $ABNFEM$ se întrebuințează la scurgerea apei; și de aceea greutatea apei întregi din vas este către partea care se folosește la curgerea apei, precum $IH + IO$ către $2IH$, și de aceea precum suma cercurilor EF și AB către dublul cercului EF .

COROLARUL 4. Și de aici greutatea apei întregi din vasul $ABDC$ este către cealaltă parte pe care o susține fundul vasului, precum suma cercurilor AB și EF către diferența acelorasi cercuri.

COROLARUL 5. Și partea greutatei pe care o susține fundul vasului este către partea cealaltă a greutatei, care se folosește la scurgerea apei, precum diferența cercurilor AB și EF către dublul cercului mai mic EF , sau precum aria fundului către dublul deschiderii.

COROLARUL 6. Iar partea greutatei, care singură apasă fundul, este către greutatea apei întregi, care apasă perpendicular pe fund, precum cercul AB către suma cercurilor AB și EF , sau precum cercul AB către excesul dublului cercului AB asupra fundului. Căci partea greutatei, care singură acționează fundul, este către greutatea apei întregi în vas, precum diferența cercurilor AB și EF către suma acelorași cercuri, potrivit corolarului 4; și greutatea apei întregi din vas este către greutatea apei întregi care apasă perpendicular asupra fundului, precum cercul AB către diferența cercurilor AB și EF . Prin urmare prin egalitate perturbată, partea greutatei, care singură apasă fundul, este către greutatea apei întregi, care apasă fundul perpendicular, precum cercul AB către suma cercurilor AB și EF sau excesul dublului cercului AB față de fund.

COROLARUL 7. Dacă în mijlocul orificiului EF așezăm un mic cerc PQ descris din centrul G și paralel cu orizontul; greutatea apei pe care o susține acel cerc, este mai mare ca greutatea părții a treia a unui cilindru de apă a cărui bază este acel mic cerc și înălțimea GH . Căci fie $ABNFEM$ cataracta sau coloana apei căzînde avînd axa GH ca mai sus, și să ne închipuim toată apa înghețată în vas, atît în circuitul cataractei cît și deasupra cercului cel mic, a cărei fluiditate nu joacă rol la coborîrea foarte promptă și



rapidă a apei. Și fie PHQ coloana de apă înghețată deasupra cercului cel mic, avînd vârful H și înălțimea GH . Și să ne închipuim că această cataractă cade cu întreaga sa greutate, și nu apasă pe PHQ nici nu se sprijină pe ea, ci alunecă liber și fără frecare pe lângă ea, decît poate în însuși vârful gheții în care cataracta la începutul căderii începe să fie concavă. Și cum apa $AMEC$, $BNFD$ înghețată în jurul cataractei are suprafața internă AME , BNF convexă înspre cataracta căzătoare, tot astfel și coloana PHQ va fi convexă spre cataractă, și de aceea mai mare decît conul a cărui bază este cercul cel mic PQ și înălțimea GH , adică, mai mare

decît a treia parte a cilindrului descris cu aceeași bază și înălțime. Dar cercul cel mic susține greutatea acestei coloane, adică, o greutate care este mai mare decît greutatea canalului sau a părții a treia a cilindrului.

COROLARUL 8. Greutatea apei pe care o susține cercul foarte mic PQ , pare a fi mai mică decît greutatea a două treimi din cilindrul apei a cărei bază este acel cerc mic și înălțimea HG . Căci menținînd cele presupuse, să ne închipuim descrisă jumătatea sferoidului a cărui bază este acel cerc mic și semi-axa sau înălțimea HG . Și această figură va fi egală cu două treimi ale aceluși cilindru și va cuprinde coloana de apă înghețată PHQ a cărei greutate o susține cercul mic. Căci pentru ca mișcarea apei să fie mai directă, suprafața externă a coloanei va concura cu baza PQ într-un unghi puțin ascuțit, fiindcă apa căzînd incontinuu este accelerată și din cauza accelerării

devine mai îngustă; și cum acel unghi este mai mic decît unul drept, această coloană la părțile ei inferioare va fi situată în interiorul jumătății sferoidului. Iar în partea de sus ea va fi ascuțită sau cu un vîrf, ca nu cumva mișcarea orizontală a apei spre vîrf sferoidului să fie infinit mai rapidă decît mișcarea ei spre orizont. Și cu cît este mai mic cercul PQ , cu atît va fi mai ascuțit vîrf sferoidului; și cercul cel mic descrescînd la infinit, unghiul PHQ va scădea la infinit, și de aceea coloana va fi situată în interiorul jumătății sferoidului. Așadar această coloană este mai mică decît jumătatea sferoidului, sau decît două treimi din cilindrul a cărui bază este acel cerc mic și înălțimea GH . Dar cercul mic susține forța apei egală cu greutatea acestei coloane, în timp ce greutatea apei ambiante se folosește la curgerea ei.

COROLARUL 9. Greutatea apei pe care o susține cercul foarte mic PQ , este egală cu greutatea cilindrului de apă a cărui bază este acel cerc mic și înălțimea aproximativ $\frac{1}{2} GH$. Căci această greutate este media aritmetică între greutatea conului și a jumătății sferoidului menționat. Dar dacă cercul acela nu este foarte mic, ci se mărește pînă ce egalează orificiul EF ; acesta va susține greutatea apei întregi ce apasă perpendicular pe el, adică, greutatea cilindrului apei a cărui bază este acel cerc și înălțimea este GH .

COROLARUL 10. Și (după cît judec) greutatea pe care o susține cercul cel mic este totdeauna către greutatea cilindrului de apă, a cărui bază este cercul acela și înălțimea este $\frac{1}{2} GH$, precum EF^2 către $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$, sau aproximativ precum cercul EF către surplusul cercului acestuia față de jumătatea cercului PQ .

LEMA IV

Rezistența cilindrului care înaintează în mod uniform de-a lungul lungimii sale, nu se schimbă dacă lungimea lui crește sau descrește, și deci este aceeași cu rezistența cercului descris cu același diametru și care înaintează cu aceeași viteză după o linie dreaptă perpendiculară pe planul său.

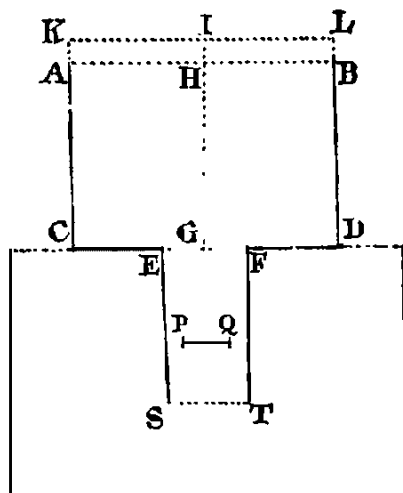
Căci laturile cilindrului se opun foarte puțin mișcării lui: și cilindrul, micșorîndu-se lungimea lui la infinit, devine un cerc.

PROPOZIȚIA XXXVII. TEOREMA XXIX

Rezistența unui cilindru, care înaintează în mod uniform în direcția lungimii sale, într-un fluid comprimat infinit și neelasic, rezistența produsă de mărirea secțiunii transversale, este către forța prin care întreaga lui mișcare poate fi nimicită sau generată, în timp ce descrie cvadruplul lungimii sale, precum densitatea mediului către densitatea cilindrului aproximativ.

Căci dacă vasul $ABDC$ atinge cu fundul său CD suprafața apei stătătoare, și apa curge din acest vas prin canalul cilindric $EFTS$ perpendicular pe orizont în apa stătătoare, iar cercul cel mic PQ se plasează paralel cu orizontul undeva în mijlocul canalului; și se prelungește CA în K , încît AK să fie către CK precum pătratul raportului pe care-l are surplusul orificiului

canalului EF față de cercul cel mic PQ către cercul AB : este evident (potrivit cazului 5, cazului 6 și corolarului 1, propoziția XXXVI) că viteza apei ce trece prin spațiul inelar dintre cercul cel mic și laturile vasului, va fi aceea



pe care o poate câștiga apa căzînd și descriind în căderea sa înălțimea KC sau IG . Și (potrivit corolarului X, propoziția XXXVI) dacă lățimea vasului este infinită, astfel că linioara HI să dispară și înălțimea IG , HG să devină egale: forța apei curgătoare în cercul cel mic va fi către greutatea cilindrului a cărui bază este cercul mic și înălțimea $\frac{1}{2}IG$, precum aproximativ EF^2 către $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$. Căci forța apei, ce curge cu o mișcare uniformă prin canalul întreg, va fi aceeași în cercul cel mic PQ în oricare parte a canalului ar fi situat. Căci să închidem acum orificiile EF , ST ale canalului, și cercul cel mic să se urce în fluidul comprimat din toate părțile și în urcarea sa să silească apa superioară să

coboare prin spațiul inelar dintre cercul cel mic și laturile canalului: și viteza cercului cel mic ascendent va fi către viteza apei descendente precum diferența cercurilor EF și PQ către cercul PQ , și viteza cercului ascendent către suma vitezelor, adică, către viteza relativă a apei descendente cu care trece pe lângă cercul cel mic ascendent, precum diferența cercurilor EF și PQ către cercul EF , sau precum $EF^2 - PQ^2$ către EF^2 . Fie viteza relativă egală cu viteza, cu care am arătat mai sus că trece apa prin spațiul inelar pînă ce cercul cel mic rămîne nemișcat, adică, cu viteza pe care o poate câștiga apa căzînd și descriind în căderea sa înălțimea IG ; și forța apei în cercul cel mic ascendent va fi aceeași ca mai sus (potrivit corolarului V), adică rezistența cercului cel mic ascendent va fi către greutatea cilindrului de apă a cărui bază este cercul cel mic și înălțimea este $\frac{1}{2}IG$, precum EF^2 către $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$. Dar viteza cercului mic va fi către viteza pe care o câștigă apa căzînd și descriind în căderea sa înălțimea IG , precum $EF^2 - PQ^2$ către EF^2 .

Să presupunem că amplitudinea canalului crește la infinit: și rapoartele dintre $EF^2 - PQ^2$ și EF^2 , și dintre EF^2 și $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, vor deveni în cele din urmă rapoarte de egalitate. Și de aceea viteza cercului mic va fi aceea pe care apa o poate câștiga căzînd și descriind în căderea sa înălțimea IG , iar rezistența lui va deveni egală cu greutatea cilindrului a cărui bază este cercul cel mic și înălțimea jumătatea înălțimii IG , de la care trebuie să cadă cilindrul pentru ca să câștige viteza cercului mic ascendent; și cu această viteză cilindrul, în timpul căderii, va descrie cvadruplul lungimii sale. Dar rezistența cilindrului, ce progresează cu această viteză de-a lungul lungimii sale, este aceeași cu rezistența cercului mic (potrivit lemei IV) și deci este egală aproximativ cu forța cu care mișcarea lui, în timp ce descrie cvadruplul lungimii sale, poate fi generată.

Dacă lungimea cilindrului se mărește sau se micșorează: mișcarea lui, ca și timpul în care descrie cvadruplul lungimii sale, se vor mări sau micșora în același raport; și deci forța, cu care mișcarea mărită sau micșorată într-un

timp de asemenea mărit sau micșorat, poate fi generată sau nimicită, nu se va schimba; și de aceea și acum este egală cu rezistența cilindrului, căci și aceasta rămîne neschimbată, potrivit lemei IV.

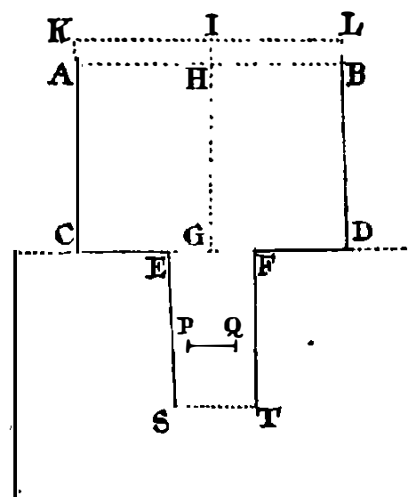
Dacă densitatea cilindrului se mărește sau se micșorează: mișcarea lui ca și forța prin care mișcarea poate fi produsă sau anulată în același timp se va mări sau micșora în același raport. Așadar rezistența unui cilindru oarecare va fi către forța cu care întreaga lui mișcare poate fi produsă sau anulată, în timp ce descrie cvadruplul lungimii sale, precum densitatea mediului către densitatea cilindrului aproximativ. Q.E.D.

Dar fluidul trebuie comprimat ca să fie continuu, apoi trebuie să fie continuu și neelasic pentru ca toată presiunea, care se naște din comprimarea lui, să se propage instantaneu; și acționînd în toate părțile corpului în mod egal să nu schimbe rezistența.

Presiunea care se naște din mișcarea corpului, se folosește la producerea mișcării părților fluidului și creează rezistența. Iar presiunea care se naște din compresiunea fluidului, oricît ar fi de intensă, dacă se propagă instantaneu, nu dă naștere nici unei mișcări în părțile fluidului continuu, nici nu produce nici o variație a mișcării: și deci nici nu mărește nici nu micșorează rezistența. Desigur acțiunea fluidului, care se naște din compresiunea lui, nu poate fi mai intensă în părțile posterioare ale corpului mișcat decît în părțile lui anterioare și deci nu poate diminua rezistența descrisă în această propoziție: și nu va fi mai intensă în părțile anterioare decît în cele posterioare, dacă propagarea ei este infinit mai rapidă decît mișcarea corpului apăsător. Dar va fi infinit mai rapid și se va propaga instantaneu, dacă fluidul este continuu și neelasic.

COROLARUL 1. Rezistențele cilindrilor, care înaintează în mod uniform în direcția lungimilor lor în medii continue înfinite, sînt într-un raport care se compune din raportul pătratului vitezelor și raportul pătratului diametrelor și din raportul densității mediilor.

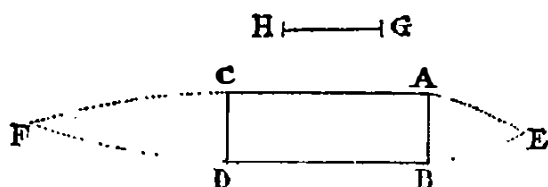
COROLARUL 2. Dacă amplitudinea canalului nu crește la infinit, ci cilindrul înaintează în direcția lungimii sale într-un mediu închis în repaus și axa lui coincide tot timpul cu axa canalului: rezistența lui va fi către forța cu care poate fi produsă sau anulată întreaga lui mișcare, în timpul în care el descrie cvadruplul lungimii sale, după un raport care se compune din raportul simplu al lui EF^2 către $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, din raportul dublu al lui EF^2 către $EF^2 - PQ^2$, și din raportul densității mediului către densitatea cilindrului.



COROLARUL 3. Presupunînd aceleași, și că lungimea L este către cvadruplul lungimii cilindrului într-un raport care se compune din raportul simplu al lui $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ către EF^2 , și din dublul raportului lui $EF^2 - PQ^2$ către EF^2 , rezistența cilindrului va fi către forța cu care poate fi anulată sau produsă întreaga lui mișcare, în timp ce descrie lungimea L , precum densitatea mediului către densitatea cilindrului.

S C O L I E

În această propoziție am studiat rezistența născută numai din mărimea secțiunii transversale a cilindrului, neglijând partea rezistenței ce poate proveni din oblicitatea mișcărilor. Căci după cum în primul caz al propoziției XXXVI oblicitatea mișcărilor, cu care părțile apei din vas convergeau din toate părțile în orificiul EF , a împiedicat curgerea apei prin orificiu: tot astfel în această propoziție, oblicitatea mișcărilor, cu care părțile apei presate



de extremitatea anterioară a cilindrului, cedează presiunii și diverg în toate părțile, întârzie trecerea lor prin locuri situate în jurul extremității aceleia spre părțile posterioare ale cilindrului, și face ca fluidul să se miște la o distanță

mai mare și să mărească rezistența, și aceasta aproape în raportul în care descrește scurgerea apei din vas, adică, aproape în pătratul raportului lui 25 către 21. Și după cum, în primul caz al acelei propoziții, am făcut ca părțile apei să treacă perpendicular prin orificiul EF și în cea mai mare cantitate, presupunând că toată apa din vas care era înghețată în jurul cataractei, și a cărei mișcare era oblică și inutilă, rămîne fără mișcare: astfel în această propoziție, ca să anulăm oblicitatea mișcărilor, și părțile apei cedându-i cu mișcarea cea mai directă și mai scurtă să lase trecerea cea mai liberă cilindrului și să rămînă numai rezistența, care se naște din mărimea secțiunii transversale, și care nu se poate micșora decît micșorînd diametrul cilindrului, trebuie să presupunem că părțile fluidului, ale cărui mișcări sînt oblice și inutile și crează o rezistență, sînt în repaus între ele la ambele extremități ale cilindrului, și sînt coerente și se unesc la cilindru. Fie $ABCD$ un dreptunghi, și fie AE și BE două arce parabolice descrise cu axa AB , și cu parametrul care este către spațiul HG , descris de cilindru în cădere pînă ce își cîștigă viteza, precum HG către $\frac{1}{2}AB$. Fie de asemenea CF și DF alte două arce parabolice, descrise cu axa CD și cu parametrul care este cvadruplul parametrului precedent; prin învîrtirea figurii în jurul axei EF , se naște solidul a cărui parte mijlocie $ABDC$ este cilindrul de care vorbim și părțile extreme ABE și CDF conțin părțile fluidului în repaus între ele, formînd două corpuri rigide, care aderă la cilindru din toate părțile cum ar fi capul și coada. Și rezistența solidului $EACFDB$, ce înaintează de-a lungul lungimii axei sale FE înspre E , va fi aproximativ aceea pe care am descris-o în această propoziție, adică avînd raportul către forța cu care întreaga mișcare a cilindrului poate fi sau anulată sau produsă, în timp ce lungimea $4AC$ este descrisă cu mișcarea continuată în mod uniform, pe care-l are aproximativ densitatea fluidului către densitatea cilindrului. Și față de această forță rezistența nu poate fi mai mică decît în raportul lui 2 la 3, potrivit corolarului 7 al propoziției XXXVI.

L E M A V

Dacă un cilindru, o sferă și un sferoid, ale căror lățimi sînt egale, sînt situate succesiv în mijlocul canalului cilindric astfel încît axele lor să coincidă cu axa canalului: aceste corpuri vor împiedica în mod egal curgerea apei prin canal.

Căci spațiile dintre canal și cilindru, sferă și sferoid prin care trece apa, sînt egale, și apa prin spații egale trece în mod egal.

Acestea au loc astfel din ipoteza că toată apa deasupra cilindrului, sferei sau sferoidului, a cărei fluiditate nu joacă nici un rol la trecerea foarte rapidă a apei, este înghețată, după cum am explicat în corolarul VII, propoziția XXXVI.

LEMA VI

Fiind presupuse aceleași, corpurile menționate sînt acționate în mod egal de apa ce curge prin canal.

Aceasta este evident din lema V și legea III a mișcării. Căci apa și corpurile se acționează între ele în mod egal.

LEMA VII

Dacă apa este în repaus în canal, și aceste corpuri sînt duse prin canal în părți contrarii cu viteze egale: rezistențele lor reciproce vor fi egale.

Aceasta apare din lema de mai sus, căci mișcările relative rămîn aceleași între ele.

SCOLIE

Același este cazul tuturor corpurilor convexe și rotunde, ale căror axe coincid cu axa canalului. O diferență oarecare se poate produce dintr-o frecare mai mare sau mai mică; dar în aceste leme presupunem că corpurile sînt foarte netede, și tenacitatea și frecarea mediului sînt nule și că părțile fluidului, care prin mișcările lor oblice și superflue pot perturba, împiedica și întârzia fluxul apei prin canal, sînt în repaus între ele ca și cînd ar fi fixate prin înghețare și aderă la corpuri la părțile lor anterioare și posterioare, după cum am spus în scolia propoziției precedente. Căci în cele ce urmează este vorba de rezistența cea mai mică dintre toate pe care o pot întâmpina corpurile rotunde, descrise cu secțiunile transversale maxime.

Corpurile ce înoată în fluide, cînd se mișcă în direcție, fac ca fluidul la partea anterioară să se urce, la cea posterioară să se coboare, îndeosebi dacă figurile sînt obtuze; și de aceea întâmpină o rezistență ceva mai mare decît dacă la capăt și la coadă ar fi ascuțite. Și corpurile mișcate în fluide elastice, dacă sînt obtuze înainte și înapoi, condensează fluidul cu ceva mai mult la partea anterioară și îl relaxează cu ceva mai mult la cea posterioară; și de aceea întâmpină o rezistență cu ceva mai mare decît dacă ar fi ascuțite la capăt și la coadă. Dar noi în aceste leme și propoziții nu tratăm despre fluidele elastice, ci despre cele neelastice; nu despre cele ce plutesc pe fluid, ci despre cele cufundate adînc. Și dacă se cunoaște rezistența corpurilor în fluide neelastice, această rezistență trebuie întrucîtva mărită atît în fluidele elastice, cum este aerul, cît și pe suprafețele fluidelor stătătoare, cum sînt mările și bălțile.

PROPOZIȚIA XXXVIII. TEOREMA XXX

Rezistența unei sfere ce înaintează în mod uniform într-un fluid comprimat infinit și neelastic, este către forța cu care întreaga lui mișcare poate fi anulată sau produsă, în timp ce descrie opt treimi din diametrul său, aproximativ precum densitatea fluidului către densitatea sferei.

Căci sfera este către cilindrul circumscris precum doi către trei, și de aceea forța, care poate anula întreaga mișcare a cilindrului în timp ce cilindrul descrie lungimea a patru diametre, anulează toată mișcarea sferei în timp ce sfera descrie două treimi din această lungime, adică, opt treimi din diametrul propriu. Dar rezistența cilindrului este către această forță aproximativ precum densitatea fluidului către densitatea cilindrului sau a sferei potrivit propoziției XXXVII și rezistența sferei este egală cu rezistența cilindrului potrivit lemelor V, VI, VII. Q.E.D.

COROLARUL 1. Rezistențele sferelor, în medii comprimate infinite, sînt într-un raport ce se compune din pătratul raportului vitezei, și pătratul raportului diametrului, și raportul densității mediilor.

COROLARUL 2. Viteza maximă cu care o sferă poate coborî într-un fluid rezistent sub acțiunea greutății sale comparative este aceea pe care o poate cîștiga sfera, căzînd cu aceeași greutate, fără rezistență și în căderea sa descriind un spațiu care este către patru treimi din diametrul său precum densitatea sferei către densitatea fluidului. Căci sfera în timpul căderii sale, cu viteza cîștigată în cădere, va descrie un spațiu care va fi către opt treimi din diametrul său, precum densitatea sferei către densitatea fluidului; și forța greutății ce produce această mișcare, va fi către forța care poate produce aceeași mișcare, în timp ce sfera descrie opt treimi din diametrul său cu aceeași viteză, precum densitatea fluidului către densitatea sferei: și deci potrivit acestei propoziții, forța greutății va fi egală cu forța rezistenței, și de aceea nu poate accelera sfera.

COROLARUL 3. Fiind dată atît densitatea sferei cît și viteza ei la începutul mișcării, precum și densitatea fluidului comprimat în repaus în care se mișcă sfera, se dă în fiecare moment și viteza sferei și rezistența ei și spațiul descris de ea, potrivit corolarului 7, propoziția XXXV.

COROLARUL 4. O sferă mișcîndu-se într-un fluid comprimat în repaus de aceeași densitate cu el, va pierde jumătate din mișcarea sa înainte de a fi descris lungimea a două din diametrele sale, potrivit aceluiași corolar 7.

PROPOZIȚIA XXXIX. TEOREMA XXXI

Rezistența unei sfere ce înaintează printr-un fluid închis într-un canal cilindric și comprimat în mod uniform, este către forța, prin care întreaga ei mișcare, poate fi sau produsă sau anulată în timp ce descrie opt treimi din diametrul său, într-un raport ce se compune din raportul orificiului canalului către excesul acestui orificiu față de jumătatea cercului maxim al sferei, și din pătratul raportului orificiului canalului către excesul acestui orificiu față de cercul maxim al sferei, și din aproximativ raportul densității fluidului către densitatea sferei.

Aceasta apare evident din corolarul 2, propoziția XXXVII căci demonstrația se face la fel ca în propoziția precedentă.

ȘCOLIE

În ultimele două propoziții (ca și în lema V) presupun că îngheață toată apa care precedă sfera și a cărei fluiditate mărește rezistența sferei. Dacă toată apa aceea se lichefiază, rezistența va crește întrucîtva. Dar creșterea în aceste proporții va fi mică și se poate neglija, deoarece suprafața convexă a sferei va face aproape întreg serviciul gheții.

PROPOZIȚIA XL. PROBLEMA IX

Să aflăm prin experiență rezistența unei sfere, ce înaintează într-un mediu comprimat perfect fluid.

Fie A greutatea sferei din vid, B greutatea ei într-un mediu rezistent, D diametrul sferei, F spațiul care este către $\frac{4}{3} D$ precum densitatea sferei către densitatea mediului, adică, precum A către $A-B$, G timpul în care sfera de greutatea B căzînd fără rezistență descrie spațiul F , și H viteza pe care o cîștigă această sferă în căderea sa. Și H va fi viteza maximă cu care sfera, poate descinde într-un mediu rezistent, sub influența greutateii sale B , potrivit corolarului 2, propoziția XXXVIII, și rezistența, pe care o întîlnește sfera ce coboară cu acea viteză, va fi egală cu greutatea ei B : iar rezistența, pe care o întîlnește avînd o altă viteză oarecare, va fi către greutatea B , ca pătratul raportului acestei viteze către viteza maximă H , potrivit corolarului 1, propoziția XXXVIII.

Aceasta este rezistența ce provine din inerția materiei fluide. Iar aceea care se naște din elasticitate, tenacitate, și frecarea părților ei, se va afla astfel.

Să lăsăm sfera să cadă în fluid prin greutatea sa; și fie P timpul căderii, și anume în secunde dacă timpul G se dă în secunde. Să aflăm numărul absolut N al cărui logaritm este $0.4342944819 \frac{2P}{G}$, și fie L logaritmul numărului $\frac{N+1}{N}$: și viteza obținută căzînd va fi $\frac{N-1}{N+1} H$, iar înălțimea descrisă va fi $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611 F + 4,605170186 LF$. Dacă fluidul este destul de adînc, se poate neglija termenul $4.605170186 FL$; și $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611 F$ va fi aproape înălțimea descrisă. Acestea sînt evidente din propoziția IX a Cărții a II-a și corolarele ei, în ipoteza că sfera nu întîlnește altă rezistență decît aceea care provine din inerția materiei. Iar dacă ea întîlnește afară de aceea o altă rezistență, coborîrea va fi mai înceată, și din întîrziere se cunoaște mărimea acestei rezistențe.

Pentru a cunoaște mai ușor viteza și coborîrea unui corp ce cade într-un fluid, am compus tabloul următor, în care coloana întîii denotă timpurile de coborîre, a doua arată vitezele cîștigate în cădere, viteza maximă fiind 100 000 000, a treia indică spațiile descrise în acele timpuri în cădere, $2F$ fiind spațiul pe care-l descrie corpul în timpul G cu viteza maximă, și a patra

ne dă spațiile descrise în aceleași timpuri cu viteza maximă. Numerele din coloana a patra sînt $\frac{2P}{G}$, și scăzînd numărul 1,3862944—4,6051702 L , aflăm numerele din coloana a treia, și trebuie să înmulțim aceste numere cu spațiul F ca să avem spațiile descrise în cădere. Pe lîngă acestea, s-a mai adăugat coloana a cincea care cuprinde spațiile descrise în aceleași timpuri, de un corp ce cade în vid, sub acțiunea greutateii sale comparative B .

Timpurile P	Vitezele corpului ce cade în vid	Spațiile descrise căzînd în fluid	Spațiile descrise cu mișcarea maximă	Spațiile descrise în căderea în vid
0,001 G	99999 $\frac{29}{30}$	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,0099834 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,0397361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,0886815 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,1559070 F	0,8 F	0,16 F
0,5 G	46211716	0,2402290 F	1,0 F	0,25 F
0,6 G	53704957	0,3402706 F	1,2 F	0,36 F
0,7 G	60436778	0,4545405 F	1,4 F	0,49 F
0,8 G	66403677	0,5815071 F	1,6 F	0,64 F
0,9 G	71629787	0,7196609 F	1,8 F	0,81 F
1 G	76159416	0,8675617 F	2 F	1 F
2 G	96402758	2,6500055 F	4 F	4 F
3 G	99505475	4,6186570 F	6 F	9 F
4 G	99932930	6,6143765 F	8 F	16 F
5 G	99990920	8,6137964 F	10 F	25 F
6 G	99998771	10,6137179 F	12 F	36 F
7 G	99999834	12,6137073 F	14 F	49 F
8 G	99999980	14,6137059 F	16 F	64 F
9 G	99999997	16,6137057 F	18 F	81 F
10 G	99999999	18,6137056 F	20 F	100 F

SCOLIE

Ca să aflu rezistențele fluidelor prin experiențe, am pregătit un vas pătratic de lemn, avînd lungimea și lățimea internă de nouă degete de picior londonez, adîncimea de nouă picioare și jumătate, și l-am umplut cu apă de ploaie; și făcînd sfere de ceară și cu plumb înăuntru, am notat timpurile de coborîre a sferelor, înălțimea coborîrîi fiind de 112 degete de picioare. Un picior solid cubic londonez conține 76 funți romani de apă de ploaie, și un deget cubic al acestui picior conține $\frac{19}{36}$ uncii ale acestui funt sau $253\frac{1}{3}$ grăunțe; și o sferă de apă descrisă cu un diametru de un deget cîntărește 132,645 grăunțe în aer sau 132,8 grăunțe în vid; și o altă sferă oarecare este precum excesul greutateii ei în vid față de greutatea ei în apă.

EXPERIENȚA 1. O sferă, a cărei greutate era de $156\frac{1}{4}$ grăunțe în aer și 77 grăunțe în apă, a descris toată înălțimea de 112 degete în timp de patru secunde. Și repetînd experiența, sfera din nou a căzut în același timp de patru secunde.

Greutatea sferei în vid este de $156\frac{13}{38}$ grăunțe și surplusul acestei greutatei asupra greutateii sferei în apă este de $79\frac{13}{38}$ grăunțe. De unde rezultă diametrul sferei de 0,84224 degete. Dar după cum excesul acela către greutatea sferei în

vid, tot așa densitatea apei către densitatea sferei, și tot așa opt treimi din diametrul sferei (adică 2,24597 degete) către spațiul $2F$, care va fi deci 4,4256 degete. O sferă căzînd în timpul unei secunde în vid, sub acțiunea greutății sale întregi de $156\frac{13}{38}$ grăunțe, va descrie $193\frac{1}{3}$ degete; și căzînd în apă fără rezistență cu greutatea de 77 grăunțe, în același timp, va descrie 95,219 degete; și în timpul G , care este către o secundă precum rădăcina pătrată a raportului spațiului F sau 2,2128 degete către 95,219 degete va descrie 2,2128 degete și va obține viteza maximă H , cu care poate descinde în apă. Prin urmare timpul G este $0",15244$. Și în acest timp G , cu viteza maximă H , sfera va descrie spațiul $2F$ de 4,4256 degete; și deci în timp de 4 secunde va descrie spațiul de 116,1245 degete. Să scădem spațiul $1,3862944 F$ sau 3,0676 degete și va rămîne spațiul de 113,0569 degete, pe care sfera căzînd în apă într-un vas foarte larg, îl va descrie în patru secunde. Acest spațiu, din cauza îngustimii vasului de lemn menționat, trebuie să se micșoreze după un raport care se compune din rădăcina pătrată a raportului orificiului vasului către excesul acestui orificiu față de semicercul maxim al sferei și din raportul simplu al aceluiasi orificiu către excesul lui asupra cercului maxim al sferei, adică în raportul de 1 la 0,9914. Ceea ce fiind făcut, vom avea spațiul de 112,08 degete, pe care sfera căzînd în apă în acest vas de lemn a trebuit să-l descrie aproximativ în timp de patru secunde conform teoriei. Dar în experiență a descris 112 degete.

EXPERIENȚA 2. Trei sfere egale, ale căror greutate separate erau de $76\frac{1}{3}$ grăunțe în aer și $5\frac{1}{16}$ grăunțe în apă, erau lăsate să cadă succesiv; și fiecare a căzut în apă în timp de cincisprezece secunde, descriind în cădere înălțimea de 112 degete.

Făcînd calculul se obține greutatea sferei în vid $76\frac{5}{12}$ grăunțe, excesul acestei greutăți față de greutatea în apă $71\frac{17}{48}$ grăunțe, diametrul sferei 0,81296 degete, opt treimi din acest diametru 2,16789 degete, spațiul $2F$ de 2,3217 degete, spațiul pe care o sferă de greutate $5\frac{1}{16}$ grăunțe căzînd în timp de $1'$ fără rezistență va descrie 12,808 degete și timpul G de $0',301056$. Așadar sfera, cu viteza maximă cu care poate coborî în apă sub acțiunea greutății de $5\frac{1}{16}$ grăunțe, în timpul $0',301056$ va descrie spațiul 2,3217 degete și în timpul de $15'$ spațiul de 115,678 degete. Să scădem spațiul $1,3862944 F$ sau 1,609 degete și va rămîne spațiul 114,069 degete pe care deci sfera trebuie să-l descrie în același timp căzînd într-un vas foarte lat. Din cauza îngustimii vasului nostru trebuie scăzut aproximativ spațiul de 0,895 degete. Și astfel va rămîne spațiul de 113,174 degete pe care sfera căzînd în vasul acesta, conform teoriei ar fi trebuit să-l descrie aproximativ în timpul de $15'$. Dar în experiență a descris 112 degete. Diferența este insensibilă.

EXPERIENȚA 3. Trei sfere egale, ale căror greutate separate erau de 121 grăunțe în aer și 1 grăunțe în apă, erau lăsate să cadă succesiv; și cădeau în apă în timpurile $46''$, $47''$ și $50''$, descriind o înălțime de 112 degete.

Conform teoriei aceste sfere ar fi trebuit să cadă aproximativ în timp de $40''$. Faptul că au căzut mai încet trebuie atribuit, fie proporției mai

mici a rezistenței, care se naște din forța de inerție în mișcările întârziate, către rezistența ce provine din alte cauze; sau îndeosebi unor bule aderente sferei, sau răririi cerii provocată de căldură sau a aerului sau a mînei ce lasă să cadă sfera, sau erorilor insensibile în cîntărirea sferei în apă, nu sînt sigur. Și deci greutatea sferei în apă trebuie să fie de mai multe grăunțe, pentru ca experiența să fie sigură și demnă de încredere.

EXPERIENȚA 4. Am început experiențele descrise pînă aici, pentru a studia rezistențele fluidelor, înainte de a fi cunoscut teoria expusă în propozițiile imediat precedente. Mai tîrziu, pentru a examina teoria aflată, mi-am pregătit un vas de lemn avînd lățimea interioară de $8\frac{2}{3}$ degete, adîncimea de cincisprezece picioare și o treime. Apoi am făcut patru sfere de ceară avînd plumb înăuntru, fiecare de cîte o greutate de $139\frac{1}{4}$ grăunțe în aer și $7\frac{1}{8}$ grăunțe în apă. Și le-am lăsat libere ca să măsoar timpurile de cădere, în apă cu ajutorul pendulului, oscilînd la o jumătate de secundă. Sferele, în momentul cînd se cîntăreau și apoi cînd cădeau, erau reci și rămîneau cîtva timp reci; deoarece căldura rarefiază ceara, și prin rarefiere micșorează greutatea sferei în apă, și ceara rarefiată nu revine prin răcire la densitatea de mai înainte. Înainte de a cădea se cufundau complet în apă; ca nu cumva prin greutatea unei părți oarecare ce ieșea afară din apă coborîrea lor la început să se accelereze. Și cînd cufundate complet erau în repaus, se lăsau să cadă cu cea mai mare precauție, ca nu cumva să capete vreun impuls din partea mîinii ce le dă drumul. Dar au căzut succesiv în timpurile de $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 și 51 oscilații, descriind înălțimea de cincisprezece picioare și două degete. Dar timpul era cu ceva mai rece decît atunci cînd am cîntărit sferele și deci am repetat experiența în altă zi, și sferele au căzut în timpurile de 49, $49\frac{1}{2}$, 50 și 53 oscilații și a treia oară în timpurile de $49\frac{1}{2}$, 50, 51 și 53 oscilații. Și făcînd experiența mai des, sferele au căzut în cea mai mare parte în timpurile de $49\frac{1}{2}$ și 50 oscilații. Cînd cădeau mai încet, bănuiesc că ele au fost întârziate din cauza atingerii de pereții vasului.

Făcînd acum calculul prin teorie, se obține pentru greutatea sferei în vid $139\frac{2}{5}$ grăunțe. Excesul acestei greutăți față de greutatea sferei în apă $132\frac{11}{40}$ grăunțe. Diametrul sferei 0,99868 degete. Opt treimi din diametru 2,66315 degete. Spațiul $2F$ de 2,8066 degete. Spațiul pe care sfera de greutate $7\frac{1}{8}$ grăunțe îl descrie căzînd fără rezistență, în timp de o secundă, 9,88164 degete. Și timpul G de $0^s,376843$. Așadar sfera, cu viteza maximă cu care poate coborî în apă cu forța greutății de $7\frac{1}{8}$ grăunțe, în timpul $0^s,376843$ descrie spațiul de 2,8066 degete, și în timp de 1^s spațiul de 7,44766 degete, și în timp de 25^s sau în 50 de oscilații spațiul de 186,1915 degete. Să scădem spațiul 1,386294 F sau 1,9454 degete și va rămîne spațiul 184,2461 degete pe care sfera îl va descrie în același timp într-un vas foarte lat. Din cauza îngustimii vasului nostru, să micșorăm acest spațiu într-un raport care se compune din rădăcina pătrată a raportului orificiului vasului către excesul acestui orificiu față de semicercul maxim al sferei, și din raportul

simplu al aceleiași orificiu față de excesul lui față de cercul maxim al sferei; și vom avea spațiul de 181,86 degete, pe care conform teoriei a trebuit să-l descrie sfera în acest vas în timp de aproximativ 50 oscilații. În experiență însă a descris spațiul de 182 degete în timp de $49\frac{1}{2}$ sau 50 de oscilații.

EXPERIENȚA 5. Lăsînd să cadă de mai multe ori patru sfere de greutate de $154\frac{3}{8}$ grăunțe în aer și $21\frac{1}{2}$ grăunțe în apă, ele cădeau în timp de $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ și 30 de oscilații, și uneori de 31, 32 și 33, descriind înălțimea de cincisprezece picioare și două degete.

Teoretic trebuiau să cadă în timp de aproximativ 29 de oscilații.

EXPERIENȚA 6. Lăsînd de mai multe ori să cadă cinci sfere de greutatea $212\frac{3}{8}$ grăunțe în aer și $79\frac{1}{2}$ în apă, ele cădeau în timp de 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 și 18 oscilații, descriind înălțimea de cincisprezece picioare și două degete.

Potrivit teoriei trebuia să cadă aproximativ în timp de 15 oscilații.

EXPERIENȚA 7. Lăsat să cadă de mai multe ori patru sfere de greutatea $293\frac{3}{8}$ grăunțe în aer și $35\frac{7}{8}$ grăunțe în apă, cădeau în timp de $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 și 33 oscilații, descriind înălțimea de cincisprezece picioare și un deget și jumătate.

Teoretic trebuiau să cadă în timp de 28 de oscilații aproximativ.

Cercetînd cauza pentru ce dintre sferele, de aceeași greutate, unele cădeau mai repede altele mai încet, am aflat următoarele: că sferele, cînd mai întîi erau lăsate libere și începeau să cadă, oscilau în jurul centrelor, coborînd mai întîi partea care era mai grea și dînd naștere la o mișcare oscilatorie. Prin oscilațiile sale sfera comunică apei o mișcare mai mare, decît dacă ar coborî fără oscilații; și comunicînd, pierde partea mișcării proprii cu care ar trebui să cadă, și din cauza oscilației mai mari sau mai mici, este întîrziată mai mult sau mai puțin. Fiindcă sfera totdeauna se îndepărtează de partea sa care descinde prin oscilații, și îndepărtîndu-se se apropie de pereții vasului și adeseori se ciocnește de pereți. Și această oscilație la sferele mai grele este mai intensă și la cele mai mari agită apa mai mult. Deci, pentru a face oscilația sferelor mai mică, am construit sfere noi din ceară și plumb, înfișînd plumbul într-o parte oarecare a sferei aproape de suprafața ei; și am lăsat sfera liberă astfel, ca partea mai grea, întrucît s-a putut, să fie mai mică la începutul căderii. Astfel oscilațiile făcute sînt cu mult mai mici decît mai înainte, și sferele au căzut în timpuri mai puțin neegale, întocmai ca în experiențele următoare.

EXPERIENȚA 8. Lăsînd de mai multe ori să cadă patru sfere avînd greutatea de 139 grăunțe în aer și $6\frac{1}{2}$ în apă, ele au căzut în timpuri de oscilații nu mai multe ca 52, nu mai puține ca 50, și cea mai mare parte în timp de aproape 51 de oscilații, descriind înălțimea de 182 degete.

Teoretic trebuiau să cadă în timp de aproape 52 de oscilații.

EXPERIENȚA 9. Lăsînd în repetate rînduri să cadă patru sfere, avînd greutatea de $273\frac{1}{4}$ grăunțe în aer și $140\frac{3}{4}$ în apă, ele au căzut în timpuri de nu mai puțin de 12 oscilații, nu mai multe de 13, descriind înălțimea de 182 degete.

Teoretic aceste sfere trebuiau să cadă aproximativ în timp de $11\frac{1}{3}$ oscilații.

EXPERIENȚA 10. Lăsînd să cadă de mai multe ori patru sfere, avînd greutatea de 384 grăunțe în aer și $119\frac{1}{2}$ în apă, ele au căzut în timpurile de $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ și 19 oscilații, descriind înălțimea de $181\frac{1}{2}$ degete. Și cînd cădeau în timp de 19 oscilații, uneori auzeam ciocnirea lor de laturile vasului înainte de a fi ajuns la fund.

Conform teoriei trebuia să cadă în timp de aproximativ $15\frac{5}{9}$ oscilații.

EXPERIENȚA 11. Lăsînd de mai multe ori să cadă trei sfere egale, avînd o greutate de 48 grăunțe în aer și $3\frac{29}{32}$ în apă, ele au căzut în timpurile de oscilații $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 și 46, și de cele mai multe ori în 44 și 45, descriind înălțimea de aproximativ $182\frac{1}{2}$ degete.

Potrivit teoriei ele trebuia să cadă în timp de aproximativ $46\frac{5}{9}$ oscilații.

EXPERIENȚA 12. Lăsînd să cadă de cîteva ori, trei sfere egale, avînd o greutate de 141 grăunțe în aer și $4\frac{3}{8}$ în apă, ele au căzut în timpurile de 61, 62, 63, 64 și 65 oscilații, descriind înălțimea de 182 degete.

Iar în mod teoretic ar fi trebuit să cadă aproximativ în timp de $64\frac{1}{2}$ oscilații.

Din această experiență este evident că, atunci cînd sferele cădeau tîrziu, ca în experiența 2, 4, 5, 8, 11 și 12 timpurile de cădere sînt obținute corect prin teorie: iar cînd sferele cădeau mai repede, ca în experiența a șasea, a noua și a zecea, rezistența era cu ceva mai mare decît în raportul pătratului vitezei. Căci sferele oscilează întrucîtva în timpul căderii; și această oscilație în sferele mai ușoare și care cad mai încet, din cauza slăbiciunii mișcării încetează repede; pe cînd în cele mai grele și mai mari, din cauza intensității mișcării durează mai mult timp, și abia după mai multe oscilații poate fi oprită de apa ambiantă. Fiindcă sferele, cu cît sînt mai repezi, cu atît sînt mai puțin împinse de fluid la părțile lor posterioare; și dacă viteza se mărește neconținut, în cele din urmă ele vor lăsa la spate un spațiu vid, dacă nu cumva în același timp crește compresiunea fluidului. Dar compresiunea fluidului trebuie să crească (potrivit propozițiilor XXXII și XXXIII) în raportul pătratului vitezei, pentru ca rezistența să fie în același raport pătratic. Deoarece aceasta nu are loc, sferele mai rapide sînt împinse cu ceva mai puțin de la spate, și în lipsa acestei presiuni, rezistența lor este ceva mai mare decît în raportul pătratului vitezei.

Așadar teoria coincide cu fenomenele corpurilor ce cad în apă, mai rămîne să examinăm fenomenele celor ce cad în aer.

EXPERIENȚA 13. Din vîrful catedralei Sf. Paul din orașul Londra, în luna iunie 1710 au fost lăsate să cadă simultan două sfere de sticlă, una plină cu mercur, cealaltă cu aer; și căzînd au descris înălțimea de 220 picioare londoneze. O tablă de lemn era atîrnată la unul din capetele ei cu ajutorul unor țîțini de fier, iar celălalt se sprijinea pe o bară de lemn; și cele două sfere așezate pe această tablă se lăsau să cadă deodată, trăgînd bara cu

ajutorul unei sîrme de fier ce ajungea pînă la pămînt astfel că tabla susținută numai de țîțînile de fier se învîrtea în jurul lor, și în același timp pendulul oscilînd într-o secundă, tras de sîrma aceea de fier era lăsat liber și începea să oscileze. În tabela următoare se arată diametrele și greutateile sferelor și timpurile de cădere.

Sferele pline cu mercur			Sferele pline cu apă		
Greutăți	Diametre	Timpurile de cădere	Greutăți	Diametre	Timpurile de cădere
grăunțe	degete	secunde	grăunțe	degete	secunde
908	0,8	4	510	5,1	$8\frac{1}{2}$
983	0,8	4—	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	$8\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	$8\frac{1}{2}$
784	0,75	4+	641	5,2	8

De altfel timpurile observate trebuie corectate. Căci sferele de mercur (potrivit teoriei lui Galileu) vor descrie în patru secunde 257 picioare londoneze, și 220 picioare numai în $3''42'''$. Deci trăgînd bara, tabla de lemn se învîrtea mai încet decît trebuia, și prin învîrtirea sa întîrziată împiedica coborîrea sferelor la început. Căci sferele erau situate aproape de mijlocul tablei și erau cu ceva mai aproape de axa ei decît de bară. Și deci timpurile de cădere erau prelungite aproape cu 18 terțe, și astfel trebuie corectate scăzînd acele terțe, îndeosebi pentru sferele mai mari care apăsau pe tabla roditoare mai mult timp din cauza mărimii diametrelor. Ceea ce fiind făcut, timpurile în care cădeau cele șase sfere mai mari, deveneau $8''12'''$, $7''42'''$, $7''42'''$, $7''57'''$, $8''12'''$ și $7''42'''$.

Așadar a cincea dintre sferele pline cu aer, construită cu un diametru de cinci degete avînd greutatea de 483 grăunțe, a căzut în timp de $8''12'''$, descriind înălțimea de 220 picioare. Greutatea unui volum de apă egal cu această sferă este de 16600 grăunțe; și greutatea unui volum de aer egal cu ea este $\frac{16600}{860}$ grăunțe sau $19\frac{3}{10}$ grăunțe și deci greutatea sferei în vid este de $502\frac{3}{10}$ grăunțe și această greutate este către greutatea volumului de aer egal cu sfera, precum $502\frac{3}{10}$ către $19\frac{3}{10}$, și astfel sînt $2F$ către opt treimi din diametrul sferei, adică, către $13\frac{1}{3}$ degete. De unde spațiul $2F$ devine 28 picioare 11 degete. Sfera căzînd în vid cu întreaga sa greutate de $502\frac{3}{10}$ grăunțe, în timp de o secundă descrie $193\frac{1}{3}$ degete, ca mai sus, și cu greutatea de 483 grăunțe descrie 185,905 degete, și cu aceeași greutate de 483 grăunțe în vid de asemenea descrie spațiul F sau 14 picioare $5\frac{1}{2}$ degete în timpul de $57''58'''$ și cîștigă viteza maximă cu care poate cădea în aer. Cu această viteză sfera, în timp de $8''12'''$, va descrie un spațiu de 245 picioare, și $5\frac{1}{3}$ degete. Să scădem $1,3863 F$ sau 20 picioare $\frac{1}{2}$ degete și vor rămîne 225 picioare 5 degete. Așadar conform teoriei sfera a trebuit să

descrie acest spațiu căzînd în timp de 8"12". Iar în experiență a descris spațiul de 220 picioare. Diferența este insensibilă.

Aplicînd calcule asemănătoare și la sferile rămase pline cu aer, am compus tabela următoare:

Greutățile sferelor	Diametre	Timpurile de cădere de la înălțimea de 220 picioare		Spațiile ce trebuie descrise în mod teoretic		Excesul	
grăunțe	degete	secunde	terțe	picioare	degete	picioare	degete
510	5,1	8	12	226	11	6	11
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	37	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

EXPERIENȚA 14. În anul 1719, luna iulie, d-l Desaguliers a refăcut experiențele de acest fel, preparînd bășici de porc de formă sferică cu ajutorul unei sfere concave de lemn, care fiind umezite erau silite să umple cavitatea sferică umflîndu-se cu aer; și apoi fiind uscate erau scoase afară și lăsîndu-le să cadă din locul cel mai înalt al cupolei turnului aceluiași templu, anume de la înălțimea de 272 picioare; și în același moment lăsînd să cadă o sferă de plumb a cărei greutate era de aproximativ doi funți romani. Și în același timp unii stînd în partea cea mai de sus a templului, de unde erau lăsate să cadă sferile, notau timpurile întregi de cădere, și alții stînd pe pămînt notau diferența timpurilor dintre căderea sferei de plumb și căderea bășicii. Iar timpurile se măsurau cu pendule ce oscilau în jumătăți de secundă. Și unul dintre aceia care stăteau pe pămînt avea un orologiu cu spirală vibrînd de patru ori pe secundă; un altul avea o altă mașină abil construită cu un pendul care iarăși într-o secundă vibra de patru ori. Și o mașină asemănătoare avea unul dintre aceia care stăteau în vîrfurile templului. Și aceste instrumente erau astfel aranjate, ca mișcările lor să poată începe sau înceta după voie. Iar sfera de plumb cădea în timp de aproximativ patru secunde și un sfert. Și adăugînd acest timp la diferența de timp menționată, se obținea timpul întreg în care cădea bășica. Timpurile, în care au căzut cele cinci bășici mai întîi după căderea sferei de plumb, erau $14\frac{3}{4}$ ", $12\frac{3}{4}$ ", $14\frac{5}{8}$ ", $17\frac{3}{4}$ " și $16\frac{7}{8}$ " și a doua oară $14\frac{1}{2}$ ", $14\frac{1}{4}$ ", 14 ", 19 " și $16\frac{3}{4}$ ". Să adunăm $4\frac{1}{4}$ ", timpul în care a căzut sfera de plumb, și timpurile întregi în care au căzut cele cinci bășici, erau întîia dată 19 ", 17 ", $18\frac{7}{8}$ ", 22 ", și $21\frac{1}{8}$ ", și a doua oară, $18\frac{3}{4}$ ", $18\frac{1}{2}$ ", $18\frac{1}{4}$ ", $23\frac{1}{4}$ " și 21 ". Iar timpurile notate în vîrfurile templului, erau prima oară $19\frac{3}{8}$ ", $17\frac{1}{4}$ ", $18\frac{3}{4}$ ", $22\frac{1}{8}$ " și $21\frac{5}{8}$ " și a doua oară 19 ", $18\frac{5}{8}$ ", $18\frac{3}{8}$ ", 24 " și $21\frac{1}{4}$ ". De altfel bășicile nu totdeauna cădeau drept, ci uneori pluteau, și oscilau înapoi și încolo în timp ce cădeau. Și prin aceste mișcări timpurile de cădere erau prelungite și mărite uneori cu o jumătate de secundă, uneori cu o secundă întreagă. Iar mai drept au căzut bășica

a doua și a patra întâia dată; și prima și a treia a doua oară. Bășica a cincea era zbîrcită și din cauza zbîrcelilor sale uneori era întîrziată. Am dedus diametrele bășicilor din circumferințele lor măsurate cu un fir foarte subțire înfășurat de două ori. Și teorie am confruntat-o cu experiențele în tabela următoare, admițînd că densitatea aerului este către densitatea apei de ploaie ca 1 la 860, și calculînd spațiile pe care au trebuit să le descrie sferile în cădere conform teoriei.

Greutățile bășicilor	Diametre	Timpurile de cădere de la înălțimea de 172 picioare	Spațiile acelorași timpuri ce trebuie descrise potrivit teoriei		Diferența între teorie și experiență	
grăunțe	degete	secunde	picioare	degete	picioare	degete
128	5,28	19	271	11	— 0	1
156	5,19	17	272	$0\frac{1}{2}$	+ 0	$0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,4	$18\frac{1}{2}$	272	7	+ 0	7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277	4	+ 5	4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282	0	+ 10	0

Așadar rezistența sferelor ce se mișcă atît în aer cît și în apă aproape întreagă se exprimă prin teoria noastră în mod corect, și vitezele și mărimile sferelor fiind egale, este proporțională cu densitatea fluidelor.

În scolia, anexată secțiunii a șasea, am arătat prin experiențele pendulelor, că rezistențele sferelor egale și de viteze egale ce se mișcă în aer, în apă și în mercur sînt precum densitățile fluidelor. Același lucru îl arătăm aici mai precis prin experiențele corpurilor ce cad în aer și în apă. Căci pendulele în diversele oscilații produc în fluid o mișcare totdeauna contrară mișcării pendulului ce se reîntoarce, și rezistența ce se naște din această mișcare, precum și rezistența firului de care atîrnă pendulul, făceau rezistența întreagă a pendulului mai mare ca rezistența dedusă din experiențele corpurilor căzătoare. Căci prin experiențele pendulelor expuse în acea scolie, o sferă de aceeași densitate cu apa, descriind lungimea semidiametrului său în aer, ar trebui să piardă din mișcarea sa a $\frac{1}{3342}$ -a parte. Dar prin teoria expusă

în această a șaptea secțiune și confirmată prin experiențele corpurilor căzătoare, aceeași sferă descriind aceeași lungime, ar trebui să piardă numai $\frac{1}{4586}$ din mișcarea sa, admițînd că densitatea apei este către densitatea aerului ca 860 la 1. Deci rezistențele aflate prin experiențele pendulelor sînt mai mari (din cauzele descrise mai sus) decît experiențele sferelor căzătoare și anume aproape în raportul 4 la 3. Dar cum rezistențele pendulelor ce oscilează în aer, apă și mercur din cauze asemenea se măresc asemenea, proporția rezistențelor în aceste medii, atît prin experiențele pendulelor, cît și prin experiențele corpurilor în cădere, va fi exprimată destul de corect. Și de aici se poate conchide că rezistențele corpurilor ce se mișcă în fluide oarecare, foarte fluide, celelalte mărimi fiind egale, sînt precum densitățile fluidelor.

Acestea fiind astfel stabilite, se poate spune aproximativ ce parte a mișcării sale poate pierde într-un timp dat o sferă oarecare, aruncată într-un

fluid oarecare. Fie D diametrul sferei, și V viteza ei la începutul mișcării, și T timpul, în care sfera cu o viteză V va descrie în vid un spațiu, care să fie către spațiul $\frac{8}{3} D$ precum densitatea sferei către densitatea fluidului: și sfera aruncată în acel fluid, într-un alt timp oarecare t , va pierde partea $\frac{tV}{T+t}$ a vitezei sale, rămânând partea $\frac{TV}{T+t}$, și va descrie spațiul care este către spațiul descris în vid cu viteza uniformă V în același timp, precum logaritmul numărului $\frac{T+t}{T}$ înmulțit cu numărul 2,302585093 către numărul $\frac{t}{T}$ potrivit corolarului VII, propoziția XXXV. În mișcările încete rezistența poate fi cu ceva mai mică, fiindcă forma sferei este ceva mai potrivită cu mișcarea decât figura cilindrului descris cu același diametru. În mișcările repezi rezistența poate fi puțin mai mare, fiindcă elasticitatea și comprimarea fluidului, nu crește ca pătratul vitezei. Dar nu mă opresc asupra unor mărunțișuri de acest fel.

Și oricât s-ar subtiliza aerul, apa, mercurul și fluidele asemenea, prin diviziunea părților la infinit, și ar deveni medii infinit de fluide; totuși nu ar rezista mai puțin sferelor aruncate. Căci rezistența, de care este vorba în propozițiile precedente, se naște din inerția materiei; și inerția materiei este esențială pentru corpuri și totdeauna proporțională cu cantitatea de materie. Prin diviziunea părților fluidului, rezistența ce se naște din tenacitatea și frecarea părților ce este drept poate fi în adevăr diminuată: dar cantitatea de materie nu se micșorează prin diviziunea părților ei; și cantitatea de materie menținându-se se menține forța ei de inerție, cu care rezistență, de care se vorbește aici, totdeauna este proporțională. Ca această rezistență să se micșoreze, trebuie să se micșoreze cantitatea de materie în spațiile prin care se mișcă corpurile. Și de aceea spațiile cerești, prin care sferele planetelor și cometelor se mișcă neconținut în toate părțile foarte liber și fără vreo micșorare sensibilă a mișcării, sînt lipsite de orice fluid material, dacă exceptăm poate vaporii foarte rari și razele de lumină.

Proiectilele înaintînd în fluide dau naștere unei mișcări și această mișcare se naște din excesul presiunii fluidului la părțile anterioare ale proiectilului față de presiunea la părțile lui posterioare și nu poate fi mai mică în mediile infinit de fluide decât în aer, apă și mercur în proporția densității materiei fiecăreia. Dar acest exces de presiune, în proporția cantității sale, nu produce numai mișcare în fluid, ci acționează și asupra proiectilului întîrziindu-i mișcarea: și de aceea rezistența în orice fluid este precum mișcarea excitată în fluid de proiectil, și nici nu poate fi mai mică în eterul foarte subtil în proporție cu densitatea eterului decât în aer, apă și mercur în proporție cu densitatea acestor fluide.

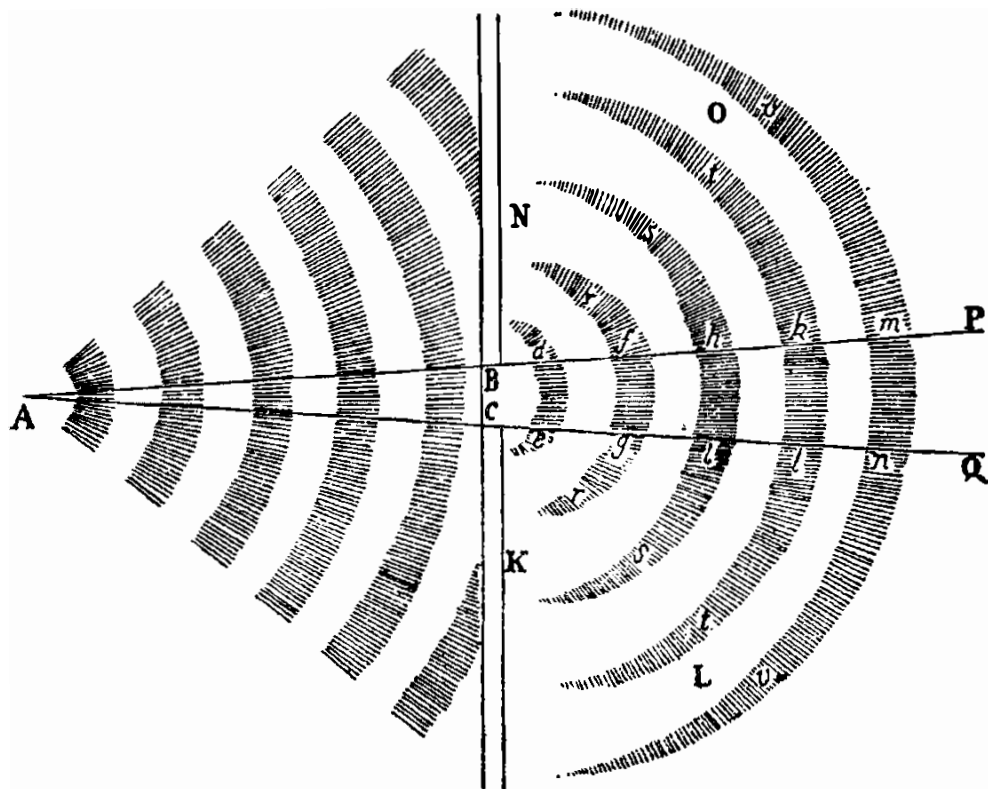
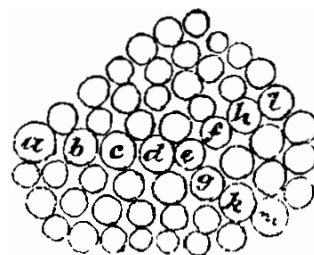
SECȚIUNEA VIII

Despre mișcarea propagată prin fluide

PROPOZIȚIA XLI. TEOREMA XXXII

Presiunea nu se propagă într-un fluid în linii drepte, decât dacă particulele fluidului sînt în linie dreaptă.

Dacă particulele a, b, c, d, e sînt situate în linie dreaptă, o presiune oarecare se poate propaga direct de la a la e ; dar particula e va acționa oblic particulele f și g situate oblic, și particulele f și g nu vor susține presiunea aplicată, decât dacă sînt susținute de particulele din urmă h și k ; iar întrucît sînt susținute, ele apasă asupra particulelor sprijinitoare; și acestea nu pot susține presiunea decât dacă sînt sprijinite de cele următoare l și m și le apasă, și așa mai departe la infinit. Prin urmare presiunea, care mai întîi se propagă asupra particulelor care nu sînt situate în aceeași direcție, va începe să devieze și se va propaga oblic la infinit; și după ce începe să se propage oblic, dacă întîlnește particule ulterioare, care nu sînt situate în aceeași direcție va devia din nou și aceasta de atîtea ori, de cîte ori va întîlni particule care nu sînt situate precis în aceeași direcție. Q.E.D.



care nu este împiedicată, va devia în spațiile dinapoia obstacolului. Ceea ce se poate demonstra și astfel.

Să presupunem că din punctul A se propagă o presiune în toate direcțiile, și aceasta dacă se poate după linii drepte, și că obstacolul $NBCK$

fiind găurit în BC , ea este împiedicată întreagă, afară de partea coniformă APQ , care trece prin deschiderea circulară BC . Prin planele transversale de , fg , hi să despărțim conul APQ în bucăți; și în timp ce conul ABC , propagând presiunea, va acționa partea conică ulterioară $degf$ pe suprafața de , și această bucată va acționa bucata proximală $fgih$ pe suprafața fg , și acea bucată va acționa bucata a treia, și așa mai departe la infinit; este evident (potrivit legii a treia a mișcării) că bucata întâia $degf$ prin reacțiunea bucății a doua $fgih$, atîta va acționa și apăsa asupra suprafeței fg , cît acționează și apasă bucata a doua. Așadar bucata $degf$ între conul Ade și bucata $fhig$ se comprimă din toate părțile, și de aceea (potrivit corolarului 6, propoziția XIX) nu-și poate păstra forma decît dacă este comprimată din toate părțile cu aceeași forță. Prin urmare cu aceeași forță cu care este apăsată pe suprafețele de, fg , va fi silită să cedeze pe laturile df, eg ; și acolo (cum nu este rigid, ci cu totul fluid) va curge și se va dilata, pînă ce dă de un fluid ambiant, care se opune acestei tendințe. De aceea prin tendința de curgere, va apăsa atît fluidul ambiant pe laturile df, eg , cît și bucata $fgih$ cu aceeași forță; și de aceea presiunea se va propaga nu mai puțin de la laturile df, eg în spațiile NO , KL înapoi și încolo, decît se propagă de la suprafața fg spre PQ . Q.E.D.

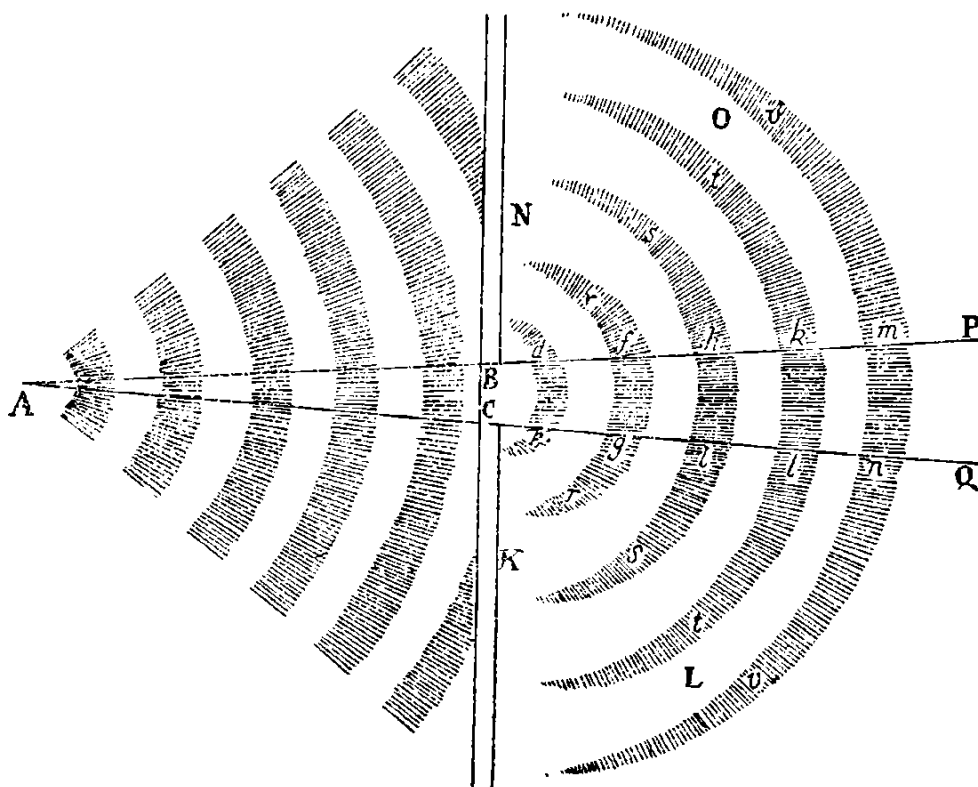
PROPOZIȚIA XLII. TEOREMA XXXIII

Orice mișcare ce se propagă într-un fluid diverge de la un drum drept în spațiile nemișcate.

CAZUL 1. Să presupunem că o mișcare se propagă din punctul A prin deschiderea BC , și înaintează, dacă se poate, în spațiul conic $BCQP$, în direcția liniilor drepte divergente de la punctul A . Și să presupunem mai întâi că mișcarea este aceea a undelor pe suprafața apei stătătoare. Și fie de, fg, hi, kl etc. părțile cele mai înalte ale diverselor unde, despărțite una de alta prin tot atîtea văi intermediare. Prin urmare, deoarece apa pe crestele undelor este situată mai sus decît în părțile nemișcate LK, NO ale fluidului, ea va curge din extremitățile c, g, i, l etc., d, f, h, k etc., ale creștelor înapoi și încolo spre KL și NO : și fiindcă în văile undelor este situată mai jos decît în părțile nemișcate LK, NO ale fluidului; ea va curge din părțile nemișcate înspre văile undelor. La primul reflux crestele undelor, la al doilea văile se dilată înapoi și încolo și se propagă spre KL și NO . Și fiindcă mișcarea undelor de la A spre PQ are loc printr-o curgere continuă a creștelor în văile vecine, și deci nu este mai rapidă ca în proporția vitezei coborîrii; și coborîrea apei de toate părțile spre KL și NO trebuie să aibă loc cu aceeași viteză; dilatarea undelor se va propaga din toate părțile spre KL și NO cu aceeași viteză cu care înaintează undele de la A spre PQ în linie dreaptă. Și deci întreg spațiul în toate sensurile spre KL și NO va fi ocupat de undele dilatate $rfgr, shis, tklt, vmnv$ etc. Q.E.D. Oricine poate afla făcînd experiența într-o apă stătătoare că acestea au loc astfel.

CAZUL 2. Să presupunem acum că de, fg, hi, kl, mn reprezintă impulsuri propagate din punctul A succesiv printr-un mediu elastic. Să ne închipuim că impulsurile se propagă prin condensări și răriri succesive ale mediului, astfel că partea cea mai densă a fiecărui impuls va ocupa o suprafață sferică

descrișă în jurul centrului A , și între impulsuri succesive se află intervale egale. Să presupunem însă că liniile de, fg, hi, kl etc. reprezintă părțile cele mai dense ale impulsurilor, propagate prin deschiderea BC . Și fiindcă mediul este acolo mai dens decît în spațiile de dinspre KL și NO , el se va dilata



atît spre spațiile KL, NO situate oriunde, cît și spre intervalele mai rari ale impulsurilor; și astfel ieșind totdeauna mai rar din regiunea intervalelor și mai dens din regiunea impulsurilor, va participa la mișcarea lor. Și fiindcă mișcarea progresivă a impulsurilor provine din relaxarea perpetuă a părților mai dense spre intervalele mai rari antecedente; și impulsurile trebuie să se relaxeze în toate sensurile aproape cu aceeași viteză în părțile în repaus KL, NO ale mediului; impulsurile se vor dilata aproape cu aceeași viteză în toate sensurile în spațiile nemișcate KL, NO , cu care se propagă direct din centrul A ; și deci vor ocupa spațiul întreg $KLOP$. Q.E.D. Aceasta o experimentăm cu sunetele, care se aud fie că se interpune un munte, fie că lăsate să intre în cameră pe fereastră se împrăștie în toate părțile camerei, și se aud în toate unghiurile, nu atît reflectate de pereții opuși, cît propagate direct de la fereastră, după cît putem judeca cu simțurile.

CAZUL 3. Să presupunem în sfîrșit că o mișcare de un fel oarecare se propagă din A prin deschiderea BC : și fiindcă această propagare nu are loc, decît dacă părțile mediului mai aproape de centrul A acționează și mișcă părțile ulterioare; și părțile acționate sînt fluide, și deci se îndepărtează în toate sensurile în regiunile unde sînt mai puțin apăsate: ele se îndepărtează în spre toate părțile în repaus ale mediului, atît laterale KL și NO , cît și anterioare PQ , și în acest fel orice mișcare, imediat ce a trecut prin deschiderea BC , va începe să se dilate și deci să se propage direct în toate sensurile ca de la un început și centru. Q.E.D.

PROPOZIȚIA XLIII. TEOREMA XXXIV

Orice corp vibrant într-un mediu elastic va propaga mișcarea impulsurilor în linie dreaptă în toate sensurile; iar într-un mediu neelastic va da naștere unei mișcări circulare.

CAZUL 1. Căci părțile corpului vibrant mergînd și revenind în mod alternativ, în mișcarea lor vor apăsa și împinge părțile mediului cele mai apropiate, și apăsîndu-le le vor comprima și condensa; apoi prin întoarcerea lor permit ca părțile comprimate să se îndepărteze și să se dilate. Prin urmare părțile mediului foarte apropiate de corpul vibrant vor merge și se vor întoarce alternativ la fel cu părțile corpului vibrant: și din același motiv pentru care părțile corpului agitau părțile mediului, cele agitate de vibrații analoge vor agita părțile lor cele mai apropiate, și cele agitate vor agita la fel pe cele ulterioare și așa mai departe la infinit. Și după cum primele părți ale mediului mergînd se condensează și revenind se dilată, astfel părțile rămase de cîte ori merg se vor condensa și de cîte ori se întorc se vor dilata. Și de aceea nu toate vor merge și se vor întoarce deodată (căci astfel păstrînd distanțe determinate între ele, nu se vor rarefia și condensa alternativ) ci apropiindu-se una de alta cînd se condensează, și îndepărtîndu-se cînd se rarefiază, unele din ele vor merge, în timp ce altele se întorc; și aceasta în mod alternativ la infinit. Dar părțile care merg și mergînd se condensează din cauza mișcării progresive, prin care înving obstacolele, sînt impulsuri; și de aceea impulsurile succesive se propagă în linie dreaptă de la orice corp vibrant; și anume la distanțe aproximativ egale unul de altul, din cauza intervalelor egale de timp în care un corp prin diversele sale vibrații excită impulsuri diverse. Și cu toate că părțile corpului vibrant merg și revin după o direcție oarecare sigură și determinată, totuși impulsurile propagate de acolo prin mediu se vor dilata spre laturi, conform propoziției precedente; și de la acel corp vibrant ca de la un centru comun, se vor propaga în toate direcțiile, după suprafețe aproape sferice și concentrice. Un astfel de exemplu îl avem în undele care dacă se produc oscilînd un deget, nu numai merg înapoi și încolo în direcția mișcării degetului, ci se propagă în toate sensurile sub formă de cercuri concentrice, înconjurînd neconținut degetul. Căci greutatea undelor înlocuiește forța elastică.

CAZUL 2. Căci dacă mediul nu este elastic: deoarece părțile lui nu pot fi condensate de presiunea părților vibrante ale corpului oscilant, mișcarea se va propaga instantaneu spre părțile în care mediul cedează foarte ușor, adică, spre părțile pe care corpul vibrant le lasă goale înapoi. Același este cazul unui corp aruncat într-un mediu oarecare. Mediul cedînd proiectilelor, nu se îndepărtează la infinit; ci mergînd în cerc, înaintează spre spații pe care le lasă corpul la spate. Așadar de cîte ori corpul vibrant înaintează într-o direcție oarecare, mediul cedînd va înainta în cerc spre părțile pe care le părăsește corpul; și de cîte ori corpul se întoarce la locul de mai înainte, mediul va fi împins de acolo și va reveni la locul său de mai înainte. Și cu toate că corpul vibrant nu este fix, ci flexibil în toate felurile, dacă totuși rămîne dat în mărime, fiindcă prin vibrațiile sale nu poate acționa mediul nicăieri, fără ca altundeva să-i cedeze simultan: va face ca mediul,

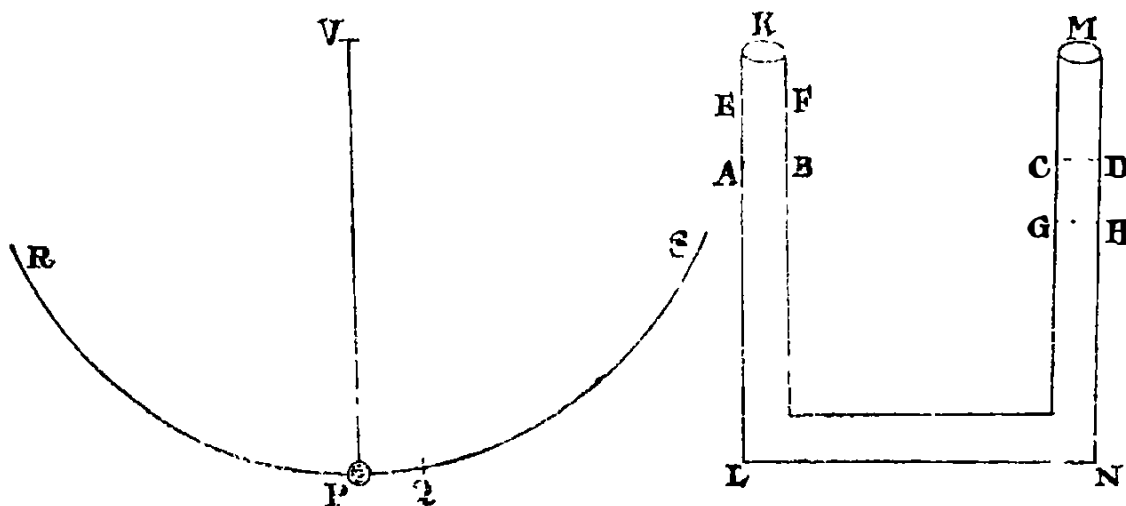
îndepărtându-se de părțile în care este apăsă, să meargă totdeauna pe orbită spre părțile care îi cedează. Q.E.D.

COROLAR. Așadar halucinează aceia care cred că agitația părților flăcării conduce la o presiune care se propagă în linie dreaptă prin mediul înconjurător. O astfel de presiune va trebui derivată nu numai de la agitația părților flăcării, ci de la dilatarea întregului.

PROPOZIȚIA XLIV. TEOREMA XXXV

Dacă apa se urcă și coboară alternativ în canalele brațelor ridicate KL, MN ; și se construiește un pendul a cărui lungime între punctul de suspensiune și centrul de oscilație este egal cu jumătatea lungimii apei din canal: zic că apa se va urca și coborî în aceleași timpuri în care oscilează pendulul.

Măsoară lungimea apei după axele canalului și ale brațelor, egalînd-o cu suma acestor axe; și nu țin seama aici de rezistența apei, care se naște din frecarea canalului. Să reprezentăm deci prin AB, CD înălțimea mijlocie a apei în ambele brațe; și cînd apa se urcă în brațul KL la înălțimea EF , se va coborî la înălțimea GH în brațul MN . Fie apoi P corpul pendular,



VP firul, V punctul de suspensiune, $RPQS$ cicloida pe care o va descrie pendulul, P punctul ei cel mai de jos, PQ arcul egal cu înălțimea AE . Forța, cu care mișcarea apei este alternativ accelerată și întîrziată, este excesul greutateii apei într-unul din brațe față de greutatea din celălalt, și deci cînd apa din brațul KL se urcă la EF , și în brațul celălalt se coboară la GH , forța este dublul greutateii apei $EABF$, și de aceea este către greutatea apei întregi precum AE sau PQ către VP sau PR . De asemenea forța, cu care greutatea P într-un loc oarecare Q este accelerată și întîrziată pe cicloidă (potrivit corolarului propoziției LI) este către greutatea ei întregă, precum distanța ei PQ de la locul cel mai de jos P , către lungimea PR a cicloidei. Din care cauză forțele motoare ale apei și pendulului, care descriu spațiile egale AE, PQ sînt precum greutateile ce trebuie mișcate; și deci, dacă apa și pendulul la început sînt în repaus, forțele le vor mișca în mod egal în timpuri egale și vor face să meargă și să se întoarcă simultan cu o mișcare reciprocă, Q.E.D.

COROLARUL 1. Prin urmare toate alternanțele ascendente și descendente ale apei, fie că mișcarea este mai intensă fie că este mai slabă, sînt izocrone.

COROLARUL 2. Dacă lungimea întregii ape din canal este de $6\frac{1}{9}$ picioare pariziene: apa va coborî în timp de o secundă și se va urca în timpul unei alte secunde; și așa mai departe alternativ la infinit. Căci un pendul de o lungime de $3\frac{1}{18}$ picioare oscilează în timp de o secundă.

COROLARUL 3. Dar mărinđ sau micșorînd lungimea apei, timpul mișcării reciproce crește sau descrește în raportul rădăcinii pătrate a lungimii.

PROPOZIȚIA XLV. TEOREMA XXXVI

Viteza undelor variază cu rădăcina pătrată a lățimilor.

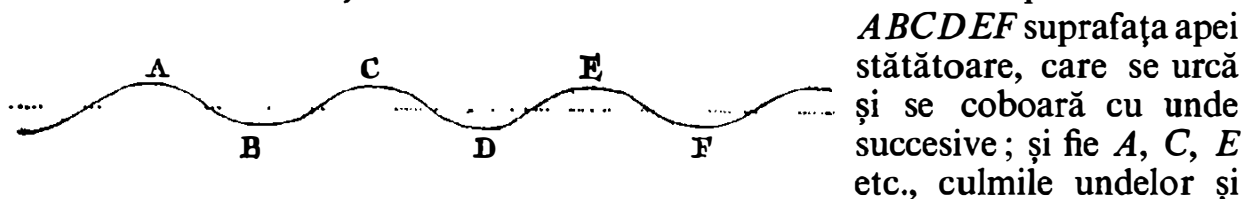
Aceasta rezultă din construcția propoziției ce urmează.

PROPOZIȚIA XLVI. PROBLEMA X

Să aflăm viteza undelor

Să construim un pendul a cărui lungime, între punctul de suspensiune și centrul de oscilație, este egal cu lățimea undelor: și în timpul în care pendulul execută diversele oscilații, undele avansînd vor parcurge aproape lățimea lor.

Numesc lățimea undelor măsura transversală care este situată sau între văile cele mai adînci, sau între culmile cele mai înalte. Să reprezentăm cu



B, D, F etc., văile intermediare. Și fiindcă mișcarea undelor se face prin urcarea și coborîrea succesivă a apei, astfel că părțile ei *A, C, E* etc., care, cînd sînt cele mai înalte, cînd devin cele mai joase; și forța motoare prin care părțile cele mai înalte coboară și cele mai joase se urcă, este greutatea apei ridicate; urcarea și coborîrea alternativă vor fi analoge cu mișcarea reciprocă a apei din canal, și cu aceleași legi ale timpului: și de aceea (potrivit propoziției XLIV) dacă distanțele dintre locurile cele mai înalte ale undelor *A, C, E* și cele mai joase *B, D, F* dintre unde sînt egale cu lungimea dublă a pendulului; părțile cele mai înalte *A, C, E*, în timpul unei oscilații devin cele mai joase și în timpul celeilalte oscilații iarăși se vor urca. Prin urmare timpul dintre trecerea diverselor unde va fi de două oscilații; adică, unda va descrie lățimea sa, în timp ce pendulul oscilează de două ori; dar în același timp pendulul a cărui lungime este cvadruplă, și deci egalează lățimea undelor, va oscila odată. Q.E.I.

COROLARUL 1. Așadar undele, care au lățimea de $3\frac{1}{18}$ picioare pariziene, înaintînd în timp de o secundă vor parcurge lățimea lor; și deci în timp de un minut vor parcurge $183\frac{1}{3}$ picioare și în interval de o oră aproape 11 000 de picioare.

COROLARUL 2. Și viteza undelor mai mari sau mai mici va crește sau va descrește în raportul rădăcinii pătrate a lățimii.

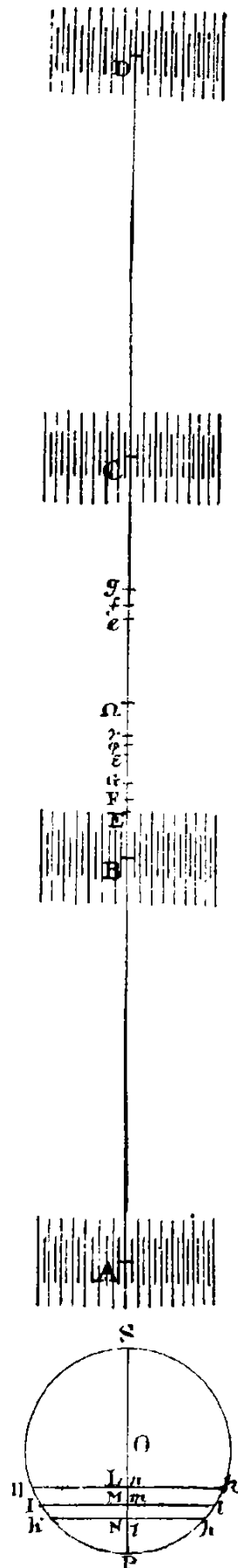
Acestea se întâmplă astfel în ipoteza că părțile apei se urcă sau se coboară în linie dreaptă; dar urcarea și coborîrea au loc în adevăr pe cerc și deci afirm că timpul în această propoziție este definit numai aproximativ.

PROPOZIȚIA XLVII. TEOREMA XXXVII

Propagându-se impulsuri printr-un fluid, diversele particule ale fluidului, mergînd și întorcîndu-se printr-o mișcare reciprocă foarte scurtă, se accelerează și se întîrzie totdeauna potrivit legii pendulului oscilant.

Să reprezentăm cu AB , BC , CD etc. distanțe egale ale impulsurilor succesive; ABC direcția mișcării impulsurilor propagate de la A spre B ; E, F, G trei puncte fizice ale mediului în repaus situate pe dreapta AC la distanțe egale unul de altul Ee, Ff, Gg spații egale foarte scurte în care acele puncte prin mișcare reciprocă merg și vin în diversele oscilații; $\varepsilon, \varphi, \gamma$ locuri oarecare intermediare ale acelorași puncte; și EF, FG linioare fizice sau părți liniare ale mediului situate între acele puncte, și transfere succesiv în locurile, $\varepsilon\varphi, \varphi\gamma$ și ef, fg . Să ducem dreapta PS egală cu dreapta Ee . Să o bisectăm în O , și din centrul O și cu intervalul OP să descriem cercul $SIPi$. Prin circumferința ei întreagă împreună cu părțile sale să exprimăm timpul întreg al unei vibrații cu părțile ei proporționale; astfel că într-un timp complet oarecare PH sau $PHSh$, dacă coborâm pe PS perpendiculara HL sau hl , și luăm $E\varepsilon$ egal cu PL sau Pl , punctul fizic E va fi reperat în ε . Un punct oarecare E , mergînd de la E prin ε la e , și de aici întorcîndu-se prin ε la E conform acestei legi, va executa diversele vibrații cu aceleași grade de accelerații și întârzieri ca pendulul oscilant. Trebuie să dovedim că diversele puncte fizice ale mediului trebuie să fie agitate cu o astfel de mișcare. Să ne închipuim deci că un mediu este excitat cu o astfel de mișcare dintr-o cauză oarecare. și să vedem ce urmează de aici.

Pe circumferința $PHSh$ să luăm arcele egale HI, IK sau hi, ik , avînd același raport către întreaga circumferință pe care îl au dreptele egale EF, FG , către intervalul întreg BC al impulsurilor. Și coborînd perpendicularele IM, KN sau im, kn ; deoarece punctele E, F, G sînt agitate succesiv prin mișcări asemenea, și efectuează vibrațiile lor întregi compuse din înaintare și venire pînă cînd impulsul se tran-



sferă de la B la C ; dacă PH sau $PHSh$ este timpul de la începutul mișcării punctului E , PI sau $PHSi$ va fi timpul de la începutul mișcării punctului F , și PK sau $PHSk$ timpul de la începutul mișcării punctului G ; și de aceea $E\varepsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ vor fi egale respectiv cu PL , PM , PN la înaintarea punctelor, sau cu Pl , Pm , Pn la întoarcerea punctelor. De unde $\varepsilon\gamma$ sau $EG + G\gamma - E\varepsilon$ la înaintarea punctelor va fi egal cu $EG - LN$, iar la întoarcere va fi egal cu $EG + ln$. Dar $\varepsilon\gamma$ este lățimea sau expansiunea părții EG în locul $\varepsilon\gamma$; și de aceea expansiunea părții, în înaintare este către expansiunea medie, precum $EG - LN$ către EG ; iar la întoarcere precum $EG + ln$ sau $EG + LN$ către EG . De aceea cum LN este către KH precum IM către raza OP , și KH către EG precum circumferința $PHShP$ către BC , adică, dacă punem V în locul razei cercului având circumferința egală cu intervalul impulsurilor BC , precum OP către V ; și prin egalitate LN către EG precum IM către V : expansiunea părții EG sau a punctului fizic F în locul $\varepsilon\gamma$ va fi către expansiunea medie, pe care o are partea aceea în primul său loc EG , precum $V - IM$ către V la înaintare, și precum $V + im$ către V la întoarcere. De unde forța elastică a punctului F în locul $\varepsilon\gamma$ este către forța ei elastică medie în locul EG , precum $\frac{1}{V-IM}$ către $\frac{1}{V}$ la înaintare, iar la întoarcere precum $\frac{1}{V+im}$ către $\frac{1}{V}$. Și prin același raționament forțele elastice ale punctelor fizice E și G la înaintare, sînt precum $\frac{1}{V-HL}$ și $\frac{1}{V-KN}$ către $\frac{1}{V}$; și diferența forțelor către forța elastică mijlocie a mediului, precum $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ către $\frac{1}{V}$. Adică precum $\frac{HL-KN}{VV}$ către $\frac{1}{V}$ sau precum $HL-KN$ către V , dacă (din cauza limitelor înguste de vibrații) presupunem că HL și KN sînt infinit mai mici decît cantitatea V . De aceea cum cantitatea V este dată, diferența forțelor este precum $HL-KN$, adică (deoarece $HL-KN$ este proporțional cu HK , și OM cu OI sau OP , și fiind date HK și OP) precum OM ; adică, dacă Ff se bisectează în Ω , precum $\Omega\varphi$. Și prin același raționament diferența forțelor elastice ale punctelor fizice ε și γ , la întoarcerea linioarei fizice $\varepsilon\gamma$ este precum $\Omega\varphi$. Dar diferența aceea (adică excesul forței elastice a punctului ε față de forța elastică a punctului γ) este forța cu care linioara fizică interpusă $\varepsilon\gamma$ a mediului se accelerează la înaintare și se întîrzie la întoarcere; și de aceea forța acceleratoare a linioarei fizice $\varepsilon\gamma$ este precum distanța ei de la locul mediu de vibrație Ω . De aceea timpul (potrivit propoziției XXXVIII, Cartea I) se exprimă corect prin arcul PI ; și partea liniară $\varepsilon\gamma$ a mediului se mișcă potrivit legii menționate, adică, potrivit legii pendulului oscilant: și la fel este cazul tuturor părților liniare din care se compune mediul întreg. Q.E.D.

COROLAR. De aici se vede că numărul impulsurilor propagate este același cu numărul vibrațiilor corpului vibrant, și nici nu se înmulțește în progresarea lor. Căci linioara fizică $\varepsilon\gamma$, imediat ce ajunge la primul său loc, va fi în repaus; și nici nu se va pune în mișcare, decît dacă va primi o nouă mișcare, fie de la impulsul corpului vibrant, fie de la forța impulsurilor ce se propagă de la corpul vibrant. Prin urmare imediat ce impulsul încetează de a se propaga de la corpul vibrant, ea se oprește.

PROPOZIȚIA XLVIII. TEOREMA XXXVIII

Vitezele impulsurilor propagate într-un fluid elastic sînt într-un raport compus din rădăcina pătrată a forței elastice și inversul rădăcinii pătrate a densității; dacă presupunem că forța elastică a fluidului este proporțională cu condensarea lui.

CAZUL 1. Dacă mediile sînt omogene, și distanțele impulsurilor în aceste medii sînt egale între ele, dar mișcarea într-un mediu este mai intensă: contractiile și dilatațiile părților analoge vor fi precum acele mișcări. Această propoziție nu este tocmai exactă. Totuși dacă contractiile și dilatațiile nu sînt foarte intense, eroare nu va fi sensibilă, și deci în mod fizic poate fi considerată corectă. Dar forțele elastice motoare sînt precum contractiile și dilatațiile; și vitezele părților egale născute simultan sînt precum forțele. Prin urmare părțile egale și corespunzătoare ale impulsurilor corespunzătoare efectuează deodată înaintările și întoarcerile lor prin spații proporționale cu contractiile și dilatațiile, cu viteze care sînt precum spațiile: și de aceea impulsurile, care în timpul unei înaintări și întoarceri înaintînd parcurg o lățime, și succed totdeauna în locurile impulsurilor imediat precedente, din cauza egalității distanțelor înaintează cu viteză egală în ambele medii.

CAZUL 2. Dacă distanțele sau lungimile impulsurilor sînt mai mari într-un mediu decît în altul; să presupunem că părțile corespunzătoare descriu spații proporționale cu lățimile impulsurilor, înaintînd și întorcîndu-se alternativ: și contractiile și dilatațiile lor vor fi egale. Și deci dacă mediile sînt omogene, vor fi egale și acele forțe elastice motoare prin care se agită cu mișcarea reciprocă. Dar materia care trebuie mișcată prin aceste forțe este precum lățimea impulsurilor; și în același raport este spațiul prin care mergînd și întorcîndu-se alternativ trebuie să se miște. Și timpul unei înaintări și venituri este într-un raport compus din rădăcina pătrată a materiei și rădăcina pătrată a spațiului, și deci precum spațiul. Dar impulsurile mergînd în timpurile unei înaintări și reveniri efectuează o lungime, adică parcurg spații proporționale cu timpurile; și de aceea sînt de viteze egale.

CAZUL 3. Așadar în medii de densitate și forță elastică egale, toate impulsurile sînt de viteze egale. Căci dacă mărim fie densitatea fie forța elastică a mediului, deoarece forța motoare crește în raport cu forța elastică, și materia ce trebuie mișcată va crește în raportul densității; timpul în care acele mișcări se efectuează ca mai înainte, va crește în raportul rădăcinii pătrate a densității, și va scădea în raportul rădăcinii pătrate a forței elastice. Și de aceea viteza impulsurilor va fi într-un raport compus din rădăcina pătrată a raportului invers al densității mediului și rădăcina pătrată a raportului direct al forței elastice. Q.E.D.

Această propoziție se va clarifica prin construcția celei ce urmează.

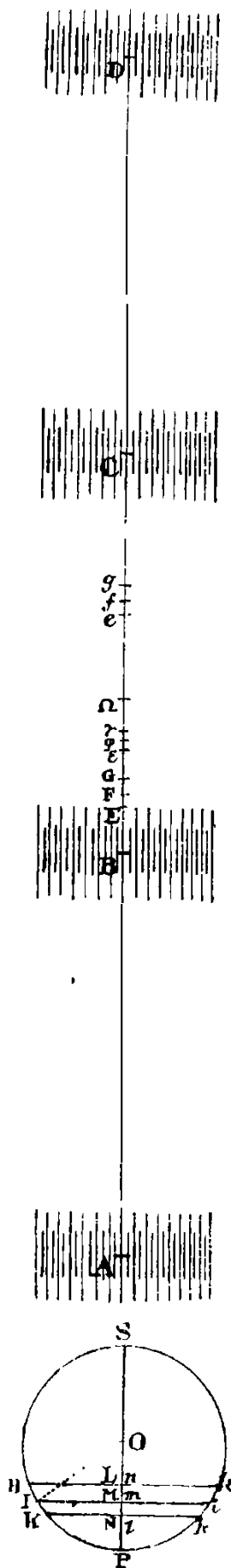
PROPOZIȚIA XLIX. PROBLEMA XI

Fiind dată densitatea și forța elastică a mediului, să aflăm viteza impulsurilor.

Să ne închipuim că mediul este comprimat de o greutate apăsătoare în felul aerului; și fie A înălțimea mediului omogen, a cărei greutate să egaleze greutatea apăsătoare, și a cărei densitate să fie aceeași cu densitatea me-

diului comprimat, în care se propagă impulsurile. Să ne închipuim construit un pendul, a cărui lungime între punctul de suspensiune și centrul de oscilație să fie A ; și în timpul, în care pendulul efectuează o oscilație întreagă compusă dintr-o înaintare și întoarcere, impulsul mergînd va parcurge un spațiu egal cu circumferința unui cerc descris cu raza A .

Căci păstrînd cele construite în propoziția XLVII, dacă o linie fizică oarecare EF , descriind în diversele vibrații spațiul PS , este acționată în locurile extreme P și S ale unei înaintări și întoarceri oarecare, de o forță elastică ce este egală cu greutatea ei; ea va executa diversele oscilații în timpul în care ea poate oscila pe o cicloidă, al cărei perimetru întreg este egal cu lungimea PS : aceasta fiindcă forțe egale vor împinge corpuscule egale prin spații egale în același timp. De aceea cum timpurile de oscilații sînt în raportul rădăcinii pătrate a lungimii pendulelor; și lungimea pendulului este egală cu jumătatea arcului cicloidei întregi, timpul de vibrație al unuia va fi către timpul de oscilație al pendulului, a cărui lungime este A , în raportul rădăcinii pătrate a lungimii $\frac{1}{2}PS$ sau PO către lungimea A . Dar forța elastică, cu care este acționată linioara fizică EG , cînd se află în locurile sale extreme P , S , era (în demonstrația propoziției XLVII) către forța ei elastică întreagă precum $HL - KN$ către V , adică (fiindcă punctul K coincide cu P) precum HK către V ; și forța întreagă adică greutatea apăsătoare, cu care este comprimată linioara EG , este către greutatea linioarei precum înălțimea A a greutateii apăsătoare către lungimea EG a linioarei; și deci prin egalitate, forța cu care este acționată linioara EG în locurile sale P și S , este către greutatea linioarei precum $HK \times A$ către $V \times EG$, sau precum $PO \times A$ către VV , căci HK era către EG , precum PO către V . De aceea cum timpurile, în care corpurile egale sînt împinse prin spații egale, sînt în raport invers cu rădăcina pătrată a forțelor, timpul unei vibrații sub acțiunea forței elastice, va fi către timpul unei vibrații, sub acțiunea forței greutateii, ca rădăcina pătrată a lui VV către $PO \times A$, și deci către timpul de oscilație al pendulului a cărui lungime este A precum rădăcina pătrată a raportului VV către $PO \times A$, și rădăcina pătrată a lui PO către A luate împreună; adică, în raportul întreg al lui V , către A . Dar în timpul unei vibrații compuse dintr-o înaintare și întoarcere, impulsul înaintînd parcurge lățimea sa BC . Prin urmare timpul, în care impulsul parcurge spațiul BC , este către timpul unei oscilații compuse dintr-o înaintare și întoarcere, precum V către A , adică, precum BC către circumferința cercului a cărui rază este A . Dar timpul, în care impulsul va parcurge spațiul BC , este către timpul în care va parcurge o lungime egală



cu această circumferință, în același raport și deci în timpul unei atari oscilații impulsul va parcurge o lungime egală cu această circumferință. Q. E. D.

COROLARUL 1. Viteza impulsurilor este aceea, pe care o câștigă corpurile grele, căzînd cu o mișcare uniform accelerată, și descriind în căderea lor jumătatea înălțimii A . Căci în timpul acestei căderi, cu viteza câștigată în cădere, impulsul va parcurge spațiul care va fi egal cu întreaga înălțime A ; și deci în timpul unei oscilații compuse dintr-o înaintare și o revenire va parcurge un spațiu egal cu circumferința unui cerc descris cu raza A : căci timpul căderii este către timpul de oscilație precum raza cercului către circumferința lui.

COROLARUL 2. De unde cum înălțimea A este precum forța elastică a fluidului și în raport invers cu densitatea lui; viteza impulsurilor va fi într-un raport compus din raportul invers al rădăcinii pătrate a densității și din raportul direct al rădăcinii pătrate a forței elastice.

PROPOZIȚIA I. PROBLEMA XII

Să aflăm distanțele impulsurilor.

Să aflăm numărul de vibrații într-un timp dat al unui corp, prin a cărui vibrație se produc impulsuri. Să împărțim cu acel număr spațiul pe care-l poate parcurge impulsul în același timp, și partea aflată va fi lățimea unui impuls. Q.E.D.

SCOLIE

Propozițiile ultime se referă la mișcarea luminii și a sunetelor. Căci cum lumina se propagă în linii drepte, nu poate consta într-o singură acțiune (potrivit propozițiilor XLI și XLII). Iar sunetele fiindcă sînt născute de corpurile vibratoare, nu sînt altceva decît impulsurile propagate ale aerului potrivit propoziției XLIII. Aceasta se confirmă prin vibrațiile pe care le produc în corpurile ce le stau în cale, dacă sînt intense și profunde, cum sînt sunetele tobelor. Căci vibrațiile mai repezi și mai scurte se produc mai greu. Dar este bine cunoscut că și orice fel de sunete, căzînd pe coarde unisone cu corpurile sonore, produc vibrații. Acest lucru se confirmă și prin viteza sunetelor. Căci cum greutatea specifică ale apei de ploaie și ale mercurului sînt între ele aproximativ ca 1 către $13\frac{2}{5}$, și cînd mercurul atinge în *barometru* înălțimea de 30 degete englezești, greutatea specifică a aerului și a apei de ploaie sînt între ele aproximativ precum 1 la 870: greutatea specifică ale aerului și mercurului vor fi precum 1 la 11 890. Așadar cum înălțimea mercurului este de 30 degete, înălțimea aerului uniform, a cărui greutate ar putea comprima aerul nostru situat jos, va fi de 356 700 degete, sau de 29 725 picioare engleze. Această înălțime este aceea pe care în construcția problemei de mai sus am numit-o A . Circumferința cercului descris cu raza de 29 725 picioare este de 186 768 picioare. Și cum, după cum se știe, un pendul lung de $39\frac{1}{5}$ degete face o oscilație compusă dintr-o înaintare și o

revenire în timp de două secunde: un pendul lung de 29 725 picioare sau 356 700 degete ar trebui să execute o oscilație analogă în $190\frac{3}{4}$ secunde. Așadar sunetul înaintînd în acel timp va parcurge 186 768 picioare, și deci în timpul unei secunde 979 picioare.

De altfel în acest calcul nu am luat în considerare grosimea particulelor solide ale aerului, prin care sunetul se propagă instantaneu. Cum greutatea aerului este către greutatea apei ca 1 către 870, și sărurile sînt aproape de două ori mai dense decît apa; dacă admitem că particulele de aer au aproape densitatea particulelor de apă sau de sare, și starea de rarefiere a aerului provine din intervalele particulelor: diametrul particulei de aer va fi către intervalul dintre centrele particulelor, precum aproape 1 către 9 sau 10, și către intervalul dintre particule precum 1 către 8 sau 9. Prin urmare la 979 picioare, pe care sunetul le face într-o secundă, după calculul de mai sus, putem adăuga $\frac{979}{9}$ picioare sau aproape 109, din cauza mărimii particulelor de aer: și astfel sunetul în timp de o secundă va parcurge aproximativ 1088 de picioare.

Mai adăugăm că vaporii, ascunși în aer, cum au altă elasticitate și alt ton abia participă la mișcarea aerului adevărat prin care se propagă sunetele. Dar aceștia fiind în repaus, mișcarea se va propaga mai repede numai prin aerul adevărat, și anume în raportul rădăcinii pătrate a materiei lipsă. Astfel dacă atmosfera constă din zece părți de aer adevărat și o parte vaporii, mișcarea sunetelor va fi mai rapidă precum rădăcina pătrată a raportului lui 11 către 10, sau în raportul aproape întreg al lui 21 către 20, decît dacă s-ar propaga prin unsprezece părți ale aerului adevărat: și deci mișcarea sunetului aflată mai sus va trebui mărită în acest raport. În aceste condiții sunetul, în timpul unei secunde, va parcurge 1142 picioare.

Acestea trebuie să se întîmple astfel în timp de primăvară și toamnă, cînd aerul din cauza căldurii temperate se rărește și forța lui elastică crește întrucîtva. În timp de iarnă însă, cînd aerul se condensează din cauza frigului, și forța lui elastică se micșorează, mișcarea sunetelor trebuie să fie mai înceată în raportul rădăcinii pătrate a densității; și la rîndul său în timp de vară trebuie să fie mai rapidă.

Se constată însă prin experiență că sunetele mergînd în timpul unei secunde înaintează cam 1142 picioare londoneze, sau 1070 picioare pariziene.

Cunoscînd viteza sunetelor se cunosc și intervalele impulsurilor. Căci d-l S a u v e u r a aflat, făcînd experiențe, că un tub deschis, a cărui lungime este de aproximativ cinci picioare pariziene emite un sunet de același ton cu sunetul unei coarde care în timpul unei secunde vibrează de o sută de ori. Prin urmare sînt aproximativ o sută de impulsuri în spațiul de 1070 picioare pariziene, pe care sunetul le parcurge în timp de o secundă; și deci un impuls ocupă un spațiu de aproape $10\frac{7}{10}$ picioare pariziene, adică, aproape dublul lungimii tubului. De unde este verosimil că lățimile impulsurilor în sunetele tuturor tuburilor deschise, sînt egale cu dublul lungimilor tuburilor.

Apoi din corolarul propoziției XLVII a acestei Cărți reiese pentru ce încetează sunetele imediat după încetarea mișcării corpului sonor, și nu se

aud mai mult timp cînd stăm mai departe de corpurile sonore, decît dacă sîntem mai aproape. Dar din principiile stabilite apare evidentă și cauza pentru ce se întăresc foarte mult sunetele în megafoane. Căci orice mișcare reciprocă se întărește la fiecare întoarcere de către cauza ce o produce. Iar în tuburi care împiedică dilatarea sunetelor, mișcarea se pierde mai tîrziu și se reflectează mai tare, și de aceea se mărește mai mult prin noua mișcare imprimată în diversele întoarceri. Și acestea sînt fenomenele mai importante ale sunetelor.

SECȚIUNEA IX

Despre mișcarea circulară a fluidelor

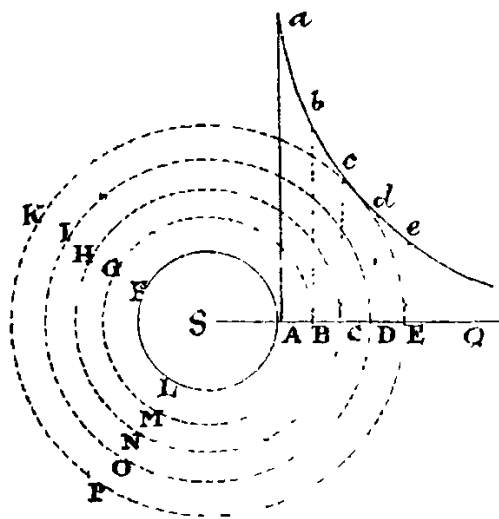
I P O T E Z Ă

Rezistența ce provine din lipsa de lubricitate a părților fluidului, celelalte mărimi fiind egale, este proporțională cu viteza prin care părțile fluidului se separă una de alta.

P R O P O Z I Ț I A L I . T E O R E M A X X X I X

Dacă un cilindru solid infinit de lung se rotește într-un fluid uniform și infinit în jurul unei axe de poziție dată cu o mișcare uniformă, și fluidul este dus pe orbită numai prin impulsul acestuia, însă fiecare parte a fluidului perseverează în mod uniform în mișcarea sa; zic că timpurile periodice ale părților fluidului sînt precum distanțele lor de la axa cilindrului.

Fie *AFL* cilindrul dus pe o orbită în mod uniform în jurul axei *S*, și prin cercurile concentrice *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP* etc., să împărțim fluidul în orbite cilindrice nenumărate concentrice solide de aceeași grosime. Și fiindcă fluidul este omogen, acțiunile reciproce ale orbitelor vecine vor fi (prin ipoteză) precum translațiile lor reciproce, și suprafețele vecine în care au loc acțiunile. Dacă acțiunea pe o orbită oarecare este mai mare sau mai



mică de partea concavă decît de partea convexă, va prevala acțiunea mai intensă, și sau va accelera sau va întîrzia mișcarea orbitei, după cum este dirijată în aceeași regiune cu mișcarea sau într-una contrară. Deci pentru ca fiecare orbită să persevereze în mișcarea sa uniformă, trebuie ca acțiunile din ambele părți să fie egale și să aibă loc în regiuni contrarii. De unde cum acțiunile sînt precum suprafețele vecine și translațiile lor reciproce, translațiile vor fi în raport invers cu suprafețele, adică, în raport invers cu distanțele suprafețelor de la axă. Dar diferențele mișcărilor unghiulare în jurul axei sînt precum aceste translații aplicate la

distanțe, sau în raportul translațiilor și în raport invers cu distanțele, adică, unind rapoartele, în raport invers cu pătratele distanțelor. De aceea dacă la diversele părți ale dreptei infinite *SABCDEQ* se ridică perpendicularele *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee* etc., invers proporționale cu pătratele lungimilor *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* etc., și prin capetele perpendicularelor ne închipuim dusă o linie curbă hiperbolică; sumele diferențelor, adică mișcările întregi unghiulare, vor fi precum sumele corespunzătoare ale liniilor *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, adică, dacă pentru a constitui un mediu fluid uniform, mărim numărul orbitelor și scădem lățimea la infinit, precum ariile hiperbolice *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*,

DdQ , EeQ etc., analoge cu aceste sume. Și timpurile invers proporționale cu mișcările unghiulare, vor fi de asemenea invers proporționale cu aceste arii. Prin urmare timpul periodic al unei particule oarecare D este în raport invers cu aria DdQ , adică (din cauza cvadraturilor cunoscute ale curbelor) precum distanța SD . Q.E.D.

COROLARUL 1. De aici mișcările unghiulare ale particulelor fluidului sînt în raport invers cu distanțele lor de la axa cilindrului, și vitezele absolute sînt egale.

COROLARUL 2. Dacă un fluid este conținut într-un vas cilindric de lungime infinită, și conține un alt cilindru interior, și ambii cilindri se rotesc în jurul unei axe comune, și timpurile de revoluție sînt precum semidiamele lor, și fiecare parte a fluidului perseverează în mișcarea sa: timpurile periodice ale diverselor părți vor fi precum distanțele lor de la axa cilindrului.

COROLARUL 3. Dacă cilindrului și fluidului într-o astfel de mișcare li se adună sau li se scade o mișcare unghiulară comună oarecare; deoarece prin această mișcare nouă nu se schimbă frecarea mutuală a părților fluidului, mișcările părților nu se vor schimba între ele. Căci translațiile părților între ele depind de frecare. Orice parte va persevera în acea mișcare care, prin frecarea efectuată de ambele părți în direcții contrare, nu este mai mult accelerată decît întîrziată.

COROLARUL 4. De unde dacă din întregul sistem al cilindrului și fluidului se scade întreaga mișcare unghiulară a cilindrului exterior, vom avea mișcarea fluidului în cilindrul în repaus.

COROLARUL 5. Așadar dacă fluidul și cilindrul exterior fiind în repaus, cilindru se rotește în mod uniform: mișcarea circulară se va comunica fluidului, și încetul cu încetul se va propaga prin fluidul întreg; și nici nu va înceta să crească mai înainte ca diversele părți ale fluidului să obțină mișcarea definitivă prin corolarul al patrulea.

COROLARUL 6. Și fiindcă fluidul tinde să propage mișcarea sa mai departe, prin impulsul acestuia se antrenează și cilindrul exterior dacă nu este violent reținut; și mișcarea lui se va accelera pînă ce timpurile periodice ale ambilor cilindri vor fi egale între ele. Căci dacă cilindrul exterior este reținut în mod violent, el va tinde să întîrzie mișcarea fluidului; și dacă cilindrul interior păstrează mișcarea prin mijlocirea unei forțe oarecare imprimată dinafară, va face ca ea încetul cu încetul să înceteze.

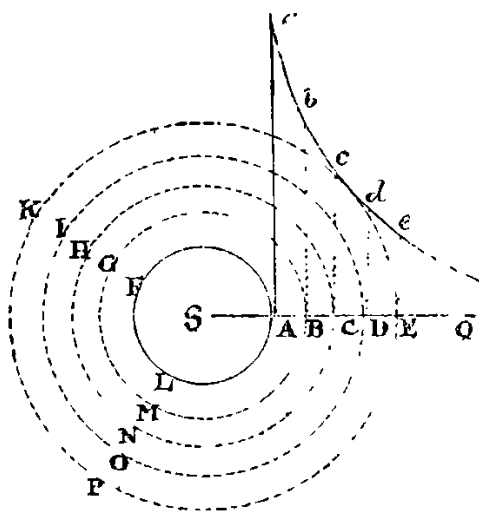
Toate acestea pot fi experimentate într-o apă adîncă stătătoare.

PROPOZIȚIA LII. TEOREMA XL

Dacă o sferă solidă, într-un fluid uniform și infinit, se rotește în jurul unei axe de poziție dată cu o mișcare uniformă, și fluidul este purtat pe orbită numai prin impulsul acesteia; și fiecare parte a fluidului perseverează în mod uniform în mișcarea sa: zic că timpurile periodice ale părților fluidului vor fi precum pătratele distanțelor de la centrul sferei.

CAZUL 1. Fie AFL o sferă antrenată în mod uniform pe o orbită în jurul axei S și prin cercurile concentrice BGM , CHN , DIO , EKP etc., să

separăm fluidul în nenumărate orbite concentrice de aceeași grosime. Să ne închipuim că orbitele sînt solide; și fiindcă fluidul este omogen, acțiunile efectuate reciproc de orbite, vor fi (prin ipoteză) precum translațiile lor între ele și suprafețele vecine în care au loc acțiunile. Dacă acțiunea pe o orbită



oarecare este mai mare sau mai mică de partea concavă decît de partea convexă; va prevala acțiunea mai tare, și sau va accelera sau va întîrzia viteza orbitei, după cum este dirijată în aceeași direcție cu mișcarea ei sau în direcție contrară. Prin urmare pentru ca o orbită oarecare să poată persevera în mișcarea sa în mod uniform, va trebui ca acțiunile din ambele părți să fie egale, și să aibă loc în direcții contrarii. De unde cum acțiunile sînt precum suprafețele vecine și translațiile lor reciproce; translațiile vor fi în raport invers cu suprafețele, adică, în raport invers cu pătratele distanțelor suprafețelor de la centru. Dar

diferențele mișcărilor unghiulare în jurul axei sînt precum aceste translații aplicate la distanțe, sau precum translațiile și în raport invers cu distanțele, adică, unind rapoartele în raport invers cu cubul distanțelor. De aceea dacă la diversele părți ale dreptei infinite $SABCDEQ$ ridicăm perpendicularele Aa , Bb , Cc , Dd , Ee etc., invers proporționale cu cuburile lui SA , SB , SC , SD , SE etc., sumele diferențelor, adică mișcărilor unghiulare întregi, vor fi precum sumele corespunzătoare ale liniilor Aa , Bb , Cc , Dd , Ee : adică (dacă pentru a constitui un mediu fluid uniform, numărul orbitelor crește și lățimea scade la infinit) precum ariile hiperbolice AaQ , BbQ , CcQ , DdQ , EeQ etc., analoge cu aceste sume. Și timpurile periodice invers proporționale cu mișcărilor unghiulare vor fi de asemenea invers proporționale cu aceste arii. Așadar timpul periodic al unei orbite oarecare DIO este în raport invers cu aria DdQ , adică, din cauza cvasdraturilor cunoscute ale curbilor, precum pătratul distanței SD . Ceea ce am voit mai întîi să demonstrez.

CAZUL 2. Din centrul sferei să ducem cît de multe drepte infinite, care să cuprindă cu axa unghiuri date, întrecîndu-se reciproc cu diferențe egale; și cu aceste drepte învîrtite în jurul axei să ne închipuim orbitele tăiate în nenumărate inele; și fiecare inel va avea patru inele vecine cu el, unul interior, altul exterior și două laterale. Fiecare din aceste inele nu poate fi acționat printr-o frecare interioară și exterioară în mod egal și de părți contrarii, decît dacă mișcarea este efectuată potrivit legii primului caz. Aceasta apare evident din demonstrația primului caz. Și de aceea orice serie de inele înaintînd de la sferă la infinit pe o dreaptă, se va mișca conform legii cazului întîi, dacă nu este împiedicată de frecarea inelelor laterale. Dar în mișcarea efectuată după această lege, frecarea inelelor laterale este nulă, și de aceea nici nu va împiedica mișcarea, care are loc mai puțin după această lege. Dacă inelele, care sînt distanțate egal de la centru, se vor învîrți, fie mai repede fie mai încet în apropierea polilor decît în apropierea eclipticei; cele mai încete vor fi accelerate, și cele mai repezi vor fi întîrziate de frecarea

reciprocă, și astfel timpurile periodice totdeauna se vor apropia de egalitate, potrivit legii primului caz. Prin urmare această frecare nu împiedică mișcarea să aibă loc după legea primului caz, și de aceea legea va fi valabilă: adică, timpurile periodice ale diverselor inele vor fi precum pătratele distanțelor de la centrul sferei. Ceea ce voiam să demonstrez în al doilea rând.

CAZUL 3. Să împărțim acum fiecare inel prin secțiuni transversale în particule nenumărate formînd o substanță în mod absolut și uniform fluidă; și fiindcă aceste secțiuni nu aparțin legii mișcării circulare, ci conduc numai la construcția fluidului, mișcarea secțiunii circulare va rămînea circulară ca mai sus. Prin aceste secțiuni toate inelele oricît de mici sau nu vor schimba asperitatea și forța de frecare mutuală, sau le vor schimba în mod egal. Și rămînînd proporția cauzelor va rămîne proporția efectelor, adică proporția mișcărilor și timpurilor periodice. Q.E.D. De altfel cum mișcarea circulară, și forța centrifugă născută din ea, este mai mare la ecliptică decît la poli; va trebui să fie o cauză oarecare prin care diversele particule să fie reținute pe cercurile lor; ca nu cumva materia care este la ecliptică, să se îndepărteze totdeauna de centru și prin vârtejuri exterioare să emigreze la poli, și de aici să se întoarcă prin axă la ecliptică printr-o circulație perpetuă.

COROLARUL 1. De aici mișcările unghiulare ale părților fluidului în jurul axei sferei, sînt în raport invers cu pătratele distanțelor de la centrul sferei, și vitezele absolute în raport invers cu aceleași pătrate aplicate la distanțele de axă.

COROLARUL 2. Dacă o sferă se învîrtește în jurul unei axe de poziție dată cu o mișcare uniformă într-un fluid în repaus similar și infinit, mișcarea se va comunica fluidului, în felul vârtejului, și mișcarea se va propaga cu încetul la infinit; și nici nu va înceta de a fi accelerată în diversele părți ale fluidului, pînă ce timpurile periodice ale diverselor părți nu sînt precum pătratele distanțelor de la centrul sferei.

COROLARUL 3. Deoarece părțile interioare ale vârtejului din cauza vitezei sale mai mari freacă și apasă pe cele exterioare, și prin acea acțiune le comunică neconținut mișcarea, și cele exterioare transferă aceeași cantitate de mișcare simultan asupra altora pînă acum exterioare, și prin acea acțiune păstrează cantitatea sa de mișcare neschimbată, este evident că mișcarea este transportată neconținut de la centru la circumferința vârtejului; și va fi absorbită prin infinitatea circumferinței. Materia dintre două suprafețe sferice oarecare concentrice cu vârtejul nu va fi niciodată accelerată, fiindcă orice mișcare primită de la materia interioară trece totdeauna la cea exterioară.

COROLARUL 4. Prin urmare pentru a păstra vârtejul în mod constant în aceeași stare de mișcare, se cere un principiu oarecare activ, de la care sfera să primească totdeauna aceeași cantitate de mișcare, pe care o imprimă asupra materiei vârtejului. Fără un astfel de principiu este necesar ca sfera și părțile interioare ale vârtejului, propagînd totdeauna mișcarea lor în exterior, și neprimind vreo mișcare nouă oarecare, se mișcă din ce în ce mai încet și încetează de a merge pe orbită.

COROLARUL 5. Dacă o altă sferă ar înota în acest vârtej la o anumită distanță de centrul lui, și în același timp s-ar roti în mod constant cu o forță oarecare în jurul unei axe de înclinare dată, prin mișcarea acestuia fluidul ar fi antrenat în vârtej, și mai întîi s-ar învîrți acest vârtej nou și îngust împreună cu sfera în jurul centrului celuilalt, și în același timp mișcarea lui

s-ar răspîndi mai departe, și încetul cu încetul s-ar propaga la infinit, în felul primului vîrtej. Și din aceeași cauză, pentru care sfera acestuia este antrenată de mișcarea vîrtejului celeilalte, s-ar antrena și sfera celuilalt prin mișcarea acestuia, astfel că cele două sfere s-ar roti în jurul unui punct oarecare intermediar, și ar fugi una de alta din cauza acelei mișcări circulare, dacă nu cumva sînt reținute de o forță oarecare. După aceea dacă forțele imprimare în mod constant, prin care sferele perseverează în mișcările lor, ar înceta, și toate ar fi abandonate legilor mecanice, mișcările sferelor ar lîncezi încetul cu încetul! (din cauza menționată în corolarele 3 și 4) și vîrtejele în sfîrșit ar ajunge în stare de repaus.

COROLARUL 6. Dacă mai multe sfere în locuri date s-ar roti în mod constant în jurul unor axe de poziție dată cu viteze determinate, se vor forma tot atîtea vîrtejuri înaintînd la infinit. Căci diversele sfere, din cauză pentru care una dintre ele propagă mișcarea sa la infinit, vor propaga și mișcările lor la infinit, astfel încît fiecare parte a fluidului înfinit va fi acționată de mișcarea care rezultă din acțiunile tuturor sferelor. De unde vîrtejurile nu sînt îngrădite între anumite limite, ci încetul cu încetul trec unul în altul; și sferele prin acțiunile vîrtejurilor între ele se vor mișca neconținut din locurile lor, după cum am expus în corolarul de mai sus; și nici nu vor păstra o poziție sigură oarecare între ele, decît dacă sînt reținute de o forță oarecare. Încetînd însă acele forțe care în sferele imprimate în mod constant păstrează aceste mișcări, materia din cauza menționată în corolarul al treilea și patrulea, încetul cu încetul va ajunge în stare de repaus și va înceta de a se mișca în vîrtejuri.

COROLARUL 7. Dacă un fluid asemănător se închide într-un vas sferic, și prin rotația uniformă a unei sfere situate în centru este antrenat în vîrtej iar sfera și vasul se rotesc de aceeași parte în jurul aceleiași axe, și timpurile lor periodice sînt precum pătratele semidiametrelor: părțile fluidului nu vor persevera mai departe în mișcările lor fără accelerație și întîrziere, pînă ce timpurile lor periodice sînt precum pătratele distanțelor de la centrul vîrtejului. Nici o altă constituție a vîrtejului nu poate fi permanentă.

COROLARUL 8. Dacă vasul, fluidul închis și sfera păstrează această mișcare, și se rotesc cu o mișcare unghiulară comună în jurul unei axe oarecare date, deoarece prin această mișcare nouă nu se schimbă frecarea reciprocă a părților fluidului, nu se vor schimba mișcările părților între ele. Căci translațiile părților între ele depind de frecare. O parte oarecare va persevera în mișcarea, care se întîmplă astfel încît prin frecarea dintr-o parte nu este mai întîrziată decît este accelerată prin frecarea din cealaltă.

COROLARUL 9. De unde dacă vasul este în repaus și se dă mișcare sferei, va fi dată mișcarea fluidului. Căci să ne închipuim că planul trece prin axa sferei și se învîrtește cu o mișcare contrară; și să presupunem că suma timpului acestei revoluții și a revoluției sferei este către timpul de revoluție a sferei, precum pătratul semidiametrului vasului către pătratul semidiametrului sferei: și timpurile periodice ale părților fluidului față de acest plan vor fi precum pătratele distanțelor lor de la centrul sferei.

COROLARUL 10. Prin urmare dacă un vas se mișcă fie în jurul aceleiași axe cu sfera, fie în jurul alteia oarecare cu o viteză dată, va fi dată mișcarea fluidului. Căci dacă din întreg sistemul se scade mișcarea unghiulară a vasului, vor rămîne toate mișcările aceleiași între ele ca mai sus, potrivit corolarului 8. Și aceste mișcări vor fi date potrivit corolarului 9.

COROLARUL 11. Dacă vasul și fluidul sînt în repaus și sfera se rotește cu mișcare uniformă, mișcarea se va propaga încetul cu încetul prin întreg fluidul din vas, și vasul va fi purtat împrejur, dacă nu va fi reținut în mod forțat, și fluidul și vasul nu vor înceta de a fi accelerate, înainte ca timpurile lor periodice să fie egale cu timpurile periodice ale sferei. Căci dacă vasul este reținut cu o forță oarecare sau este învîrtit cu o mișcare oarecare constantă și uniformă, mediul va ajunge încetul cu încetul la starea mișcării definite în corolarele 8, 9 și 10, și nici nu va persevera vreodată în vreo stare oarecare. Apoi dacă, încetînd forțele prin care vasul și sfera se învîrteau cu anumite mișcări, întreg sistemul este abandonat legilor mecanice; vasul și sfera acționează unul asupra celuilalt prin mijlocirea fluidului, și nici nu vor înceta să propage mișcările lor unul altuia prin fluid, înainte ca timpurile lor periodice să fie egale între ele, și sistemul întreg se învîrtește deodată ca și cînd ar fi un singur solid.

SCOLIE

În toate acestea presupun că fluidul constă dintr-o materie uniformă în ceea ce privește densitatea și fluiditatea. De acest fel este fluidul în care aceeași sferă poate propaga cu aceeași mișcare în același interval de timp, mișcări asemenea și egale la distanțe totdeauna egale de ea, oriunde ar fi situată în fluid. Căci materia tinde ca prin mișcarea sa circulară să se îndepărteze de axa vîrtejului, și de aceea apasă toată materia posterioară. Din cauza acestei presiuni frecarea părților este mai intensă și separarea mai dificilă, și în consecință se micșorează fluiditatea materiei. Dacă părțile fluidului undeva sînt mai groase sau mai mari, acolo fluiditatea va fi mai mică, din cauză că sînt mai puține suprafețe în care părțile se separă una de alta. În astfel de cazuri presupunem că lipsa de fluiditate se suplinește fie prin lubricitatea părților fie prin încetineală sau altă condiție oarecare. Dacă aceasta nu are loc, materia unde este mai puțin fluidă va fi mai coerentă și mai inertă, și deci va primi mișcarea mai tîrziu și o va propaga timp mai îndelungat decît prin raportul menționat mai sus. Dacă figura vasului nu este sferică, particulele se vor mișca în linii necirculare dar conforme cu forma vasului și timpurile periodice vor fi precum aproximativ pătratele distanțelor mijlocii de centru. În părțile dintre centru și circumferință, unde spațiile sînt mai late, mișcările vor fi mai încete, unde sînt mai înguste, mai rapide, totuși particulele mai repezi nu tind spre circumferință. Căci vor descrie arce mai puțin curbe, și tendința de îndepărtare de centru nu se va micșora mai puțin prin descreșterea acestei curburi decît va crește prin creșterea vitezei. Întîinzînd de la spațiile mai înguste la cele mai late se vor îndepărta ceva mai mult de centru, dar în această îndepărtare vor întîrzia; și apropiindu-se după aceea dinspre cele mai late către cele mai înguste vor fi accelerate, și astfel în mod alternativ diversele particule vor întîrzia și vor fi accelerate neconținut. Acestea se vor petrece astfel într-un vas rigid. Căci într-un fluid infinit constituția vîrtejurilor se cunoaște prin corolarul al șaselea al acestei propoziții.

Am încercat să studiez în această propoziție proprietățile vîrtejurilor, pentru a vedea dacă fenomenele cerești se vor explica prin vîrtejuri. Căci este un fenomen, că timpurile periodice ale planetelor ce se rotesc în jurul

lui Jupiter sînt precum puterea $3/2$ a distanțelor de la centrul lui Jupiter; și aceeași regulă este valabilă în cazul planetelor care se rotesc în jurul Soarelui. Dar aceste reguli sînt valabile în mod foarte precis pentru ambele feluri de planete, întrucît o arată observațiile astronomice de pînă acum. Și deci dacă acele planete ar fi antrenate de vîrtejuri ce se învîrtesc în jurul lui Jupiter și al Soarelui, ar trebui ca și aceste vîrtejuri să se rotească după această lege. De fapt timpurile periodice ale părților vîrtejurilor s-au găsit a fi precum pătratul distanțelor de la centrul mișcării: și nici nu se poate micșora acel raport și reduce la raportul $3/2$, decît dacă sau materia vîrtejului este cu atît mai fluidă cu cît este mai depărtată de centru, sau rezistența care se naște din lipsa lubricității părților fluidului, deoarece viteza cu care părțile fluidului se separă una de alta merge crescînd, crește într-un raport mai mare decît acela în care crește viteza. Dar nici una din acestea nu pare a fi rezonabilă. Părțile mai groase și mai puțin fluide, dacă nu cumva sînt grele spre centru, tind spre circumferință; și este verosimil că, deși pentru demonstrație am propus o astfel de ipoteză la începutul acestei secțiuni pentru ca rezistența să fie proporțională cu viteza, totuși, rezistența este într-un raport mai mic decît acela al vitezei. Ceea ce admițînd, timpurile periodice ale părților vîrtejului vor fi într-un raport mai mare decît acela al pătratului distanțelor de centru. Căci dacă vîrtejurile (după cum cred unii) se mișcă mai repede în apropiere de centru, apoi mai încet pînă la o anumită limită, apoi iarăși mai repede lîngă circumferință; desigur nici raportul $3/2$ și nici un alt raport oarecare sigur și determinat nu se poate obține. Să vadă deci filozofii cum se poate explica acel fenomen al raportului $3/2$ prin vîrtejuri.

PROPOZIȚIA LIII. TEOREMA XLI

Corpurile, care purtate într-un vîrtej se mișcă pe o orbită, au aceeași densitate cu vîrtejul, și se mișcă în ceea ce privește viteza și direcția mișcării cu părțile lui.

Căci dacă presupunem că o parte foarte mică a vîrtejului, ale cărei particule sau puncte fizice păstrează o poziție dată între ele, îngheață: aceasta, deoarece nici în ce privește densitatea sa, nici în ce privește forța inerentă, nici figura nu se schimbă, se va mișca după aceeași lege ca mai sus: și invers dacă partea înghețată și solidă a vîrtejului are aceeași densitate cu vîrtejul rămas, și trece în stare fluidă; ea se va mișca după aceeași lege ca mai sus, dacă nu cumva particulele ei prefăcute în fluid se mișcă între ele. Să neglijăm deci mișcarea particulelor între ele, atît întrucît privește mișcarea progresivă a întregului, și mișcarea întregului va fi aceeași ca mai înainte. Dar mișcarea va fi aceeași cu mișcarea altor părți ale vîrtejului situate la distanțe, egale de centru, fiindcă solidul trecut în fluid devine o parte a vîrtejului asemenea cu celelalte părți. Prin urmare solidul, dacă are aceeași densitate cu materia vîrtejului, se va mișca cu aceeași mișcare cu părțile lui, fiind în repaus relativ în materia din vecinătatea imediată. Dacă însă este mai dens, va tinde să se îndepărteze mai mult de centrul vîrtejului decît mai înainte; și deci întrecînd forța aceea a vîrtejului, cu care mai înainte era reținut pe orbita sa ca și cînd ar fi ținut în stare de echilibru, se va îndepărta de centru și rotindu-se va descrie o spirală, fără a mai reveni pe aceeași orbită. Și prin același raționament dacă este mai puțin dens se va apropia de

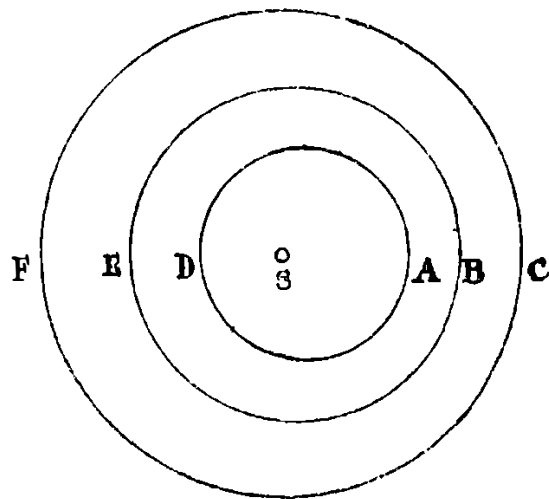
centru. Așadar nu va reveni pe aceeași orbită decît dacă are aceeași densitate cu fluidul. Dar în acel caz s-a arătat, că s-ar învîrți după aceeași lege cu părțile fluidului egal depărtate de centrul vârtejului . Q.E.D.

COROLARUL 1. Prin urmare solidul ce se rotește în vârtej și revine totdeauna pe aceeași orbită, este în repaus relativ în fluidul în care înoată.

COROLARUL 2. Și dacă vârtejul este uniform în ce privește densitatea, același corp se poate roti la orice distanță de centrul vârtejului.

SCOLIE

De aici este evident că planetele nu sînt antrenate de vârtejuri materiale. Căci planetele după ipoteza lui Copernic purtate în jurul Soarelui se rotesc pe elipse avînd focarul în Soare, și cu razele duse la Soare descriu arii proporționale cu timpurile. Dar părțile vârtejului nu se pot roti cu o astfel de mișcare. Fie AD, BE, CF , trei orbite descrise în jurul Soarelui S , dintre care cercul exterior CF să fie concentric cu Soarele, și fie A, B afeliile celor două intericare, iar D, F periheliile. Deci corpul ce se învîrtește pe orbita CF , descriind cu raza dusă la Soare arii proporționale cu timpurile, se va mișca cu o mișcare uniformă. Iar corpul, ce se rotește pe orbita BE , se va mișca mai încet în afeliul B și mai repede în periheliul E , potrivit legilor astronomice; pe cînd după legile mecanice materia vârtejului în spațiul mai îngust dintre A și C ar trebui să se miște mai repede decît în spațiul mai lat dintre D și F : adică în afeliu mai repede decît în periheliu. Aceste două ipoteze se contrazic. Astfel la începutul semnelui Fecioarei, unde se află acum afeliul lui Marte, distanța dintre orbitele lui Marte și Venus este către distanța acelorași orbite la începutul semnelui Peștilor precum aproximativ trei la doi, și de aceea materia vârtejului între acele orbite la începutul Peștilor trebuie să fie mai rapidă decît la începutul Fecioarei în raportul de trei la doi. Căci cu cît este mai îngust spațiul prin care aceeași cantitate de materie trece în același timp al unei revoluții, trebuie să treacă cu o viteză cu atît mai mare. Așadar dacă Pămîntul fiind în repaus relativ în această materie cerească ar fi antrenat de ea, și s-ar învîrți împreună cu ea în jurul Soarelui, viteza lui la începutul Peștilor ar fi către viteza lui la începutul Fecioarei în raportul de $3/2$. De unde mișcarea diurnă aparentă a Soarelui la începutul Fecioarei ar fi mai mare de șaptezeci de minute, și la începutul Peștilor mai mică decît patruzeci și opt de minute, cum însă (conform experienței) mișcarea aceasta aparentă a Soarelui este mai mare la începutul Peștilor decît la începutul Fecioarei, și de aceea Pămîntul este mai repede la începutul Fecioarei decît la începutul Peștilor. Așadar ipoteza vârtejurilor este cu totul în contrazicere cu fenomenele astronomice, și conduce nu atît la explicarea cît la încurcarea mișcărilor cerești. Iar în ce fel se întîmplă aceste mișcări în spațiile libere fără vârtejuri se poate înțelege din Cartea I, și se va trata acum mai complet în sistemul lumii.



CARTEA A III-A

DESPRE SISTEMUL LUMII

În Cărțile precedente am expus principiile filozofiei, nu filozofice ci numai matematice, cu ajutorul cărora se poate discuta în chestiuni filozofice. Acestea sînt legile și condițiile mișcărilor și forțelor, care se referă mai ales la filozofie. Totuși, ca ele să nu pară sterile le-am ilustrat cu oarecare scoli filozofice, în care am tratat chestiunile generale, și pe care se pare a se întemeia îndeosebi filozofia, precum densitatea și rezistența corpurilor, spațiile vide ale corpurilor, și mișcarea luminii și a sunetelor. Mai rămîne ca cu ajutorul aceluiași principii să expunem constituția sistemului lumii. Asupra acestui subiect [am compus Cartea a treia în mod popular ca să fie citită de mai mulți. Dar cei care nu înțeleg îndeajuns de bine principiile expuse, aceia înțeleg foarte puțin puterea consecințelor, și nici nu vor abandona prejudecățile, cu care s-au obișnuit de mai mulți ani: și de aceea ca să nu se ajungă la discuții, am dat forma de propoziții esențialului acelei Cărți, după obiceiul matematicii, ca să fie citit numai de aceia care au înțeles principiile anterioare. Totuși deoarece acolo intervin foarte des propoziții, care pot răpi mult timp chiar și cititorilor cunoscători ai matematicilor, nu vreau să îndemn pe nimeni ca să le pătrundă pe toate; va fi deajuns dacă cineva va citi cu atenție definițiile, legile mișcărilor și primele trei secțiuni ale Cărții întâia și apoi va trece la această Carte asupra sistemului lumii, consultînd după voie celelalte propoziții citate aici, ale Cărților precedente.

REGULI DE FILOZOFARE

REGULA I

Nu trebuie să admitem mai multe cauze pentru lucrurile naturale, decât atâtea câte sînt și adevărate și suficiente pentru explicarea aparențelor lor.

Căci filozofii zic: Natura nu lucrează în zadar, și mai mult este zadarnic cînd mai puțin este deajuns. Căci natura este simplă și nu face lux cu cauze superflue ale lucrurilor.

REGULA II

Și de aceea efectelor naturale de același fel trebuie să le atribuim întrucît se poate, aceleași cauze.

Așfel respirația la om și animal; căderea pietrelor în *Europa* și în *America*; lumina focului din sobă și a Soarelui; reflexia luminii pe Pămînt și pe planete. ?

REGULA III

Calitățile corpurilor care nu pot fi nici intensificate și nici slăbite, și care aparțin tuturor corpurilor cu care se pot face experiențe, trebuie considerate drept calități ale tuturor corpurilor.

Căci calitățile corpurilor nu se cunosc decît prin experiențe, și deci trebuie considerate ca generale acelea care în general sînt de acord cu experiențele; și acelea care nu pot fi micșorate, nu pot fi făcute să dispară. Desigur evidenței experiențelor nu se pot opune visuri superficiale, și nici nu trebuie să ne îndepărtăm de analogia naturii, deoarece ea obișnuiește să fie simplă și totdeauna de acord cu ea însăși. Extinderea corpurilor se cunoaște numai prin simțuri, și nu se observă în toate: dar fiindcă ea aparține tuturor celor sensibile, o afirmăm despre toate. Știm din experiență că cele mai multe corpuri sînt dure. Dar duritatea întregului se naște din duritatea părților, și de aici cu drept cuvînt conchidem că nu numai particulele nedivizate ale

corpurilor pe care le simțim ci și ale tuturor celorlalte sînt dure. Că toate corpurile sînt impenetrabile nu o deducem din raționamente ci prin simțuri. Constatăm că acelea pe care le întîlnim, sînt impenetrabile, și de aici deducem că impenetrabilitatea este o proprietate a tuturor corpurilor. Că toate corpurile sînt mobile, și că ~~înzestrate cu anumite forțe~~ (pe care le numim forțe de inerție) ele perseverează în mișcare sau repaus, o deducem din proprietăți de acest fel ale corpurilor văzute. Extinderea, duritatea, impenetrabilitatea, mobilitatea și forța de inerție a întregului, provin din extinderea, duritatea, impenetrabilitatea, mobilitatea și forțele de inerție ale părților; și de aici conchidem că părțile cele mai mici ale tuturor corpurilor au întindere, sînt dure și impenetrabile și mobile, și înzestrate cu forțe de inerție. Și acesta este fundamentul întregii filozofii. Apoi știm din fenomene că ~~părțile divizate~~ ale corpurilor și în contact una cu alta se pot separa între ele, și este cunoscut din matematici că părțile nedivizate se pot împărți cu mintea în părți din ce în ce mai mici. Dar este nesigur că părțile acelea distincte și nedivizate s-ar putea divide și separa una de alta prin forțele naturii. Dacă însă printr-o singură experiență s-ar constata că oarecare particule nedivizate, prin sfărîmarea unui corp dur și solid, suferă o diviziune: prin această regulă am conchide că nu numai părțile divizate sînt separabile, ci că și cele nedivizate se pot divide la infinit.

În sfîrșit, dacă prin experiențe și observații astronomice se constată în mod universal că toate corpurile din apropierea Pămîntului sînt grele față de Pămînt, și anume în raport cu cantitatea de materie din fiecare, și că Luna este grea față de Pămînt în raport cu cantitatea materiei sale, și că la rîndul său marea este grea față de Lună, și că toate planetele sînt grele una față de alta, și cometele la fel sînt grele față de Soare; trebuie să zicem potrivit acestei reguli că toate corpurile gravitează unul spre altul. Căci argumentul va fi mai tare pentru fenomenele de gravitate universală, decît pentru impenetrabilitatea corpurilor, despre care nu avem nici o experiență, nici o observație directă în corpurile cerești. Totuși nu afirm că gravitatea este esențială corpurilor. Prin forța inerentă înțeleg numai forța de inerție. Aceasta este invariabilă. Îndepărtîndu-ne de Pămînt gravitatea se micșorează.

REGULA IV

În filozofia experimentală, propozițiile deduse prin inducțiune din fenomene, trebuie considerate sau precis sau aproximativ adevărate, chiar dacă le stau împotriva ipoteze contrare, pînă ce se vor ivi alte fenomene prin care devin sau mai precise sau supuse excepțiilor.

Aceasta trebuie să aibă loc pentru ca nu cumva argumentul inducției să fie nimicit prin ipoteze.

FENOMENE

FENOMENUL I

Planetele din jurul lui Jupiter descriu, cu razele duse la centrul lui Jupiter, arii proporționale cu timpurile, și timpurile lor periodice, stelele fixe fiind în repaus, sînt în raportul puterii $\frac{3}{2}$ a distanțelor de la centrul lui.

Aceasta rezultă din observațiile astronomice. Orbitele acestor planete nu diferă în mod sensibil de cercuri concentrice ale lui Jupiter, și mișcările lor pe aceste cercuri se constată a fi uniforme. Iar astronomii sînt de acord că timpurile periodice sînt în raportul puterii $\frac{3}{2}$ a semidiametrelor orbitelor : și acest lucru se vede din tabloul următor :

Timpurile periodice ale sateliților lui Jupiter

$1^d 18^h 27' 34''$. $3^d 13^h 13' 42''$. $7^d 3^h 42' 36''$. $13^d 16^h 32' 9''$

Distanțele sateliților de la centrul lui Jupiter

Din observațiile lui	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidia- metrul lui Jupiter
Townly prin micrometru	5,52	8,78	13,47	24,72	
Cassini prin telescop	5	8	13	23	
Cassini prin eclipsa sateliților	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Din timpurile periodice.	5,667	9,017	14,384	25,299	

P o u n d a determinat elongațiile sateliților lui Jupiter și diametrul lui cu cele mai bune micrometre după cum urmează. Elongația maximă helio-centrică a satelitului al patrulea de la centrul lui Jupiter a fost determinată cu un micrometru într-un tub de 15 picioare lungime și s-a obținut la distanța mijlocie a lui Jupiter de Pămînt aproape $8'16''$. Iar a satelitului al treilea s-a determinat cu un micrometru într-un telescop de 123 picioare lungime, și s-a obținut la aceeași distanță a lui Jupiter de Pămînt $4'42''$.

Elongațiile maxime ale celorlalți sateliți la aceeași distanță a lui Jupiter de Pământ din timpurile periodice s-a aflat a fi $2'56''47'''$ și $1'51''6'''$.

Diametrul lui Jupiter a fost determinat de câteva ori cu micrometrul într-un telescop de 123 picioare lungime, și reduse la distanța mijlocie a lui Jupiter de Soare sau de Pământ, a rezultat totdeauna mai mic de cât $40''$, niciodată mai mic decât $38''$, în general $39''$. În telescoapele mai scurte acest diametru este de $40''$ sau $41''$. Căci lumina lui Jupiter este puțin lărgită din cauza refracției neegale, și această lărgire are un raport mai mic către diametrul lui Jupiter în telescoapele mai lungi și mai perfecte decât în cele mai scurte și mai puțin perfecte. Timpurile în care doi sateliți, primul și al treilea, treceau peste fața lui Jupiter de la începutul intrării pînă la începutul ieșirii, și de la intrarea completă la ieșirea completă, au fost observate cu ajutorul telescopului celui lung. Și diametrul lui Jupiter la distanța lui mijlocie rezultă a fi $37\frac{1}{8}''$ din trecerea primului satelit, și $37\frac{3}{8}''$ din trecerea celui de-al treilea. S-a observat de asemenea timpul în care umbra primului satelit trece prin fața lui Jupiter, și de aici a rezultat aproximativ $37''$ pentru diametrul lui Jupiter la distanța lui mijlocie de Pământ. Să presupunem că diametrul lui este aproximativ $37\frac{1}{4}''$; și elongațiile maxime ale satelitului întâi, al doilea, al treilea și al patrulea vor fi egale respectiv cu 5,965, 9,494, 15,141 și 26,63 semidiametri de ai lui Jupiter.

FENOMENUL II

Planetele din jurul lui Saturn descriu, cu razele duse la Saturn, arii proporționale cu timpurile, și timpurile lor periodice, stelele fixe fiind în repaus, sînt în raportul puterii $\frac{3}{2}$ a distanțelor de la centrul lui.

Căci Cassini din observațiile sale a aflat că distanțele lor de la centrul lui Saturn și timpurile periodice sînt următoarele.

Timpurile periodice ale sateliților lui Saturn

$1^d 21^h 18'27''$. $2^d 17^h 41' 22''$. $4^d 12^h 25' 12''$. $15^d 22^h 41' 14''$. $79^d 7^h 48' 00''$.

Distanțele sateliților de la centrul lui Saturn în semidiametrii inelului

<i>Din observații</i>	$1\frac{19}{20}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	8	24	.
<i>Din timpurile periodice . .</i>	1,93	2,47	3,45	8	23,35	

Elongația maximă a satelitului al patrulea de la centrul lui Saturn s-a aflat din observații obișnuite a fi aproximativ opt semidiametre. Dar elongația maximă a acestui satelit de la centrul lui Saturn, determinată cu cel mai bun micrometru din telescopul lui Huygens de 123 picioare lungime, s-a aflat a fi de opt semidiametre și șapte zecimi. Și din această observație și din timpurile periodice, distanțele sateliților de la centrul lui Saturn în semidiametre ai inelului sînt 2,1, 2,69, 3,75, 8,7 și 25,35. Diametrul lui Saturn în același telescop era către diametrul inelului precum 3 către 7, și diametrul

inelului în zilele de 28 și 29 mai ale anului 1719 s-a aflat a fi 43". Și deci diametrul inelului la distanța mijlocie a lui Saturn de Pământ este de 42", și diametrul lui Saturn 18". Acestea se întâmplă astfel în telescoapele foarte lungi și foarte bune, deoarece mărimile aparente ale corpurilor cerești în telescoapele mai lungi au o proporție mai mare către dilatarea luminii la extremitățile acelor corpuri decât în cele mai scurte. Dacă se elimină orice lumină rătăcitoare, diametrul lui Saturn nu va rămâne mai mare ca 16".

FENOMENUL III

Cele cinci planete primare Mercur, Venus, Marte, Jupiter și Saturn înconjoară Soarele cu orbitele lor.

Că Mercur și Venus se învîrtesc în jurul Soarelui se demonstrează din fazele lor lunare. Cînd lucesc cu fața plină sînt situate dincolo de Soare; înjumătățite sînt în regiunea Soarelui, sub formă de seceră dincoace de Soare, trecînd uneori peste discul lui la fel ca petele. Din fața plină a lui Marte în apropierea conjuncțiunii Soarelui, și din cea gheboasă în cvadraturi, este sigur că el înconjoară Soarele. Despre Jupiter și Saturn de asemenea se demonstrează același lucru din fazele lor totdeauna pline: căci din umbrele sateliților proiectate pe ele rezultă că ele lucesc cu lumina împrumutată de la Soare.

FENOMENUL IV

Timpurile periodice ale celor cinci planete primare, și acela al Soarelui în jurul Pământului sau al Pământului în jurul Soarelui, stelele fixe fiind în repaus, sînt în raportul puterii $3/2$ a distanțelor mijlocii de la Soare.

Acest raport aflat de Kepler este acceptat de toți. Căci aceleași sînt timpurile periodice, și aceleași dimensiunile orbitelor, fie că Soarele se învîrtește în jurul Pământului, fie că Pământul se învîrtește în jurul Soarelui. Și asupra măsurii timpurilor periodice sînt de acord toți astronomii. Iar mărimile tuturor orbitelor le-au măsurat foarte precis Kepler și Bulliau din observații: și distanțele mijlocii, care corespund timpurilor periodice, nu diferă în mod sensibil de distanțele aflate de ei, și de obicei cad între acele valori; după cum se poate vedea în tabloul următor.

Timpurile periodice ale planetelor și Pământului în jurul Soarelui relative la stelele fixe, în zile și părți zecimale de zile

\hbar	+	$\cdot \text{♂}$	♂	♂	♂
10759,275	4332,514	686,9785	365,2565	224,6176	87,9692

Distanțele mijlocii ale planetelor și Pământului de la Soare

	\hbar	2	♂	♂	♀	♀
După Kepler	951000	519650	152350	100000	72400	38806
După Bulliau	954198	522520	152350	100000	72398	38585
După timpurile periodice	954006	520096	152369	100000	72333	38710

Asupra distanțelor lui Mercur și Venus de la Soare nu este locul să discutăm aici, fiindcă acestea se determină prin ~~elongațiile lor de la Soare~~. Pentru distanțele planetelor superioare de asemenea se încheie orice discuție din cauza eclipselor sateliților lui Jupiter. Căci prin acele eclipse se determină poziția umbrei pe care o proiectează Jupiter, și din aceasta se obține lungimea heliocentrică a lui Jupiter. Iar din comparația longitudinilor heliocentrică și geocentrică între ele se determină distanța lui Jupiter.

FENOMENUL V

Planetele primare, cu razele duse la Pământ nu descriu arii proporționale cu timpurile, dar cu ~~razele duse la Soare~~, parcurg arii proporționale cu timpurile.

Căci față de Pământ când progresează, când sînt staționare, când regresează. Dar față de Soare totdeauna progresează, și aceasta aproape cu o mișcare uniformă, dar totuși ceva mai repede în perihelii și ceva mai încet în afelii, astfel ca descrierea ariilor să fie uniformă. Această propoziție este foarte cunoscută astronomilor, și îndeosebi pentru Jupiter se demonstrează prin eclipsele sateliților săi, prin care eclipse am spus că se determină lungimile heliocentrice ale acestei planete și distanțele de la Soare.

FENOMENUL VI

Luna descrie cu raza dusă la centrul Pământului, o arie proporțională cu timpul.

Aceasta este evident din mișcarea aparentă a Lunii comparată cu diametrul ei aparent. Este drept că mișcarea Lunii este perturbată întrucîtva de forța Soarelui, dar în aceste fenomene neglijez micile erori insensibile.

PROPOZIȚII

PROPOZIȚIA I. TEOREMA I

Forțele cu care planetele din jurul lui Jupiter sînt abătute nèconținut de la mișcările rectilinii și sînt reținute pe orbitele lor, sînt îndreptate spre centrul lui Jupiter, și sînt în raport invers cu pătratele distanțelor de la pozițiile lor la acel centru.

Partea întâi a propoziției apare din fenomenul I și din propoziția II sau III, din Cartea I; și partea din urmă din fenomenul I și corolarul 6, propoziția IV, a aceleiași Cărți.

Același lucru trebuie înțeles despre planetele care înconjură pe Saturn, potrivit fenomenului II.

PROPOZIȚIA II. TEOREMA II

Forțele cu care planetele primare sînt neconținut abătute de la mișcările rectilinii și sînt reținute pe orbitele lor, sînt îndreptate spre Soare, și sînt în raport invers cu pătratele distanțelor la centru.

Partea întâi a propoziției reiese din fenomenul V și din propoziția II a Cărții I: și partea din urmă din fenomenul IV și propoziția IV a aceleiași Cărți. Mai precis se demonstrează această parte a propoziției prin repausul afeliilor. Căci cea mai mică abatere de la raportul invers al pătratelor (potrivit corolarului 1, propoziția XLV, Cartea I) ar trebui să producă în fiecare revoluție în parte o mișcare apreciabilă a apsidelor, una enormă în mai multe.

PROPOZIȚIA III. TEOREMA III

Forța cu care Luna este reținută pe orbita sa este îndreptată spre Pămînt și este în raport invers cu pătratele distanțelor locurilor de la centrul acestuia.

Partea întâi a afirmației rezultă din fenomenul VI și din propoziția II sau III, Cartea I; și partea a doua din mișcarea foarte înceată a apogeului lunar. Căci acea mișcare progresivă, care în diversele revoluții este numai de $3^{\circ} 3'$

se poate neglija. Într-adevăr reiese (din corolarul 1, propoziția XLV, Cartea I) că dacă distanța Lunii de la centrul Pământului este către semidiametrul Pământului precum D către 1; forța din care ia naștere o astfel de mișcare este în raport invers cu $D^2 \frac{4}{243}$, adică în raport invers cu acea putere a lui D al cărei exponent este $2 \frac{4}{243}$, adică într-un raport al distanței ceva mai mare decât inversul pătratului, dar care este mai aproape de raportul pătratului cu $59 \frac{3}{4}$ părți decât de al cubului. Dar ea provine din acțiunea Soarelui (după cum vom spune de aici înainte) și de aceea aici o vom neglija. Acțiunea Soarelui întrucât ea abate Luna de la Pământ, este aproximativ precum distanța Lunii de la Pământ; și deci (potrivit celor spuse în corolarul 2, propoziția XLV, Cartea I) este către forța centripetă a Lunii aproximativ precum 2 către 357,45, sau 1 către $178 \frac{29}{40}$. Și neglijând o forță așa de mare a Soarelui, forța rămasă cu care Luna este reținută pe orbită va fi în raport invers cu D^2 . Ceea ce de asemenea se va constata mai deplin comparând această forță cu forța gravitației, după cum se întâmplă în propoziția următoare.

COROLAR. Dacă forța centripetă mijlocie cu care Luna este reținută pe orbită crește mai întâi în raportul lui $177 \frac{29}{40}$ către $178 \frac{29}{40}$, apoi de asemenea în raportul pătratului semidiametrului Pământului către distanța mijlocie a centrului Lunii de la centrul Pământului: vom obține forța centripetă a Lunii la suprafața Pământului, admitând că coborînd la suprafața Pământului forța va crește neconținut în raportul invers al pătratului înălțimii.

PROPOZIȚIA IV. TEOREMA IV

Luna gravitează spre Pământ și, prin forța gravitației, totdeauna este abătută de la mișcarea rectilinie și este reținută pe orbita sa.

Distanța mijlocie a Lunii de la Pământ în syzigii este în semidiametri de-ai Pământului după Ptolemeu și cei mai mulți astronomi 59, după Vendelin și Huygens 60, după Copernic $60 \frac{1}{3}$, după Street $60 \frac{3}{5}$ și după Tycho $56 \frac{1}{2}$. Dar Tycho și toți aceia care adoptă tablele lui de refracție, construind refracțiile Soarelui și Lunii (cu totul împotriva naturii luminii) mai mari decât ale stelelor fixe, și aceasta cu aproape patru sau cinci minute, au mărit paralaxa Lunii cu tot atâtea minute, adică, cu aproape a douăsprezecea sau a cincisprezecea parte a întregii paralaxe. Să corectăm această eroare, și distanța va deveni aproape $60 \frac{1}{2}$ semidiametre terestre, cam cum indică ceilalți. Să presupunem că distanța medie în syzigii este de 60 de semidiametre; și perioada lunară față de stelele fixe se face în 27 zile, 7 ore, 43 minute, după cum afirmă astronomii; și circumferința Pământului este de 123 249 600 picioare pariziene, după cum au determinat-o Francezii prin măsurări: și dacă ne închipuim că Luna este lipsită de orice mișcare și lăsată liberă, astfel ca fiind acționată de întreaga forță, prin care (potrivit corolarului, propoziția III) este reținută pe orbita sa, cade spre

Pământ; căzînd în timpul unui minut va descrie $15\frac{1}{12}$ picioare pariziene. Aceasta se obține din calcul efectuat fie conform propoziției XXXVI, Cartea I, fie (ceea ce revine la același lucru) potrivit corolarului 9, propoziția IV a aceleiași Cărți. Căci sinus versus-ul arcului pe care Luna îl va descrie în timpul unui minut, în mișcarea sa medie la distanța de 60 semidiametre pămîntești, este de aproape $15\frac{1}{12}$ picioare pariziene, sau mai precis de 15 picioare, 1 deget și $1\frac{4}{9}$ linii. De unde, cum forța aceea apropiindu-se de Pământ crește în raport invers cu pătratul distanței, și deci la suprafața Pământului este de 60×60 ori mai mare decît în Lună; corpul căzînd cu forța aceea în regiunile noastre, ar trebui să descrie în timp de un minut $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$ picioare pariziene, și în spațiul unei secunde $15\frac{1}{12}$ picioare, sau mai precis 15 picioare, 1 deget și $1\frac{4}{9}$ linii. Și de fapt corpurile grele cad pe pământ cu acea forță. Căci lungimea pendulului, ce bate secunda la latitudinea Parisului, este de trei picioare pariziene și $8\frac{1}{2}$ linii după cum a observat H u y g e n s. Și înălțimea, pe care o descrie un corp greu căzînd în timpul unei secunde, este către jumătatea lungimii acestui pendul în raportul pătratului circumferinței cercului către diametrul ei (după cum a arătat și H u y g e n s) și deci este de 15 picioare pariziene, 1 deget, $1\frac{7}{9}$ linii. Și de aceea forța cu care este reținută Luna pe orbita sa, dacă ar cădea la suprafața Pământului, devine egală cu forța gravității de la noi, și deci (potrivit regulii I și II) este însăși forța pe care noi obișnuim să o numim gravitate. Căci dacă gravitatea ar fi diferită de ea, corpurile tinzînd spre Pământ sub influența ambelor corpuri unite ar cădea de două ori mai repede și căzînd timp de o secundă ar descrie $30\frac{1}{6}$ picioare pariziene: cu totul împotriva experienței.

Accest calcul se bazează pe ipoteza că Pământul este în repaus. Căci dacă Pământul și Luna s-ar mișca în jurul Soarelui, și în același timp s-ar roti în jurul centrului comun de greutate; menținînd legea gravității, distanța reciprocă a centrelor Lunii și a Pământului va fi de aproape $60\frac{1}{2}$ semidiametre terestre; după cum se poate afla făcînd calculul. Iar calculul se poate efectua potrivit propoziției LX, Cartea I.

SCOLIE

Demonstrația acestei propoziții se poate face mai pe larg astfel. Dacă în jurul Pământului s-ar învîrți mai multe Luni, după cum se întîmplă în sistemul lui Saturn sau Jupiter: timpurile lor periodice (prin argumentul inductiv) ar observa legea planetelor descoperită de K e p l e r, și de aceea forțele lor centripete ar fi în raport invers cu pătratele distanțelor de la centrul Pământului, potrivit propoziției I a acestei Cărți. Și dacă cea mai de jos dintre ele ar fi mică, și aproape ar atinge vîrfurile munților celor mai înalți: forța centripetă prin care ar fi reținută pe orbită, ar fi aproape egală cu greutatea corpurilor situate pe vîrfurile acelor munți (potrivit calculului

precedent), și ar face ca aceeași lunișoară, dacă ar fi lipsită de toată mișcarea cu care descrie orbita sa, din cauza lipsei forței centrifuge care o reținea pe orbită, să cadă pe Pământ, și anume cu aceeași viteză cu care corpurile grele cad din vârfurile acelor munți, din cauza egalității forțelor de cădere. Și dacă forța cu care lunișoara foarte mică coboară ar fi deosebită de gravitate, și lunișoara de asemenea ar fi grea pe Pământ la fel cu corpurile de pe vârfurile munților: lunișoara din cauza ambelor forțe unite ar cădea de două ori mai repede. De aceea cum ambele forțe, și acestea ale corpurilor grele, și acelea ale lunilor, tind spre centrul Pământului, și sînt asemenea și egale între ele, ele (potrivit regulii I și II) vor avea aceeași cauză. Și de aceea forța, cu care Luna este reținută pe orbita sa, va fi aceeași pe care noi obișnuim să o numim gravitate: și aceasta îndeosebi ca nu cumva lunișoara în vârful muntelui să fie lipsită de greutate, sau să cadă de două ori mai repede decît obișnuiesc să cadă corpurile grele.

PROPOZIȚIA V. TEOREMA V

Planetele din jurul lui Jupiter gravitează spre Jupiter, cele din jurul lui Saturn spre Saturn și cele din jurul Soarelui spre Soare, și prin forța gravității lor sînt abătute totdeauna de la mișcările rectilinii, și reținute pe orbite curbilinii.

Căci revoluțiile planetelor din jurul lui Jupiter în jurul lui Jupiter, a celor din jurul lui Saturn în jurul lui Saturn, și ale lui Mercur și Venus precum și ale celorlalte din jurul Soarelui în jurul Soarelui sînt fenomene de același gen cu revoluția Lunii în jurul Pământului; și de aceea (potrivit regulii III) depind de cauze de același gen: mai ales fiindcă s-a demonstrat că forțele, de care depind acele revoluții, sînt îndreptate spre centrul lui Jupiter, al lui Saturn și al Soarelui, și îndepărtîndu-se de Jupiter, Saturn și Soare descresc în același raport și lege cu care descrește forța gravității dacă ne îndepărtăm de Pământ.

COROLARUL 1. Gravitatea există așadar în toate planetele. Căci nimeni nu se îndoiește că Venus, Mercur și celelalte sînt corpuri de același gen cu Jupiter și Saturn. Și cum orice atracție potrivit legii a treia a mișcării este mutuală, Jupiter gravitează spre toți sateliții săi, Saturn spre ai săi, și Pământul spre Lună, și Soarele spre toate planetele primare.

COROLARUL 2. Gravitatea, care tinde spre fiecare planetă, este în raport invers cu pătratul distanței locurilor de la centrul ei.

COROLARUL 3. Toate planetele sînt grele una față de alta, potrivit corolarului 1 și 2. Și deci Jupiter și Saturn atrăgîndu-se reciproc în apropierea conjuncțiunii, își perturbă în mod sensibil mișcările, Soarele perturbă mișcările Lunii, Soarele și Luna perturbă marea noastră, după cum se explică în cele ce urmează.

SCOLIE

Pînă acum am numit centripetă forța prin care corpurile cerești sînt reținute pe orbitele lor. Dar constatăm că ea este aceeași cu gravitatea, și de aceea de acum înainte o vom numi gravitate. Căci cauza forței centripete, prin care Luna este reținută pe orbită, trebuie extinsă la toate planetele potrivit regulii I, II și IV.

PROPOZIȚIA VI TEOREMA VI

Toate corpurile gravitează spre diversele planete și greutatea lor pe aceeași planetă oarecare, la distanțe egale de centrul planetei, sînt proporționale cu cantitatea de materie a fiecăruia.

Că toate corpurile grele cad spre Pămînt (cel puțin înlăturînd întîrzierea neegală provenită din rezistența slabă a aerului) în timpuri egale, s-a observat de mult de către alții; și că egalitatea timpurilor se poate constata foarte precis cu pendulele. Am făcut experiența cu aur, argint, plumb, sticlă, nisip, sare comună, lemn, apă, grîu. Am folosit două cutii de lemn rotunde și egale. Pe una am umplut-o cu lemn, și aceeași greutate de aur am atîrnat-o (cît se poate de exact) în centrul de oscilație al celeilalte. Cutiile atîrnate de fire egale de 11 picioare, formau pendule cu totul egale, în ceea ce privește greutatea, forma și rezistența aerului: și situate una lîngă alta mergeau și se întorceau împreună cu oscilații egale timp foarte îndelungat. Prin urmare cantitatea de materie în aur (potrivit corolarului 1 și 6, propoziția XXIV, Cartea a II-a) era către cantitatea de materie în lemn, precum acțiunea forței motoare asupra aurului întreg către acțiunea aceleiași asupra lemnului întreg: adică, precum greutatea către greutate. Și tot așa pentru celelalte. În corpurile de aceeași greutate s-a putut observa în mod manifest o diferență de materie, chiar dacă ea ar fi fost mai mică decît a mia parte a întregii materii. Dar nu este nici o îndoială că natura gravitației către planete este aceeași ca și către Pămînt. Căci să ne închipuim că s-au ridicat corpurile terestre pînă la orbita Lunii, și că s-au lăsat libere împreună cu Luna lipsite de orice mișcare, ca să cadă deodată la Pămînt; și prin cele arătate deja mai sus este sigur că în timpuri egale vor descrie spații egale împreună cu Luna, și deci că sînt către cantitatea materiei din Lună, precum gravitațiile lor către gravitatea ei. Apoi deoarece sateliții lui Jupiter se rotesc în timpuri care sînt în raportul puterii $3/2$ a distanțelor de la centrul lui Jupiter, gravitațiile lor acceleratoare spre Jupiter vor fi în raport invers cu pătratele distanțelor de la centrul lui Jupiter; și de aceea la distanțe egale de la Jupiter, gravitațiile lor acceleratoare vor fi egale. De aceea căzînd în timpuri egale de la înălțimi egale, vor descrie spații egale; la fel cum fac corpurile grele pe Pămîntul nostru. Și din aceeași cauză planetele din jurul Soarelui, lăsate libere de la distanțe egale de la Soare, în căderea lor spre Soare vor descrie în timpuri egale spații egale. Iar forțele, cu care corpurile neegale se accelerează în mod egal, sînt precum corpurile; adică, greutatea precum cantitățile de materie în planete. Apoi că gravitatea lui Jupiter și a sateliților săi spre Soare sînt proporționale cu cantitățile lor de materie este evident din mișcarea foarte regulată a sateliților; potrivit corolarului 3, propoziția LXV, Cartea I. Căci dacă unii din aceștia ar fi atrași mai tare spre Soare, în raport cu cantitatea lor de materie, decît ceilalți: mișcările sateliților (potrivit corolarului 2, propoziția LXV, Cartea I) ar fi perturbate din cauza neegalității atracției. Dacă, la distanțe egale de Soare, un satelit oarecare ar fi mai greu spre Soare în proporție cu cantitatea sa de materie, decît Jupiter în raport cu cantitatea sa de materie, după un raport oarecare dat, anume d către e : distanța dintre centrul Soarelui și centrul orbitei satelitului, va fi totdeauna mai mare decît distanța dintre centrul Soarelui și centrul lui Jupiter aproape în raportul

rădăcinii pătrate; după cum am găsit printr-un calcul făcut odinioară. Și dacă satelitul ar fi mai ușor spre Soare în raportul lui d către e , distanța centrului orbitei satelitului de Soare va fi mai mică decât distanța centrului lui Jupiter de Soare în raportul rădăcinii pătrate. Și de aceea dacă la distanțe egale de Soare, gravitatea acceleratoare a unui satelit oarecare spre Soare ar fi mai mare sau mai mică decât gravitatea acceleratoare a lui Jupiter spre Soare, numai cu $\frac{1}{1000}$ din întreaga gravitate; distanța centrului orbitei satelitului de la Soare va fi mai mare sau mai mică decât distanța lui Jupiter de la Soare cu $\frac{1}{2000}$ părți a distanței întregului, adică, cu a cincina parte a distanței satelitului extrem de la centrul lui Jupiter: excentricitatea orbitei care va fi foarte sensibilă. Dar orbitele sateliților sînt concentrice cu Jupiter, și de aceea gravitățile acceleratoare ale lui Jupiter și ale sateliților spre Soare sînt egale între ele. Și din aceeași cauză greutatea lui Saturn și a sateliților săi față de Soare, la distanțe egale de Soare, sînt precum cantitățile de materie din ele: și greutatea Lunii și Pămîntului spre Soare sînt sau nule sau exact proporționale cu masele lor. Dar potrivit corolarului 1 și 3, propoziția V, ele au oarecare greutate.

Mai departe greutatele diverselor părți ale unei planete oarecare față de o alta sînt între ele precum materia în acele părți. Căci dacă unele părți ar gravita mai mult, altele mai puțin, decât în proporția cantităților de materie; planeta întreagă, după felul părților în care abundă mai mult, ar gravita mai mult sau mai puțin decât în proporția cantității de materie a întregului. Dar nu are importanță dacă acele părți sînt externe sau interne. Căci dacă de exemplu ne închipuim că corpurile terestre, care sînt la noi, se ridică la orbita Lunii, și se compară cu corpul Lunii: dacă greutatele lor sînt către greutatele părților externe ale Lunii precum cantitățile de materie din ele, iar către greutatele părților interne după un raport mai mare sau mai mic, ele vor fi către greutatea întregii Luni după un raport mai mare sau mai mic: împotriva celor demonstrate mai sus.

COROLARUL 1. De aceea greutatele corpurilor nu depind de forma și structura lor. Căci dacă pot varia cu formele, vor fi mai mari sau mai mici, după varietatea formelor, în materie egală: cu totul împotriva experienței.

COROLARUL 2. Toate corpurile, care sînt în jurul Pămîntului, sînt grele față de Pămînt; și greutatele tuturor, care sînt la distanță egală de centrul Pămîntului, sînt precum cantitățile de materie în ele. Aceasta este calitatea tuturor cu care s-au putut face experiențe, și de aceea potrivit regulii III trebuie afirmat despre toate. Dacă eterul sau un alt corp oarecare ar fi cu totul lipsit de gravitate, sau ar gravita în raport mai mic decât cantitatea materiei sale: deoarece el (după *Aristotel*, *Descartes* și alții) nu diferă de alte corpuri decât prin forma materiei, el s-ar putea transforma prin schimbarea formei în mod treptat într-un corp de aceeași condiție cu acelea, care gravitează mai mult decât în raportul cantității de materie, și la rîndul lor corpurile mai grele luînd treptat forma aceluia, ar putea să-și piardă treptat gravitatea. Și deci greutatele ar depinde de forma corpurilor, și ar putea varia cu formele, împotriva celor demonstrate în corolarul de mai sus.

COROLARUL 3. Nu toate spațiile sînt pline în mod egal. Căci dacă toate spațiile ar fi pline în mod egal, greutatea specifică a fluidului care umple

regiunea aerului, din cauza extremei densități a materiei, nu ar ceda greutatei specifice a mercurului, sau a aurului, sau a altui corp oarecare foarte dens; și de aceea nici aurul și nici un alt corp oarecare n-ar putea cădea în aer. Căci corpurile nu cad în fluide, decât dacă sînt specific mai grele. Căci dacă cantitatea de materie într-un spațiu oarecare se poate micșora printr-o rarefiere oarecare, pentru ce nu s-ar putea micșora la infinit?

COROLARUL 4. Dacă toate particulele solide ale tuturor corpurilor ar avea aceeași densitate, și nici nu pot fi rarefiate fără pori, trebuie să existe un vid. Zic că au aceeași densitate acelea, ale căror forțe de inerție sînt precum mărimile.

COROLARUL 5. Forța gravității este de natură diferită de a forței magnetice. Căci atracția magnetică nu este precum materia atrasă. Unele corpuri sînt atrase mai mult, altele mai puțin, cele mai multe nu sînt atrase. Și forța magnetică în unul și același corp se poate mări și micșora, și uneori este cu mult mai mare proporțional cu cantitatea de materie decât forța gravitațională, și cu depărtarea de la magnet scade nu cu pătratul distanței, ci aproape cu cubul ei, după cum am putut observa din unele experiențe grosolane.

PROPOZIȚIA VII. TEOREMA VII

Gravitatea există în toate corpurile, și este proporțională cu cantitatea de materie din fiecare.

Am demonstrat mai sus că toate planetele sînt grele între ele, precum și că gravitatea în fiecare din ele considerate separat este în raport invers cu pătratul distanței locurilor de la centrul planetei. Și de aici urmează (potrivit propoziției LXIX, Cartea I și corolarelor ei) că gravitatea în toate este proporțională cu materia din ele.

Apoi cum toate părțile unei planete oarecare A sînt grele față de oricare planetă B , și gravitatea oricărei părți este către gravitatea întregii, precum materia părții către materia întregii, și cu orice acțiune este egală (potrivit legii a treia) reacțiunea; planeta B la rîndul său va gravita spre toate părțile planetei A , și gravitatea sa față de fiecare parte va fi către gravitatea sa întreagă, precum materia părții către materia întregului. Q.E.D.

COROLARUL 1. Prin urmare gravitatea se naște și se compune față de întreaga planetă din gravitatea față de diversele părți. Exemple de acest fel avem în atracțiile magnetice și electrice. Căci orice atracție față de întreg provine din atracțiile față de diversele părți. Acest lucru se înțelege în gravitate, închipuindu-ne că mai multe planete mai mici se unesc într-o sferă și formează o planetă mai mare. Căci forța întregului ar trebui să provină din forțele părților componente. Dacă cineva obiectează că toate corpurile, care sînt la noi, conform acestei legi ar trebui să graviteze unul spre altul și totuși o gravitate de acest fel nu se simte nicăieri; răspund că această gravitate, deoarece este către greutatea față de întreg Pămîntul precum sînt aceste corpuri către întreg Pămîntul, este cu mult prea mică pentru a putea fi simțită.

COROLARUL 2. Graviția din diversele particule egale este în raport invers cu pătratul distanței locurilor de la particule. Rezultă aceasta din corolarul 3, propoziția LXXIV, Cartea I.

PROPOZIȚIA VIII TEOREMA VIII

Dacă materia a două sfere care gravitează una spre alta în toate regiunile, care sînt la distanțe egale de centre este omogenă, greutatea uneia dintre sfere față de cealaltă va fi în raport invers cu pătratul distanței dintre centre.

După ce am aflat că gravitatea față de planeta întreagă provine și se compune din gravitățile spre părți; și că în diversele părți ea este invers proporțională cu pătratele distanțelor de la părți: mă îndoiam dacă raportul invers al pătratelor se obține precis față de forța întreagă compusă din mai multe forțe, sau numai aproximativ. Căci s-ar putea întâmpla ca proporția, care la distanțe mai mari se poate obține destul de precis, lângă suprafața planetei din cauza neegalității distanțelor particulelor și situației neasemănătoare, să difere în mod apreciabil. Totuși, în sfîrșit, potrivit propozițiilor LXXV și LXXVI, Cartea I și corolarelor lor, am înțeles adevărul propoziției de care este vorba aici.

COROLARUL 1. De aici se pot afla și compara între ele greutatețile corpurilor față de diversele planete. Căci greutatețile corpurilor egale ce se rotesc pe cercuri în jurul planetelor sînt (potrivit corolarului 2, propoziția IV, Cartea I) precum diametrele cercurilor și în raport invers cu pătratele timpurilor periodice; și greutatețile la suprafețele planetelor, sau la oricare alte distanțe de centru, sînt mai mari sau mai mici (potrivit acestei propoziții) în raport invers cu pătratul distanțelor. Astfel din timpurile periodice ale lui Venus în jurul Soarelui de 224 zile și $16\frac{3}{4}$ ore, ale satelitului exterior din jurul lui Jupiter de 16 zile și $16\frac{8}{15}$ ore, ale satelitului lui Huygens din jurul lui Saturn de 15 zile și $22\frac{2}{3}$ ore, și ale Lunii în jurul Pămîntului de 27 zile, 7 ore și 43 minute, comparate cu distanța mijlocie a lui Venus de Soare și cu elongația maximă heliocentrică a satelitului exterior din jurul lui Jupiter de la centrul lui Jupiter, $8' 16''$, a satelitului lui Huygens de la centrul lui Saturn, $3' 4''$ și a Lunii de la centrul Pămîntului, $10' 33''$ făcînd calculul am aflat că greutatețile corpurilor egale la distanțe egale de centrul Soarelui, al lui Jupiter, al lui Saturn și al Pămîntului sînt față de Soare, Jupiter, Saturn și Pămînt respectiv precum $1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{3021}$ și $\frac{1}{169282}$; și măbind sau micșorînd distanțele, greutatețile se micșorează sau se măresc în raportul pătratului: greutatețile corpurilor egale spre Soare, Jupiter, Saturn și Pămînt la distanțele de 10000, 997, 791 și 109 de centrele lor, și deci față de suprafețele lor vor fi respectiv precum 10000, 943, 529, și 435. Cît de mari sînt greutatețile corpurilor la suprafața Lunii se va spune în cele ce urmează.

COROLARUL 2. Se cunoaște de asemenea cantitatea de materie în diversele planete. Căci cantitățile de materie în planete sînt precum forțele lor la distanțe egale de centrele lor, adică, în Soare, Jupiter, Saturn și Pămînt sînt respectiv precum $1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{3021}$ și $\frac{1}{169282}$. Dacă paralaxa Soarelui se ia mai mare sau mai mică decît $10'' 30''$ cantitatea de materie în Pămînt va trebui mărită sau micșorată în raportul cubului.

COROLARUL 3. Se cunosc și densitățile planetelor. Căci greutatețile corpurilor egale și omogene spre sfere omogene sînt la suprafețele sferelor precum

diametrele sferelor, potrivit propoziției LXXII, Cartea I și deci densitățile sferelor eterogene sînt precum greutatea aplicate la diametrele sferelor. Dar diametrele adevărate al Soarelui, al lui Jupiter, ale lui Saturn și al Pămîntului sînt între ele precum 10000, 997, 791 și 109, și greutatea față de acestea respectiv precum 10000, 943, 529 și 435, și de aceea densitățile sînt precum 100, $94\frac{1}{2}$, 67 și 400. Densitatea Pămîntului care provine din aceste calcule, nu depinde de paralaxa Soarelui ci se determină prin paralaxa Lunii, și de aceea aici se definește corect. Așadar, Soarele este cu puțin mai dens decît Jupiter, și Jupiter decît Saturn, și Pămîntul de patru ori mai dens decît Soarele. Căci din cauza căldurii sale foarte mari Soarele se rarefiază. Dar Luna este mai densă decît Pămîntul, după cum se va arăta în cele ce urmează.

COROLARUL 4. Prin urmare în condiții egale, planetele care sînt mai mici sînt mai dense. Căci astfel forța gravitației pe suprafețele lor se apropie mai mult de egalitate. Pe de altă parte, în condiții egale, planetele care sînt mai aproape de Soare sînt mai dense; astfel Jupiter decît Saturn, și Pămîntul decît Jupiter. Planetele trebuiau așezate la distanțe diferite de Soare ca fiecare să se poată bucura de căldura mai mare sau mai mică a Soarelui după gradul de densitate. Apa noastră, dacă Pămîntul ar fi situat pe orbita lui Saturn ar îngheța, dacă ar fi pe orbita lui Mercur imediat s-ar transforma în vapori. Căci lumina Soarelui cu care căldura este proporțională, este de șapte ori mai densă pe orbita lui Mercur decît la noi și cu ajutorul termometrului am aflat că la căldura de șapte ori mai mare decît a Soarelui de vară apa fierbe. De fapt nu încapă îndoială că materia lui Mercur se acomodează la căldură, și de aceea este mai densă decît a noastră; fiindcă orice materie mai densă supunîndu-se la operațiile naturale pretinde o căldură mai mare.

PROPOZIȚIA IX. TEOREMA IX

Gravitația progresînd de la suprafețele planetelor în jos descreește aproximativ în raportul distanțelor de la centru.

Dacă materia planetei în ce privește densitatea ar fi uniformă, s-ar obține această propoziție precis: potrivit propoziției LXXIII, Cartea I. Deci eroarea este atît de mare, cîtă poate proveni din inegalitatea densității.

PROPOZIȚIA X. TEOREMA X

Mișcarea planetelor în ceruri se poate păstra timp foarte îndelungat.

În scolia propoziției XL, Cartea a II-a, s-a arătat că o sferă de apă înghețată, mișcîndu-se liber în aerul nostru și descriind lungimea semidiametrului său, ar pierde din cauza rezistenței aerului $\frac{1}{4586}$ din mișcarea sa. Dar se obține aproximativ aceeași proporție în sfere oricît de mari și de repezi. Iar că sfera Pămîntului nostru este mai densă, decît dacă întreagă ar consta din apă, o deduc astfel. Dacă această sferă ar fi întreagă de apă, cele care ar fi mai rare decît apa, din cauza greutății specifice mai mici ar ieși la suprafață și ar înota deasupra. Din aceeași cauză sfera pămîntească

acoperită pretutindenea cu ape, dacă ar fi mai rară decît apa, ar ieși undeva la suprafață și toată apa scurgîndu-se de acolo s-ar aduna în regiunea opusă. Și la fel este situația Pămîntului nostru înconjurat în mare parte de mări. Acesta dacă nu ar fi mai dens, ar ieși din mări, și cu o parte a sa după gradul său de ușurătate ar ieși din apă, toate mările adunîndu-se în regiunea opusă. Din aceeași cauză petele solare sînt mai ușoare decît materia lucidă solară deasupra căreia înoată. Și în oricare formare a planetelor, toată materia mai grea din apă, în timp ce masa era fluidă, tindea spre centru. De unde cum Pămîntul obișnuit de la suprafață este aproape de două ori mai greu ca apa, și cu puțin mai jos în mine se află că este aproape de trei, patru, ba chiar de cinci ori mai greu: este verosimil că întreaga materie din pămînt este aproape de cinci sau șase ori mai mare decît dacă tot Pămîntul ar consta din apă; mai ales că mai sus s-a arătat că Pămîntul este de patru ori mai dens decît Jupiter. De aceea dacă Jupiter este cu ceva mai dens decît apa, acesta în timp de treizeci de zile, în care descrie lungimea 459 a semidiametrelor sale, ar pierde într-un mediu de aceeași densitate cu aerul nostru aproape a zecea parte din mișcarea sa. Dar cum rezistența mediilor scade în raportul greutatei și densității, astfel că apa care este de $13\frac{3}{5}$ mai ușoară ca mercurul, rezistă mai puțin în același raport; și aerul care este de 860 de ori mai ușor ca apa, rezistă mai puțin în același raport: dacă ne urcăm în ceruri unde greutatea mediului, în care se mișcă planetele, se micșorează imens de mult, rezistența aproape va dispărea. Am arătat în scolia de la propoziția XXII, Cartea a II-a că dacă ne-am urca la înălțimea de două sute de mile deasupra Pămîntului, acolo aerul ar fi mai rar decît la suprafața Pămîntului în raportul de 30 la 0,0000000000003998 sau aproximativ 75000000000000 la 1. Și deci steaua lui Jupiter, învîrtindu-se într-un mediu de aceeași densitate cu aerul de sus timp de 1000000 ani, din cauza rezistenței sale, nu ar pierde a milioana parte din mișcarea sa. Căci în spațiile apropiate de Pămînt, nu se află nimic pentru a crea o rezistență afară de exalațiile aerului și de vaporii. Scoțînd acestea dintr-o sticlă goală cilindrică cu foarte mare grijă corpurile grele din interiorul sticlei cad foarte liber și fără nici o rezistență sensibilă; însuși aurul și un fulg foarte ușor lăsate de o dată cad cu o viteză egală și în căderea lor descriind o înălțime de patru, șase sau opt picioare cad deodată la fund, după cum s-a aflat prin experiență. Și de aceea dacă ne urcăm în cerurile vide de aer și de exalații, planetele și cometele se vor mișca fără nici o rezistență sensibilă prin acele spații timp foarte îndelungat.

I P O T E Z A 1

Centrul sistemului lumii este în repaus.

Aceasta a fost admisă de toți, în timp ce unii afirmă că în centrul sistemului este în repaus Pămîntul, alții că este Soarele. Să vedem ce rezultă de aici.

P R O P O Z I Ț I A X I. T E O R E M A X I

Centrul comun de greutate al Pămîntului, Soarelui și tuturor planetelor este în repaus.

Căci acel centru (potrivit corolarului IV al legilor) sau este în repaus sau progresa uniform în direcție. Dar acel centru progresând totdeauna centrul lumii de asemenea se va mișca, contrar ipotezei.

PROPOZIȚIA XII. TEOREMA XII

Soarele este agitat de o mișcare perpetuă, dar niciodată nu se îndepărtează mult de centrul comun de greutate al tuturor planetelor.

Căci cum (potrivit corolarului 2, propoziția VIII) materia din Soare este către materia din Jupiter precum 1067 către 1, și distanța lui Jupiter de la Soare este către semidiametrul Soarelui într-un raport cu puțin mai mare; centrul comun de greutate al lui Jupiter și al Soarelui va cădea într-un punct cu puțin deasupra suprafeței Soarelui. Din aceeași cauză cum materia din Soare este către materia din Saturn precum 3021 către 1, și distanța lui Saturn de Soare este către semidiametrul Soarelui într-un raport cu ceva mai mic: centrul comun de greutate al lui Saturn și al Soarelui va cădea într-un punct cu ceva dedesuptul suprafeței Soarelui. Și făcând același calcul dacă Pământul și toate planetele ar consta dintr-o parte a Soarelui, centrul comun de greutate al tuturor abia ar fi la distanța de un diametru întreg de centrul Soarelui. În alte cazuri distanța centrelor totdeauna este mai mică. Și de aceea cum centrul de greutate este în repaus perpetuu, Soarele din cauza poziției variate a planetelor se va mișca în toate părțile dar niciodată nu se va îndepărta mult de acel centru.

COROLAR. De aceea centrul comun de greutate al Pământului, al Soarelui și al tuturor planetelor trebuie luat ca centru al lumii. Căci cum Pământul, Soarele și toate planetele gravitează una spre alta, și de aceea prin forța greutateii lor, se agită neconținut, conform legilor mișcării: este evident că centrele lor mobile nu pot fi luate ca centru în repaus al lumii. Dacă ar trebui pus acel corp în centru spre care gravitează mai mult toate corpurile (după cum este opinia comună) acel privilegiu trebuie atribuit Soarelui. Dar cum Soarele se mișcă, trebuie ales punctul în repaus, de care centrul Soarelui se îndepărtează foarte puțin, și de care acesta s-ar îndepărta și mai puțin, dacă Soarele ar fi mai dens și mai mare, ca să se miște mai puțin.

PROPOZIȚIA XIII. TEOREMA XIII

Planetele se mișcă pe elipse având un focar în centrul Soarelui, și cu razele duse la acel centru descriu arii proporționale cu timpurile.

Am vorbit mai sus despre aceste mișcări din fenomene. Cunosând acum principiile mișcărilor, din ele am dedus *a priori* mișcările cerești. Deoarece greutatea planetelor față de Soare sînt în raport invers cu pătratele distanțelor de la centrul Soarelui; dacă Soarele ar fi în repaus și celelalte planete nu ar acționa una asupra alteia, orbitele lor ar fi eliptice avînd Soarele în focarul comun și ariile s-ar descrie în timpuri proporționale (potrivit propozițiilor I și XI și corolarului I, propoziția XIII, Cartea I). Dar acțiunile planetelor între ele sînt foarte mici (încît pot fi neglijate) și perturbă mai puțin mișcările planetelor pe elipse în jurul Soarelui mobil (potrivit propoziției

LXVI, Cartea I) decît dacă aceste mișcări ar fi efectuate în jurul Soarelui în repaus.

E adevărat că acțiunea lui Jupiter asupra lui Saturn nu este de loc neglijabilă. Căci gravitatea pe Jupiter este către gravitatea pe Soare (la distanțe egale) precum 1 la 1067; și deci în conjuncțiunea lui Jupiter și Saturn, deoarece distanța lui Saturn la Jupiter este către distanța lui Saturn la Soare precum 4 către 9, gravitatea lui Saturn față de Jupiter va fi către gravitatea lui Saturn față de Soare precum 81 către 16×1067 sau aproape 1 către 211. Și de aici provine perturbația orbitei lui Saturn în diversele conjuncțiuni ale acestei planete cu Jupiter, atît de sensibilă încît astronomii au observat-o. Din cauza situației variate a planetei în aceste conjuncțiuni, excentricitatea ei cînd crește, cînd scade, afeliul este dus cînd înainte cînd înapoi, și mișcarea mijlocie este pe rînd accelerată și întîrziată. Totuși toată eroarea în mișcarea lui în jurul Soarelui ce trebuie să provină de la o forță atît de mare (afară de mișcarea medie) poate fi aproape evitată punînd focarul de jos al orbitei sale în centrul comun de greutate al lui Jupiter și al Soarelui (potrivit propoziției LXVII, Cartea I) și de aceea cînd este mai mare, abia trece de două minute. Și eroarea maximă în mișcarea medie abia întrece două minute pe an. Dar în conjuncțiunea lui Jupiter și Saturn gravitățile acceleratoare ale Soarelui față de Saturn, ale lui Jupiter față de Saturn și ale lui Jupiter față de Soare sînt aproape ca 16,81 și $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ sau 156 609, și deci diferența gravităților Soarelui spre Saturn și a lui Jupiter spre Saturn este către gravitatea lui Jupiter spre Soare precum 65 către 156 609 sau 1 la 2409. Dar cu această diferență este proporțională capacitatea maximă a lui Saturn de a perturba mișcarea lui Jupiter, și de aceea perturbarea orbitei lui Jupiter este cu mult mai mică decît aceea a lui Saturn. Perturbațiile celorlalte orbite sînt cu mult mai mici cu excepția că orbita Pămîntului este în mod sensibil perturbată de Lună. Centrul comun de greutate al Pămîntului și al Lunii parcurge o elipsă în jurul Soarelui situat în focar și cu raza dusă la Soare descrie arii proporționale cu timpurile, iar Pămîntul se învîrtește în jurul acestui centru comun cu o mișcare lunară.

PROPOZIȚIA XIV. TEOREMA XIV

Afeliile și nodurile orbitelor sînt în repaus.

Afeliile sînt în repaus, potrivit propoziției XI, Cartea I precum și planele orbitelor; și potrivit propoziției I a aceleiași Cărți fiind în repaus planele sînt în repaus și nodurile. Totuși din cauza acțiunilor între ele a planetelor în rotație și a cometelor se nasc oarecare inegalități, dar care fiind mici se pot neglija aici.

COROLARUL 1. Sînt în repaus și stelele fixe, deoarece păstrează poziții date față de afelii și noduri.

COROLARUL 2. Și de aceea cum ele nu au paralaxă sensibilă născută din mișcarea anuală a Pămîntului, forțele lor din cauza distanței imense a corpurilor nu produc nici un efect sensibil în regiunea sistemului nostru. Mai mult încă, stelele fixe împrăștiate în toate părțile cerului în mod egal prin atracții contrare distrug forțele mutuale, potrivit propoziției LXX, Cartea I.

SCOLIE

Cum planetele mai apropiate de Soare (anume Mercur, Venus, Pământul și Marte) din cauza micimii corpurilor acționează puțin unul asupra altuia: afeliile și nodurile acestora sînt în repaus, dacă nu cumva sînt perturbate de forțele lui Jupiter, Saturn și ale corpurilor superioare. Și de aici se poate deduce prin teoria gravitației, că afeliile lor se mișcă întrucîtva înainte față de stelele fixe, și aceasta în raportul puterii $\frac{3}{2}$ a distanțelor acestor planete de la Soare. Astfel dacă afeliul lui Marte într-o sută de ani face 33'20" progresiv față de stelele fixe; afeliile Pământului, ale lui Venus, și ale lui Mercur într-o sută de ani vor progresa respectiv 17' 40", 10'53", și 4' 16". Și aceste mișcări, fiind mici, se neglijează în această propoziție.

PROPOZIȚIA XV. PROBLEMA I

Să aflăm diametrele principale ale orbitelor.

Acestea trebuie luate în raportul puterii $\frac{2}{3}$ a timpurilor periodice, potrivit propoziției XV, Cartea I apoi fiecare mărit în raportul sumei maselor Soarelui și a fiecărei planete se învîrtesc către prima din cele două medii proporționale între acea sumă și Soare, potrivit propoziției LX, Cartea I.

PROPOZIȚIA XVI PROBLEMA II

Să aflăm excentricitățile și afeliile orbitelor.

Problema se rezolvă prin propoziția XVIII, Cartea I.

PROPOZIȚIA XVII. TEOREMA XV

Mișcările diurne ale planetelor sînt uniforme, și vibrația Lunii provine din mișcarea ei diurnă.

Propoziția se demonstrează prin legea I a mișcării și corolarului 22, propoziția LXVI, Cartea I. Jupiter față de stelele fixe se rotește în 9 ore, 56 minute, Marte în 24 ore, 39 minute, Venus în circa 23 ore, Pământul în 23 ore, 56 minute, Soarele în $25\frac{1}{2}$ zile și luna în 27 zile, 7 ore și 43 minute.

Aceasta se vede din fenomene. Petele din corpul Soarelui se întorc în aceeași poziție pe Sdiscul oarelui în circa $27\frac{1}{2}$ zile, față de Pământ; și deci față de stelele fixe Soarele se învîrtește în circa $25\frac{1}{2}$ zile. Dar fiindcă ziua Lunii ce se învîrtește în mod uniform în jurul axei sale este de o lună: aceeași față a acesteia totdeauna va privi aproximativ spre focarul mai îndepărtat al orbitei sale, și de aceea din cauza situației aceluia focar va devia înapoi și încolo de la Pământ. Aceasta este librația Lunii în longitudine: căci librația în latitudine s-a născut din latitudinea Lunii și înclinarea axei ei față de planul eclipticei. Această teorie a librației lunare a expus-o mai pe larg în baza scrisorilor mele d-l N. M e r c a t o r în Astronomia sa editată la începutul anului 1676. Se pare că satelitul extrem al lui Saturn se rotește în jurul axei sale cu o mișcare analogă, privind totdeauna pe Saturn cu aceeași față. Căci, învîrtindu-se în jurul lui Saturn, de cîte ori se apropie de partea

orientală a orbitei sale, abia se vede, și de multe ori nu se vede de loc: ceea ce se poate întâmpla din cauza unor pete în partea aceea a corpului care atunci este îndreptată spre Pământ, după cum a observat Cassini. Se pare de asemenea că satelitul extrem al lui Jupiter se rotește în jurul axei sale cu o mișcare analogă, fiindcă în partea corpului care este întoarsă de la Jupiter are o pată care se pare a fi în corpul lui Jupiter când sateliul trece între Jupiter și ochii noștri.

PROPOZIȚIA XVIII. TEOREMA XVI

Axele planetelor sînt mai mici decît diametrele duse normal pe acele axe.

Planetele lipsite de orice mișcare zilnică circulară ar trebui să ia o figură sferică, din cauza egalității gravitației părților în toate direcțiile. Din cauza mișcării circulare părțile îndepărtate de axă tind să se ridice în jurul ecuatorului. Și deci dacă materia este fluidă prin urcarea sa la ecuator va mări diametrele iar prin coborîrea sa la poli va micșora axa. Astfel diametrul lui Jupiter (observațiile astronomilor fiind de acord) se constată că este mai scurt între poli decît de la răsărit la apus. Din aceeași cauză, dacă Pământul nostru nu ar fi cu ceva mai înalt la ecuator decît la poli, mările s-ar coborî la poli, și urcîndu-se la ecuator, ar inunda acolo toate.

PROPOZIȚIA XIX. PROBLEMA III

Să aflăm proporția axei planetei către diametrele ei perpendiculare.

Compatriotul nostru Norwood măsurînd cam pe la 1635 o distanță de 905 751 picioare londoneze între Londra și York și observînd că diferența lungimilor este de $2^{\circ} 28'$; a aflat că măsura unui grad este de 367 196 picioare londoneze, adică de 57 300 stînjieni parizieni.

Picard măsurînd un arc de un grad și $22' 55''$ pe meridianul dintre Amiens și Malvoisine, a aflat că arcul de un grad este de 57 060 stînjieni parizieni. Cassini tatăl a măsurat distanța pe meridian de la orașul Callioure în Roussillon pînă la Observatorul din Paris; și fiul lui a adăugat distanța de la observator pînă la turnul orașului Dunquerque. Distanța întreagă era de 486 156 $\frac{1}{2}$ stînjieniși diferența de latitudine a orașului Callioure și a orașului Dunquerque era de $8^{\circ} 31' 11\frac{5}{6}''$. De unde arcul de un grad dă 57 061 stînjieni parizieni. Și din aceste măsuri se obține circumferința Pământului de 123 249 600 picioare pariziene și semidiametrul lui de 19 615 800 picioare, în ipoteza că Pământul este sferic.

La latitudinea Parisului un corp greu căzînd timp de o secundă descrie 15 picioare pariziene, 1 deget, $1\frac{7}{9}$ linii ca mai sus, adică $2173\frac{7}{9}$ linii. Greutatea unui corp se micșorează prin greutatea aerului ambiant. Să presupunem că greutatea pierdută este a 11 000-a parte a întregii greutate, și corpul greu căzînd în vid va descrie înălțimea de 2174 linii în timp de o secundă.

Un corp învîrtindu-se uniform pe un cerc la o distanță de 19 615 800 picioare de la centru, în diversele zile siderale de $23^h 56^m 4^s$ în timp de o

Acum fiindcă (potrivit corolarului 3, propoziția XCI, Cartea I) gravitatea în fiecare braț al canalului $ACca$ sau $QCcq$ este precum distanța locurilor la centrul Pământului; dacă împărțim brațele prin suprafețe transversale și echidistante în părți proporționale cu întregul, greutatea diverselor părți în brațul $ACca$ vor fi către greutatea aceleiași număr de părți în celălalt braț, precum mărimile și gravitățile acceleratoare luate împreună; adică precum 101 către 100 și 500 către 501, sau precum 505 către 501. Și de aceea dacă forța centrifugă a unei părți oarecare în brațul $ACca$ produsă de mișcarea diurnă, ar fi către greutatea aceleiași părți precum 4 către 505 astfel că din greutatea fiecărei părți, împărțită în 505 părți, ar scoate patru părți; greutatea în ambele brațe ar rămâne egale, și de aceea fluidul ar rămâne în echilibru. Dar forța centrifugă a fiecărei părți este către greutatea ei precum 1 către 289, adică, forța centrifugă care ar trebui să fie $\frac{4}{505}$ părți a greutății este numai $\frac{1}{289}$ părți. Și de aceea zic, după regula de aur, că dacă forța centrifugă $\frac{4}{505}$ face ca înălțimea apei în brațul $ACca$ să întrecă înălțimea apei în brațul $QCcq$ cu a suta parte a întregii înălțimi: forța centrifugă $\frac{1}{289}$ va face ca excesul înălțimii în brațul $ACca$ să fie numai $\frac{1}{229}$ parte a înălțimii din celălalt braț $QCcq$. Așadar diametrul Pământului la ecuator este către diametrul la poli precum 230 către 229. Și deci cum semidiametrul mijlociu al Pământului după măsura lui Picard, este de 19615800 picioare pariziene, sau 3923,16 mile (admițând că o milă este o măsură de 5000 picioare) Pământul este mai înalt la ecuator decât la poli cu un surplus de 85472 picioare sau $17\frac{1}{10}$ mile. Și înălțimea la ecuator va fi de aproape 19658600 picioare, și la poli de 19573000 picioare.

Dacă o planetă este mai mare sau mai mică decât Pământul păstrânduși aceeași densitate și același timp periodic al revoluției zilnice, raportul forței centrifuge către greutate se va menține, și de aceea se va menține și proporția diametrului între poli către diametrul de la ecuator. Dar dacă mișcarea zilnică este accelerată sau întârziată într-un raport oarecare, forța centrifugă se va mări sau se va micșora cu pătratul acelui raport, și de aceea diferența diametrelor va crește sau va scădea aproximativ în același raport pătratic. Și dacă densitatea planetei crește sau scade într-un raport oarecare, gravitatea tinzând spre ea de asemenea se va mări sau micșora în același raport și diferența diametrelor la rîndul ei se va micșora în raportul gravității mărite sau se va mări în raportul gravității micșorate. De unde cum Pământul față de stelele fixe se învîrtește în 23 ore 56', iar Jupiter în 9 ore 56', și pătratele timpurilor sînt precum 25 către 5, și densitățile corpurilor ce se rotesc precum 400 către $94\frac{1}{2}$ diferența diametrelor lui Jupiter va fi către diametrul său cel mic precum $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ către 1, sau aproximativ 1 către $9\frac{1}{3}$. Prin urmare diametrul lui Jupiter dus de la răsărit la apus, este către diametrul lui între poli precum aproximativ $10\frac{1}{3}$ către $9\frac{1}{3}$. De unde, cum diametrul său cel mare este de 37", diametrul său cel mic care este situat între poli va fi de 33" 25". Să adăugăm aproximativ 3" pentru refracția nere-

gulată și diametrele aparente ale acestor planete vor deveni $40''$ și $36'' 25'''$: care sînt între ele precum aproximativ $11\frac{1}{6}$ către $10\frac{1}{6}$. Aceasta se întîmplă astfel în ipoteza că materia lui Jupiter este uniform de densă. Dar dacă materia lui este mai densă spre planul ecuatorului decît spre poli diametrele lui pot fi între ele precum 12 la 11, sau 13 la 12, sau poate 14 la 13. Și Cassini a observat în anul 1691, că diametrul lui Jupiter mergînd de la răsărit spre apus întrece diametrul celălalt cu aproape a cincisprezecea parte a sa. Iar compatriotul nostru Pound cu un telescop de 123 picioare lungime și un micrometru foarte bun, a măsurat diametrul lui Jupiter în anul 1719 după cum urmează.

	Timpurile		Diametrul maxim	Diametrul minim	Diametrele unul către altul
	zile	ore	părți	părți	
ianuarie ..	28	6	13,40	12,28	precum 12 către 11
martie . .	6	7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$ către $12\frac{3}{4}$
martie . .	9	7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$ către $11\frac{2}{3}$
aprilie . .	9	9	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$ către $13\frac{1}{2}$

Prin urmare teoria este de acord cu fenomenele. Căci planetele se încălzesc mai tare la lumina Soarelui spre ecuatorii lor, și de aceea acolo se condensează cu ceva mai mult decît spre poli. Mai mult, se va vedea din experiențele pendulelor despre care voi refera în propoziția următoare, că gravitatea din cauza rotației diurne a Pămîntului nostru se micșorează la ecuator și de aceea acolo Pămîntul se ridică mai sus decît la poli (dacă materia lui are o densitate uniformă).

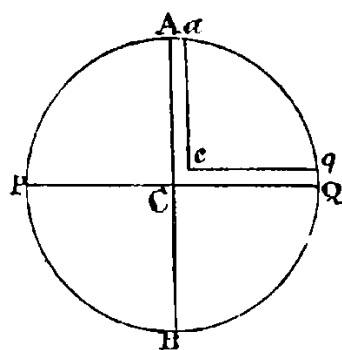
PROPOZIȚIA XX. PROBLEMA IV

Să aflăm și să comparăm între ele greutatețile corpurilor în diferite regiuni ale Pămîntului.

Deoarece greutatețile brațelor neegale ale canalului apei *ACQqca* sînt egale; și greutatețile părților, proporționale cu brațele întregi și situate în mod asemenea față de brațele întregi, sînt între ele precum greutatețile întregilor și deci sînt egale între ele: greutatețile părților egale și situate în mod analog față de brațe vor fi în raport invers cu brațele, adică, în raport invers precum 230 către 229. Și același este raportul oricăror corpuri omogene și egale și situate în mod analog în brațele canalului. Greutatețile acestora sînt în raport invers cu brațele, adică, în raport invers cu distanțele corpurilor de la centrul Pămîntului. Prin urmare dacă corpurile sînt situate în părțile de sus ale canalelor, adică la suprafața Pămîntului, greutatețile lor vor fi între ele în raport invers cu distanțele lor la centru. Și din aceeași cauză greutatețile, în oricare alte regiuni pe întreaga suprafață a Pămîntului, sînt în raport invers cu distanțele locurilor de la centru; și de aceea, în ipoteza că Pămîntul este un sferoid, sînt date în proporție.

De aici provine teorema, că creșterea greutății mergînd de la ecuator spre pol, este aproximativ precum sinus versus-ul dublului latitudinii sau, ceea ce este același lucru, precum pătratul sinus versus-ului latitu-

dinii; și aproape în același raport cresc arcele gradelor de latitudine în meridian. Și cum latitudinea *Parisului* este de $48^{\circ}50'$, aceea a locurilor sub ecuator $00^{\circ}00'$, și a locurilor la poli 90 grade și sinus versus-urile dublelor sînt



11 334,00000 și 20 000, raza fiind 10 000, și gravitatea la pol este către gravitatea la ecuator precum 230 către 229, și excesul gravității la pol față de gravitatea la ecuator precum 1 către 229: excesul gravității la latitudinea *Parisului* va fi către gravitatea la ecuator, precum $1 \times \frac{11\,334}{20\,000}$ către 229, sau 5667 către

2 290 000. Și de aceea greutatea întregi în aceste locuri vor fi între ele precum 2 295 667 către 2 290 000. De aceea cum lungimile pendulelor oscilatoare în timpuri egale sînt precum greutatea, și la latitudinea *Parisului* lungimea pendulului care

bate secunda este de 3 picioare pariziene și $8\frac{1}{2}$ linii, sau mai bine din cauza greutatea aerului $8\frac{5}{9}$: lungimea pendulului la ecuator va fi întrecută de lungimea pendulului sincron de la Paris, cu excesul de o linie și 87 părți de miimi de linie. Și printr-un calcul analog se alcătuieste tabloul următor.

Latitudi- nea locului grad	Lungimea pendulului		Măsura unui grad pe meridian stînjeni	Latitudi- nea locului grad	Lungimea pendulului		Măsura unui grad pe meridian stînjeni
	picioare	linii			picioare	linii	
0	3	7,468	56637	45	3	8,128	57010
5	3	7,482	56642	6	3	8,461	57022
10	3	7,526	56659	7	3	8,494	57035
15	3	7,596	56687	8	3	8,528	57048
20	3	7,692	56724	9	3	8,561	57061
25	3	7,812	56769	50	3	8,594	57074
30	3	7,948	56823	55	3	8,756	57138
35	3	8,099	56882	60	3	8,907	57196
40	3	8,261	56945	65	3	9,044	57250
1	3	8,294	56958	70	3	9,162	57295
2	3	8,327	56971	75	3	9,258	57332
3	3	8,361	56984	80	3	9,329	57360
4	3	8,394	56997	85	3	9,372	57377
				90	3	9,387	57382

Se constată însă din acest tablou că neegalitatea gradelor este atît de mică, încît în chestiuni de geografie figura Pămîntului poate fi considerată sferică: îndeosebi dacă Pămîntul este cu ceva mai dens spre planul ecuatorului decît spre poli.

Cîțiva astronomi trimiși în regiuni îndepărtate ca să facă observații astronomice, au observat că oroloagele oscilatorii se mișcă mai încet în apropierea ecuatorului decît în regiunile noastre. Și cel dintîi a observat acest lucru dl. *R i c h e r* în anul 1672 pe insula *Cayenne*. Căci în timp ce observa trecerea stelelor fixe prin meridian în luna august, el a observat că orologiul său se mișcă mai încet față de mișcarea medie a Soarelui, avînd o diferență de $2'28''$ pe zi. Apoi făcînd ca un pendul simplu să oscileze secunda măsurată cu un orologiu foarte bun, a notat lungimea pendulului

simplu, și a făcut aceasta de mai multe ori pe săptămână timp de 10 luni. Apoi reîntors în Franța a comparat lungimea acestui pendul cu lungimea pendulului de la Paris (care avea trei picioare pariziene, și opt linii cu trei cincimi de linie) și a constatat că este mai scurt, diferența fiind de o linie și un sfert.

După aceea compatriotul nostru *Halley* navigând cam pe la 1677 spre insula *Sf. Elena*, a constatat că orologiul său oscilatoriu acolo se mișcă mai încet decât la *Londra*, dar nu și-a notat diferența. Dînsul a scurtat însă pendulul cu mai mult decât a opta parte a unui deget, sau cu o linie și jumătate. Și ca să efectueze aceasta, cum lungimea șurubului în partea cea mai de jos a pendulului nu era suficientă, a pus un inel de lemn între piulița șurubului și greutatea pendulului.

Apoi în anul 1682 d-l *Varin* și d-l *Des Hayes* au găsit că lungimea pendulului ce bate secunda la Observatorul regal din Paris este de 3 picioare $8\frac{5}{9}$ linii. Și pe insula *Gorea* prin aceeași metodă au aflat că lungimea pendulului sincron este de 3 picioare $6\frac{5}{9}$ linii, existînd o diferență de lungime de 2 linii. Și în același an navigînd spre insulele *Guadeloupe* și *Martinica*, au aflat că lungimea pendulului sincron în aceste insule este de 3 picioare $6\frac{1}{2}$ linii.

După aceea d-l *Couplet* fiul, în anul 1697 luna iulie, și-a potrivit în așa fel orologiul său oscilator cu mișcarea medie a Soarelui la observatorul regal din Paris, ca într-un timp destul de lung orologiul să coincidă cu mișcarea Soarelui. Apoi navigînd spre *Lisabona* a aflat că în luna noiembrie următoare orologiul mergea mai încet decât mai înainte, existînd o diferență de $2'13''$ în 24 de ore. Și în luna martie următoare navigînd spre *Paraiba* a găsit că acolo orologiul său merge mai încet decât la *Paris*, existînd o diferență de $4'12''$ în 24 de ore. Și afirmă că pendulul ce bate secunda la *Lisabona* era mai scurt cu $2\frac{1}{2}$ linii și la *Paraiba* cu $3\frac{2}{3}$ linii decât la Paris. Mai precis ar fi putut să dea diferențele $1\frac{1}{3}$ și $2\frac{5}{9}$. Căci aceste diferențe corespund diferențelor de timpuri $2'12''$ și $4'12''$. Trebuie să avem puțină încredere în observațiile lui grosolane.

În anii următori (1699 și 1700) d-l *Des Hayes* călătorind din nou în *America*, a găsit că în insulele *Cayenne* și *Granada* lungimea pendulului ce oscilează secunda, este cu ceva mai mică decât 3 picioare $6\frac{1}{2}$ linii, și că în insula *Sf. Cristofor* lungimea lui este 3 picioare $6\frac{3}{4}$ linii, și că în insula *Sf. Dominic* ea este de 3 picioare 7 linii.

Și în anul 1704 d-l *Feuillé* a aflat la *Porto-Belo* în *America* că lungimea pendulului ce bate secunda, este de 3 picioare pariziene și numai $5\frac{7}{12}$ linii, adică, aproape cu trei linii mai scurtă decât la Paris, dar observația era greșită. Căci călătorind apoi în insula *Martinica*, a aflat că lungimea pendulului izocron este numai de trei picioare pariziene și $5\frac{10}{12}$ linii.

Dar *Paraiba* are $6^{\circ}38'$, latitudine sudică și *Porto-Belo* $9^{\circ}33'$ latitudine nordică, și latitudinile insulelor *Cayenne*, *Gorea*, *Guadeloupe*, *Martinica*,

Granada, Sf. Christofor și Sf. Dominic sînt respectiv $4^{\circ}55'$, $14^{\circ}40'$, $14^{\circ}00'$, $14^{\circ}44'$, $12^{\circ}6'$, $17^{\circ}19'$ și $19^{\circ}48'$ nord. Și excesul lungimii pendulului de la Paris față de lungimile pendulelor izocrone observate la aceste latitudini sînt cu ceva mai mari decît cele calculate după tabloul lungimilor pendulului de mai sus. Și de aceea Pămîntul întrucîtva este mai înalt la ecuator decît conform calculului de mai sus, și este mai dens la centru decît în minele de lîngă suprafață, afară doar dacă poate căldurile din zona toridă nu au mărit întru cîtva lungimea pendulelor.

Căci d-l *Picard* a observat că o vergea de fier, care în timp de iarnă cînd frigul îngheța avea lungimea de un picior, încălzită la foc se lungea cu a patra parte a unei linii. Apoi d-l de la *Hire* a observat că o vergea de fier care de asemenea în timp de iarnă avea o lungime de șase picioare, cînd era expusă soarelui de vară întrecea lungimea de șase picioare cu două treimi de linie. În primul caz căldura a fost mai mare decît în ultimul, iar în acesta mai mare decît căldura părților externe ale corpului omenesc. Căci metalele se încălzesc foarte mult la soarele de vară. Dar vergeaua pendulului în orologiul oscilator niciodată nu se expune la căldura soarelui de vară, niciodată nu primește o căldură egală cu căldura suprafeței corpului omenesc. Și de aceea vergeaua pendulului orologiului lungă de trei picioare, va fi ce este drept cu ceva mai lungă în timp de vară decît în timp de iarnă, dar cu un exces care abia trece de a patra parte a unei linii. Prin urmare diferența întreagă a lungimii pendulelor care în diversele regiuni sînt izocrone, nu se poate atribui diferenței de căldură. Dar această diferență nu trebuie atribuită nici erorilor astronomilor trimiși din Franța. Căci deși observațiile lor nu coincid perfect între ele, totuși erorile sînt atît de mici încît se pot neglija. Și în aceasta sînt toți de acord, că pendulele izocrone sînt mai scurte la ecuator decît la Observatorul regal din Paris existînd o diferență nu mai mică decît o linie și un sfert, nu mai mare decît $2\frac{2}{3}$ linii. În observațiile făcute de d-l *Richer* în *Cayenne* diferența a fost de o linie și un sfert. Această diferență corectată cu acelea ale d-lui *Des Hayes* s-a obținut o linie și jumătate sau una și trei sferturi. Din acelea ale altora mai puțin precise ea a rezultat de aproape două linii. Și această diferență a putut proveni parte din erorile de observație, parte din disimilitudinea părților interne ale Pămîntului și înălțimea munților, și parte din diferențele de temperatură ale aerului.

După cît știu o vergea de fier de trei picioare lungime, în timp de iarnă în *Anglia*, este mai scurtă decît în timp de vară, cu a șasea parte a unei linii. Din cauza căldurii de la ecuator se scade această cantitate din diferența de o linie și un sfert observată de *Richer*, și va rămîne $1\frac{1}{12}$ linii: care coincide foarte bine cu $1\frac{87}{1000}$ linii obținută teoretic mai înainte. *Richer* însă a repetat observațiile făcute în *Cayenne*, în fiecare săptămînă timp de zece luni, și a comparat lungimile notate acolo ale pendulului format de o vergea de fier cu lungimile lui notate la fel în *Franța*, care diligență și precauție se pare că a lipsit la alți observatori. Dacă acordăm încredere observațiilor lui, Pămîntul e mai înalt la ecuator decît la poli cu un exces de aproape 17 mile, după cum rezultă din teoria de mai sus.

PROPOZIȚIA XXI. TEOREMA XVII

Punctele echinocțiului regresează, și axa Pământului printr-o nutație în diversele revoluții anuale se înclină de două ori spre ecliptică și se întoarce de două ori la poziția de mai înainte.

Este evident aceasta din corolarul 20, propoziția LXVI Cartea I. Totuși mișcarea de nutație trebuie să fie foarte mică, și abia observabilă.

PROPOZIȚIA XXII. TEOREMA XVIII

Toate mișcările lunare, și toate neegalitățile mișcărilor rezultă din principiile înșirate.

Planetele mai mari, în timp ce sînt duse în jurul Soarelui, pot antrena alte planete mai mici care se rotesc în jurul lor, și din propoziția LXV, Cartea I rezultă că cele mai mici trebuie să se miște pe elipsă, avînd focarele în centrele celor mai mari. Dar prin acțiunea Soarelui mișcările lor sînt perturbate în mai multe feluri, și suferă aceleași neegalități care se observă la Luna noastră. Aceasta (potrivit corolarilor 2, 3, 4 și 5, propoziția LXVI) se mișcă mai repede; și cu raza dusă la Pământ descrie o arie mai mare în raport cu timpul și are o orbită mai puțin curbă; și de aceea se apropie mai mult de Pământ în syzigii decît în cvadraturi, dacă nu cumva e împiedicată de mișcarea excentricității. Căci excentricitatea e maximă (potrivit corolarului 9, propoziția LXVI) cînd apogeul Lunii se află în syzigii, și e minimă cînd este situat în cvadraturi; și de aceea Luna în perigeu e mai rapidă și mai aproape de noi, în apogeu însă e mai înceată și mai depărtată în syzigii decît în cvadraturi. Mai mult, apogeul progresează și nodurile regresează, dar cu o mișcare neegală. Și apogeul (potrivit corolarului 7 și 8, propoziția LXVI) progresează mai repede în syzigiiile sale, și regresează mai încet în cvadraturi, și prin excesul progresului asupra regresului avansează în fiecare an. Iar nodurile (potrivit corolarului 2, propoziția LXVI) sînt în repaus în syzigiiile lor și regresează foarte repede în cvadraturi. Dar și latitudinea maximă a Lunei e mai mare în cvadraturi (potrivit corolarului 10, propoziția LXVI) decît în syzigii: și mișcarea medie e mai înceată în periheliul Pământului (potrivit corolarului 6, propoziția LXVI) decît în afeliu. Și acestea sînt inegalitățile mai importante notate de astronomi.

Dar mai sînt și alte neegalități neobservate de astronomii de odinioară, prin care mișcările lunare sînt într-atît perturbate, încît pînă acum nu s-a putut stabili nici o lege prin care ele să fie reduse la o regulă sigură oarecare. Căci viteza sau mișcările orare ale apogeei și ale nodurilor Lunii și ecuațiile lor, precum și diferența dintre excentricitatea maximă în syzigii și minimă în cvadraturi și inegalitatea numită variație, se măresc sau se micșorează anual (potrivit corolarului 14, propoziția LXVI) în raportul cubului diametrului aparent al Soarelui. Și afară de aceasta variația se mărește sau se micșorează aproximativ în raportul pătratului timpului dintre cvadraturi (potrivit corolarul 1 și 2, lema X și corolarul 16, propoziția LXVI, Cartea I) dar această neegalitate în calculul astronomic se referă de obicei la ecuația centrului Lunii, și se confundă cu ea.

PROPOZIȚIA XXIII. TEOREMA V

Mișcările neegale ale sateliților lui Jupiter și Saturn provin din mișcările lunare.

Din mișcările Lunii noastre se pot deduce mișcările analoge ale lunilor sau sateliților lui Jupiter astfel. Mișcarea medie a nodurilor satelitului extrem al lui Jupiter, este către mișcarea medie a nodurilor Lunii noastre, în raportul compus din pătratul raportului timpului periodic al Pământului în jurul Soarelui, către timpul periodic al lui Jupiter în jurul Soarelui, și din raportul timpului periodic al satelitului în jurul lui Jupiter către timpul periodic al Lunii în jurul Pământului (potrivit corolarului 16, propoziția LXVI, Cartea I) și deci acest nod într-o sută de ani merge retrograd $8^{\circ}24'$. Mișcările medii ale nodurilor sateliților interiori sînt către mișcarea acestuia, precum timpurile lor periodice către timpul periodic al acestuia (potrivit aceluiași corolar) și deci sînt date. Dar mișcarea directă a afeliului unui satelit oarecare este către mișcarea retrogradă a nodurilor lui, precum mișcarea apogeului Lunii noastre către mișcarea nodurilor ei (potrivit aceluiași corolar) și deci este dată. Totuși trebuie micșorată mișcarea astfel aflată a afeliului în raportul de 5 către 9 sau aproximativ 1 către 2, dintr-o cauză ce nu este locul să o expun aici. Ecuatiile maxime ale nodurilor și ale afeliului unui satelit oarecare sînt respectiv către ecuațiile maxime ale nodurilor și afeliul Lunii, precum mișcările nodurilor și ale afeliului sateliților în timpul unei revoluții a primelor ecuații către mișcările nodurilor și apogeul Lunii în timpul unei revoluții a ecuațiilor din urmă. Variația unui satelit privit din Jupiter este către variația Lunii, precum sînt între ele mișcările întregi ale nodurilor în tin purile în care satelitul și Luna se învîrtesc în jurul Soarelui, potrivit aceluiași corolar; și deci pentru satelitul exterior ea nu trece de $5''12'''$.

PROPOZIȚIA XXIV. TEOREMA XIX

Fluxul și refluxul mării provin din acțiunile Soarelui și ale Lunii.

Din corolarul 19 și 20 propoziția LXVI; Cartea I se vede că marea atît lunară cît și solară în fiecare zi trebuie de două ori să se urce și de două ori să coboare și că înălțimea maximă a apei, în mările profunde și libere urmează apropierea astrelor de meridianul locului într-un interval mai mic de șase ore, după cum se întîmplă în toată partea orientală a mării *Atlanticului* și *Etiopiei* între Franța și promontorul *Bunei Speranțe* precum și pe litoralul din *Chile* și *Peru* al *Pacificului*: în toate aceste litorale fluxul are loc aproximativ în a doua, sau a patra, dacă nu cumva mișcarea propagată din oceanul adînc prin locuri puțin adînci este întîrziată pînă la ora a cincea, a șasea, a șaptea sau mai mult. Număr orele pornind de la apropierea fiecărui astru la meridianul locului, atît sub orizont cît și deasupra și prin orele zilei lunare înțeleg a douăzeci și patra parte a timpului în care Luna în mișcarea diurnă aparentă revine la meridianul locului. Forța Soarelui sau a Lunii care ridică marea este maximă în momentul trecerii astrului la meridianul locului. Dar forța imprimată în acel timp mării se menține cîtva timp și apoi se mărește printr-o nouă forță imprimată, pînă ce marea va ajunge la înălțimea maximă, ceea ce se va întîmpla în timp

de una sau două ore dar mai adesea la țărm aproximativ în timp de trei ore, sau și mai mult dacă marea este puțin adîncă.

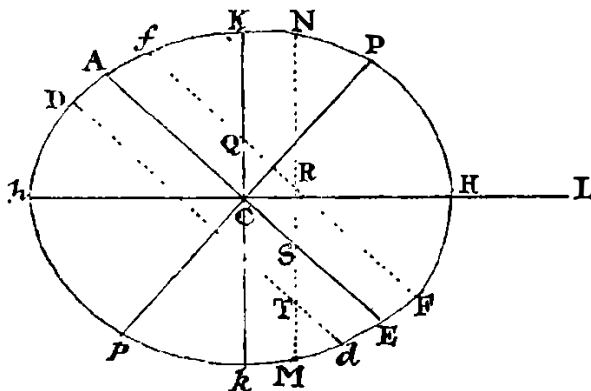
Dar cele două mișcări, pe care le produc cele două astre, nu se deosebesc distinct una de alta, ci produc o mișcare oarecare compusă. În conjuncțiunea sau opoziția astrelor efectele lor se unesc și se compune fluxul și refluxul maxim. În cvadraturi Soarele ridică apa cînd Luna o apasă și o apasă cînd Luna o ridică : și din diferența efectelor se va naște fluxul cel mai mic dintre toate. Și fiindcă, după cum ne arată experiența, efectul Lunii e mai mare decît acela al Soarelui, înălțimea cea mai mare a apei va avea loc aproximativ în ora a treia lunară. În afară de syzigii și cvadraturi, fluxul maxim care ar trebui să aibă loc numai prin forța Lunii în ora a treia lunară, și numai prin aceea a Soarelui în ora a treia solară, prin compunerea forțelor va avea loc într-un timp oarecare intermediar care este mai aproape de ora a treia lunară; și deci în trecerea Lunii de la syzigii la cvadraturi, cînd ora a treia solară precedează pe a treia lunară înălțimea maximă a apei precedează pe a treia lunară și aceasta într-un interval maxim puțin după octanții Lunii; și la intervale egale fluxul maxim urmează după ora a treia lunară în trecerea Lunei de la cvadraturi la syzigii. Acestea se întîmplă astfel în marea deschisă. Căci la gurile fluviilor fluxurile mai mari, în condiții egale, ajung mai tîrziu la vîrf.

Efectele astrelor depind însă de distanțele lor de la Pămînt. Căci la distanțe mai mici efectele lor sînt mai mari, la mai mari sînt mai mici și aceasta în raportul cubului diametrelor aparente. Așadar Soarele în timpul iernii, fiind la perigeu, are un efect mai mare și face ca fluxurile în syzigii să fie cu ceva mai mari, și în cvadraturi cu ceva mai mici (celelalte condiții fiind aceleași) decît în timp de vară; și Luna în perigeu produce în fiecare lună fluxuri mai mari decît înainte cu cincizprezece zile sau după, cînd se află în apogeu. De unde rezultă că cele două fluxuri maxime nu urmează unul după altul în syzigii ce se succed imediat.

Efectul ambelor astre depinde și de declinația lor sau de distanța de la ecuator. Căci dacă astrul ar fi situat în pol, el ar atrage în mod constant diversele părți ale apei, fără intensificarea sau slăbirea acțiunii, și deci nu ar cauza nici o variație a mișcării. Prin urmare astrele îndepărtîndu-se de la ecuator spre pol, își pierd efectele în mod gradat, și de aceea vor produce fluxuri mai mici în syzigiile solstițiale decît în cele echinocțiale. Vor produce însă fluxuri mai mari în cvadraturile solstițiale decît în cvadraturile echinocțiale; fiindcă efectul Lunii situată atunci în ecuator întrece cu mult efectul Soarelui. Așadar fluxurile maxime cad în syzigii și cele minime în cvadraturile astrelor, în jurul timpurilor ambelor echinocții. Și fluxului maxim în syzigii îi urmează totdeauna unul minim în cvadraturi, după cum a arătat experiența. Dar din cauza distanței mai mici a Soarelui de Pămînt în timp de iarnă decît în timpul verii, rezultă că fluxurile maxime și minime mai adeseori precedează echinocțiul de primăvară decît îl urmează, și mai adesea urmează pe cel de toamnă decît îl preced.

Efectele astrelor depind și de latitudinea locurilor. Fie *ApEP* Pămîntul acoperit de toate părțile cu ape afunde; *C* centrul lui; *P, p* polii; *AE* ecuatorul; *F* un loc oarecare în afară de ecuator; *Ff* paralela locului; *Dd* paralela corespunzătoare de cealaltă parte a ecuatorului; *L* locul pe care-l ocupa Luna înainte cu trei ore; *H* locul Pămîntului situat direct sub ea; *h* locul opus

acestui; K, k , locurile situate la o distanță de 90 de grade; CH, Ch , înălțimile maxime ale mării măsurate de la centrul Pământului; și CK, Ck , înălțimile minime: și dacă cu axele Hh, Kk , descriem o elipsă, apoi prin rotația ei în jurul axei mari Hh să descriem sferoidul $HPKhp$; acesta va reprezenta aproximativ figura mării, și CF, Cf, CD, Cd vor fi înălțimile mării în locurile F, f, D, d . Mai departe dacă în rotația menționată a elipsei un punct oarecare N descrie cercul NM , tăind paralelele Ff, Dd în locurile oarecare R, T , și ecuatorul AE în S ; CN va fi înălțimea mării în toate locurile R, S, T , situate pe acest cerc. De aceea în rotația diurnă a unui loc oarecare F , fluxul va fi maxim în F , în ora a treia după culminația Lunii la meridian deasupra orizontului; după aceea refluxul maxim în Q în ora a treia după apusul Lunii; apoi fluxul maxim în f în ora a treia după culminația Lunii la meridian sub orizont; în fine refluxul maxim în Q în ora a treia după răsăritul Lunii; și ultimul flux în f va fi mai mic decât fluxul precedent în F . Căci întreaga mare se împarte în doi curenți emisferici, unul în emisfera KHk îndreptat spre nord, celălalt în emisfera opusă Khk ; pe care deci îi putem numi curentul boreal și curentul austral. Acești curenți totdeauna opuși unul altuia vin alternativ la meridianele diverselor locuri, după un interval de douăsprezece ore lunare. Și cum regiunile boreale participă mai mult la curentul boreal, și cele australe mai mult la cel austral, de aici se nasc fluxurile alternativ mai mari și mai mici, în diversele locuri în afară de ecuator, în care astrele răsar și apun. Iar fluxul mai mare când Luna declină spre verticala locului, va cădea aproximativ în ora a treia după culminația Lunii la meridian deasupra orizontului, și Luna schimbându-și declinația fluxul se transformă în cel mai mic. Și diferența maximă a fluxurilor va avea loc în timpurile solstițiilor; îndeosebi dacă nodul ascendent al Lunii se află la începutul Berbecului. Astfel experiența arată că fluxurile dimineților de iarnă întrec pe acelea de seara și cele din serile de vară pe cele de dimineață, anume la *Plymouth* aproape cu înălțimea unui picior, iar la *Bristol* cu înălțimea de cincisprezece degete: după observațiile lui Colepress și Sturm.



Mișcările descrise pînă acum se schimbă însă întrucîtva din cauza forței de reciprocitate a apelor prin care fluxul mării, și după ce încetează acțiunile astrale, poate persevera cîtva timp. Această conservare a mișcării imprimată micșorează diferența fluxurilor alternative; și mărește fluxurile imediat după syzigii, și micșorează pe cele imediat după cvadraturi. De unde urmează că fluxurile alternative la *Plymouth* și *Bristol* nu diferă cu mult mai mult unul de altul decât cu înălțimea de un picior sau cincisprezece degete; astfel că fluxurile cele mai mari din aceste porturi, nu sînt primele după syzigii, ci cele de-al treilea. De asemenea întîrzie toate mișcările în trecerea prin vaduri, astfel că fluxul cel mai mare dintre toate, în anumite strîmtori și la gurile fluviilor, sînt cele de-al patrulea sau al cincilea de la syzigii.

Apoi se poate întâmpla ca fluxul să se propage de la ocean prin diverse strîmtori spre același port, și să treacă mai repede prin unele strîmtori decît prin altele: în care caz același flux împărțit în două sau mai multe venind succesiv poate compune mișcări noi de genuri diverse. Să ne închipuim că două fluxuri egale vin din locuri diferite în același port, cel dintîi dintre ele precedează pe următorul cu un interval de șase ore, și ajunge în ora a treia de la apropierea Lunii de meridianul portului. Dacă Luna în această apropiere a sa de meridian se află la ecuator la fiecare șase ore vor veni fluxuri egale, care întîlnind tot atîtea refluxuri se vor egaliza cu fluxurile, și astfel în intervalul unei zile vor face ca apa să rămînă în repaus. Dacă atunci Luna declina de la ecuator, pe ocean vor avea loc alternativ fluxuri mai mari și mai mici, după cum s-a spus; și deci se vor propaga în acest port alternativ două fluxuri mai mari și două mai mici. Dar cele două fluxuri mai mari vor forma apa cea mai înaltă la mijloc între cele două, fluxul mai mare și mai mic vor face ca apa să se urce la înălțimea mijlocie în mijlocul lor, și între cele două fluxuri mai mici apa se va urca la înălțimea minimă. Astfel în intervalul de douăzeci și patru de ore, apa nu va ajunge, de două ori ca de obicei la înălțimea maximă, ci numai o dată, și o dată la cea minimă; și înălțimea maximă, dacă Luna declină în pol deasupra orizontului locului, va avea loc fie în ora a șasea, fie în a treisprezecea de la culminația Lunii la meridian, și se va schimba în reflux cînd Luna își schimbă declinația. Un exemplu de toate acestea ne-a dat *Halle y* din observațiile marinarilor în portul *Batshaw* al regatului *Tunquin* sub latitudinea $20^{\circ} 50'$ nord. Acolo apa în ziua următoare trecerii Lunii la ecuator este în repaus apoi cînd Luna declină spre nord începe fluxul și refluxul nu de două ori ca în alte porturi, ci o dată în fiecare zi; și fluxul coincide cu apusul Lunii, refluxul maxim cu răsăritul ei. Cu declinația Lunii fluxul crește, pînă în ziua a șaptea sau a opta, apoi în alte șapte zile descrește cu tot atîtea grade, cu cîte a crescut înainte; și încetează cînd Luna își schimbă declinația, și apoi se schimbă iarăși în reflux. Căci atunci refluxul are loc la apusul Lunii și fluxul la răsăritul ei, pînă ce Luna își mută din nou declinația. Există două intrări în acest port și în strîmtoarea vecină, una din Oceanul *Chinez* între continent și insula *Leuconia*, cealaltă din Marea *Indiană* între continent și insula *Borneo*. Că ora fluxurilor venind în intervalul de 12 ore din Marea *Indiană*, și în intervalul de șase ore de la marea *Chineză* prin acea strîmtoare, și astfel întîlnindu-se în ora a treia și a noua lunară, compun mișcări de acest fel; sau că alta este condiția acelor mări, las să se determine din observațiile țărmurilor vecine.

Pînă aici am expus cauzele mișcărilor Lunii și ale mărilor. Rămîne să adaug cîte ceva despre cantitatea mișcărilor.

PROPOZIȚIA XXV. PROBLEMA VI

Să aflăm forțele cu care Soarele perturbă mișcările Lunii.

Fie *S* Soarele, *T* Pămîntul, *P* Luna, *CADB* orbita Lunii. Pe *SP* să luăm *SK* egală cu *ST*; și fie *SL* către *SK* în raportul pătratului lui *SK* către *SP*, și să ducem *LM* paralelă cu *PT*; și dacă reprezentăm gravitatea acceleratoare a Pămîntului spre Soare prin distanța *ST* sau *SK*, *SL* va fi gravitatea acceleratoare a Lunii spre Soare. Ea se compune din părțile *SM*, *LM*,

PROPOZIȚIA XXVI. PROBLEMA VII

Am spus că aria pe care o descrie Luna cu raza dusă la Pământ este proporțională cu timpul, afară numai dacă mișcarea Lunii este perturbată de acțiunea Soarelui. Ne propunem aici să studiem inegalitatea momentului sau a creșterii orare. Pentru a ușura calculul, să ne închipuim că orbita Lunii este circulară și să neglijăm toate inegalitățile, exceptând numai pe aceea de care este vorba aici. Din cauza distanței foarte mari a Soarelui, să mai presupunem că liniile SP , ST sînt paralele între ele. În acest fel forța LM se va reduce totdeauna la cantitatea sa mijlocie TP , după cum și forța TM la cantitatea sa mijlocie $3PK$. Aceste forțe (potrivit corolarului II al legilor) compun forța TL ; și această forță dacă pe raza TP se coboară perpendi-

în octanți prin aria $FK \times Kk$ egală cu dreptunghiul $\frac{1}{2} TP \times Pp$. Și viteza pe care o poate produce forța maximă într-un timp oarecare CP , va fi către viteza pe care întreaga forță mai mică EL o generează în același timp, precum dreptunghiul $\frac{1}{2} TP \times CP$ către aria $KCGF$: iar în timpul întreg CPA , vitezele produse vor fi între ele precum dreptunghiul $\frac{1}{2} TP \times CA$ și triunghiul TCG , adică arcul cadranelui CA și raza TP . Și deci (potrivit propoziției IX, Cartea a V-a a Elementelor) viteza din urmă, născută în timpul întreg, va fi partea $\frac{100}{11\,915}$ a vitezei lunare. La această viteză a Lunii, care este analogă cu momentul mijlociu al ariei, să adunăm și să scădem jumătatea celeilalte viteze; și dacă momentul mijlociu se exprimă prin numărul 11 915, suma $11\,915 + 50$ sau 11 965 va da momentul maxim al ariei în syzigia A , și diferența $11\,915 - 50$ sau 11 865 momentul minim al aceleiași în cvadraturi. Deci ariile descrise în timpuri egale în syzigii și cvadraturi sînt între ele precum 11 965 către 11 865. La momentul minim 11 865 să adunăm momentul, care să fie către diferența momentelor 100 precum trapezul $FKCG$ către triunghiul TCG sau (ceea ce este același lucru, precum pătratul sinusului PK către pătratul razei TP , adică, precum Pd către TP) și suma va da momentul ariei, cînd Luna este într-un loc oarecare intermediar P .

Toate acestea se întîmplă astfel în ipoteza că Soarele și Pămîntul sînt în repaus și Luna se învîrtește în timpul sinodic de 27 zile, 7 ore 43 minute. Cum însă perioada sinodică lunară adevărată este de 29 zile 12 ore și 44 minute, trebuie să mărim creșterile momentelor în raportul timpului, adică, în raportul 1 080 853 către 1 000 000. În acest fel creșterea întreagă, care era $\frac{100}{11\,915}$ din momentul mijlociu, va deveni $\frac{100}{11\,023}$ din aceasta. Și deci momentul ariei în cvadratura Lunii va fi către momentul ei în syzigii precum $11\,023 - 50$ către $11\,023 + 50$, sau 10 973 către 11 073; și către momentul ei, cînd Luna se află într-un alt loc oarecare intermediar P , precum 10 973 către $10\,973 + Pd$, presupunînd că TP este egal cu 100.

Așadar aria pe care o descrie Luna cu raza dusă la Pămînt în diversele particule egale de timp, este aproximativ precum suma numărului 219,46 și sinus versus-ul dublului distanței Lunii de la cvadratura proximă în cercul a cărui rază este unitatea. Acestea se întîmplă astfel cînd variația în octanți este de mărime mijlocie. Dacă însă acolo variația este mai mare sau mai mică, sinus versus-ul trebuie mărit sau micșorat în același raport.

PROPOZIȚIA XXVII. PROBLEMA VIII

Din mișcarea orară a Lunii să aflăm distanța ei de la Pămînt.

Aria, pe care o descrie Luna cu raza dusă la Pămînt în diversele momente de timp, este precum mișcarea orară a Lunii și pătratul distanței Lunii de Pămînt luate împreună; și de aceea distanța Lunii de Pămînt este într-un raport compus din rădăcina pătrată a ariei și inversul rădăcinii pătrate a mișcării orare. Q.E.I.

COROLARUL 1. Prin urmare diametrul Lunii este dat: fiindcă este în raport invers cu distanța ei de la Pământ. Astronomii să cerceteze cât de precis se potrivește această regulă cu fenomenele.

COROLARUL 2. Deci și orbita lunară se poate defini mai precis din fenomene decât pînă acum.

PROPOZIȚIA XXVIII. PROBLEMA IX

Să aflăm diametrele orbitei pe care ar trebui să se miște Luna, fără excentricitate.

Curbura traiectoriei, pe care o descrie un mobil dacă este atras în direcția perpendiculară traiectoriei, este proporțională cu atracția și invers proporțională cu pătratul vitezei. Presupun că curbura liniilor sînt între ele în ultima proporție a sinusurilor sau tangentelor unghiurilor de contact ce aparțin la raze egale, cînd razele se micșorează la infinit. Dar atracția Lunii spre Pământ în syzigii este excesul gravității ei spre Pământ față de forța solară $2PK$ (vezi propoziția XXV) cu care gravitatea acceleratoare a Lunii spre Soare întrece gravitatea acceleratoare a Pământului spre Soare sau este întrecută de ea. În cvadraturi însă, această atracție este suma gravității Lunii spre Pământ și a forței solare KT , cu care este atrasă Luna spre Pământ. Și aceste atracții, dacă pentru $\frac{AT + CT}{2}$ punem N , sînt aproximativ precum $\frac{178\,725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \times N}$ și $\frac{178\,725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \times N}$; sau precum $178\,725\,N \times CT^2 - 2000\,AT^2 \times CT$ și $178\,725\,N \times AT^2 + 1000\,CT^2 \times AT$. Căci dacă gravitatea acceleratoare a Lunii spre Pământ se exprimă prin numărul 178 725, forța mijlocie ML , care în cvadraturi este PT sau TK și atrage Luna spre Pământ, va fi 1000, și forța mijlocie TM în syzigii va fi 3000; din care, dacă se scade forța mijlocie ML va rămîne forța 2000 cu care Luna în syzigii este atrasă de la Pământ, și pe care mai înainte am numit-o $2PK$. Dar viteza Lunii în syzigiiile A și B este către viteza ei în cvadraturile C și D , precum CT către AT și momentul ariei pe care o descrie Luna cu raza dusă la Pământ în syzigii către momentul aceleiași arii în cvadraturi luate împreună, adică precum 11 073 CT către 10 973 AT . Să luăm pătratul acestui raport invers și primul raport o dată direct, și curbura orbitei lunare în syzigii va fi către curbura aceleiași în cvadraturi precum $120\,406\,729 \times 178\,725\,AT^2 \times CT^2 \times N - 120\,406\,729 \times 2000\,AT^4 \times CT$ către $122\,611\,329 \times 178\,725\,AT^2 \times CT^2 \times N + 122\,611\,329 \times 1000\,CT^4 \times AT$, adică precum $21\,519\,69\,AT \times CT \times N - 24081\,AT^3$ către $2191371\,AT \times CT \times N + 12261\,CT^3$.

Deoarece nu cunoaștem figura orbitei lunare, în locul ei să considerăm elipsa $DBCA$, în centrul căreia să punem Pământul T , și a cărei axă mare DC să fie situată între cvadraturi, cea mică AB între syzigii. Cum însă planul acestei elipse se învîrtește cu o mișcare unghiulară în jurul Pământului, și traiectoria a cărei curbura o considerăm ar trebui descrisă într-un plan lipsit de orice mișcare unghiulară, va trebui să considerăm figura, pe care Luna mișcîndu-se pe elipsă o descrie în acest plan, adică figura Cpa , ale cărei diverse puncte p se află luînd un punct oarecare P pe elipsă, care să reprezinte locul Lunii, și ducînd TP egal cu TP , în așa fel ca unghiul PTp să fie egal cu mișcarea aparentă a Soarelui efectuată din timpul cvadra-

A diagram of a sphere with center T. A vertical axis passes through T, with point A at the top and point B at the bottom. A horizontal axis passes through T, with point C on the right and point D on the left. Several other points are marked on the sphere's surface: P and Q are in the upper right quadrant; R and S are in the upper left quadrant; U and V are in the lower right quadrant; W and X are in the lower left quadrant. A series of points labeled a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z are arranged along the top edge of the sphere, starting from A and moving clockwise. A dashed line connects A to T. A dashed line connects T to B. A dashed line connects T to C. A dashed line connects T to D. A dashed line connects T to P. A dashed line connects T to Q. A dashed line connects T to R. A dashed line connects T to S. A dashed line connects T to U. A dashed line connects T to V. A dashed line connects T to W. A dashed line connects T to X. A dashed line connects T to Y. A dashed line connects T to Z.

Așadar cum a reprezintă syzigia Lunii, și C cvadratura ei, proporția aflată trebuie să fie aceeași cu proporția curburii orbitei Lunii în syzigii către curbura ei în cvadraturi pe care am aflat-o mai sus. Deci pentru a afla proporția CT către AT , înmulțim extremele și mediile între ele. Și termenii rezultați aplicați la $AT \times CT$, devin $2062, 79 CT^4 - 2\,151\,969 N \times CT^3 + 368\,676 N \times AT \times CT^2 + 36\,342 AT^2 \times CT^2 - 362\,047 N \times AT^2 \times CT + 2\,191\,371 N \times AT^3 + 4051,4 AT^4 = 0$. Aici în locul semisumei N a termenilor AT și CT scriu 1, și punând x în locul semidiferenței lor, avem $CT = 1+x$, și $AT = 1-x$: pe care scriindu-le în ecuații, și rezolvând, CT obținem $x = 0,00719$, și deci semidiametrul CT devine 1,00719, și semidiametrul AT 0,99281, care numere sînt aproximativ precum $70\frac{1}{24}$ și $69\frac{1}{24}$. Așadar distanța Lunii de la Pămînt în syzigii către distanța ei în cvadraturi (lăsînd adică la o parte considerația excentricității) este precum $69\frac{1}{24}$ către $70\frac{1}{24}$ sau în numere rotunde precum 69 către 70.

PROPOZIȚIA XXIX. PROBLEMA X

Să aflăm variația Lunii.

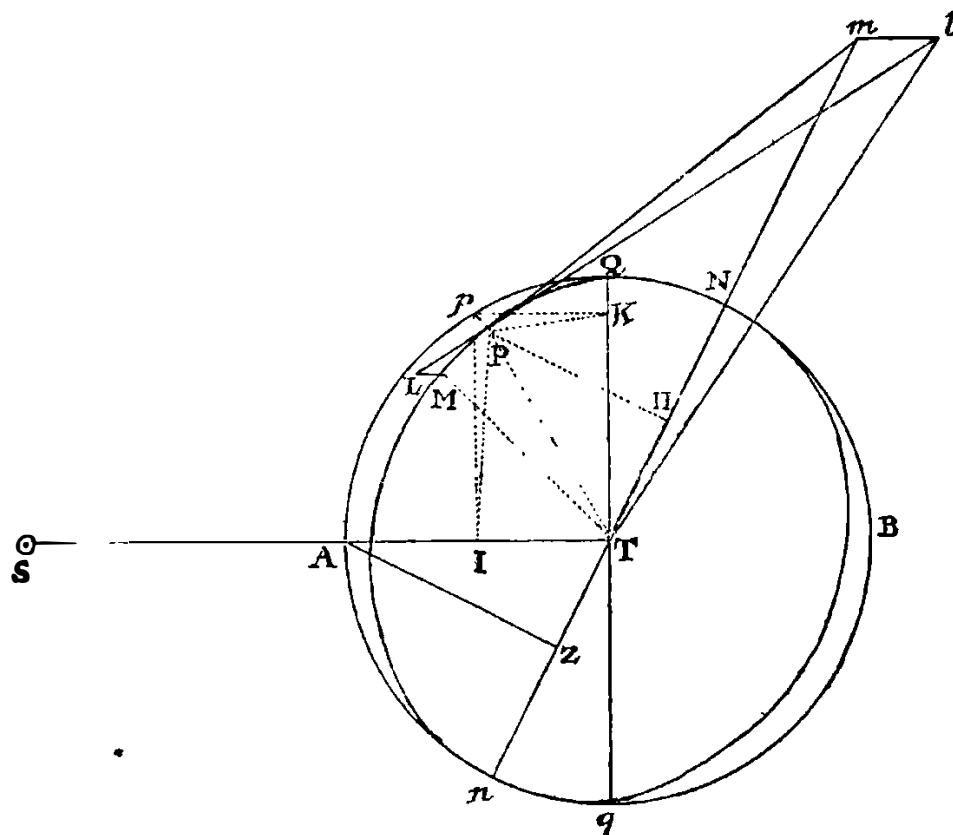
Această inegalitate provine parte din forma eliptică a orbitei lunare parte din inegalitatea momentelor ariei, pe care o descrie Luna cu raza dusă la Pământ. Dacă Luna P s-ar mișca pe elipsa $DBCA$ în jurul Pământului în repaus în centrul elipsei, și ar descrie cu raza TP dusă la Pământ aria CTP proporțională cu timpul; iar semidiametrul maxim CT al elipsei ar fi către semidiametrul minim TA precum 70 la 69; tangenta unghiului CTP ar fi către tangenta unghiului mișcării medii calculate de la cvadratura C , precum semidiametrul TA al elipsei către semidiametrul TC al ei sau 69 la 70. Dar descrierea ariei CTP , în înaintarea Lunii de la cvadratură la syzigie, trețuie accelerată în acel raport, ca momentul ei în syzigia Lunii să fie către momentul ei în cvadratură precum 11 073 către 10 973, astfel ca excesul momentului într-un loc oarecare intermediar P față de momentul în cvadratură să fie precum pătratul sinusului unghiului CTP . Ceea ce va avea loc destul de precis, dacă tangenta unghiului CTP se micșorează precum rădăcina pătrată a raportului numărului 10 973 către numărul 11 073, adică în raportul numărului 68,6877 către numărul 69. În acest fel tangenta unghiului CTP va fi către tangenta mișcării medii precum 68,6877 către 70, și unghiul CTP în octanți, unde mișcarea medie este 45 grade se va afla de $44^{\circ}27'28''$, care scăzută din unghiul mișcării medii de 45 grade rămîne variația maximă $32'32''$. Acestea se vor întîmpla astfel dacă Luna, înaintînd de la cvadratură la syzigie, ar descrie unghiul CTA de numai 90 de grade. Din cauza mișcării adevărate a Pământului, prin care Soarele este dus în mod aparent înainte, Luna, înainte de a ajunge Soarele, descrie unghiul CTa mai mare decît un unghi drept în raportul timpului revoluției lunare sinodice către timpul revoluției periodice, adică în raportul $29^d12^h44'$ către $27^d7^h43'$. Și în acest fel toate unghiurile în jurul centrului T se dilată în același raport, și variația maximă care altfel ar fi $32'32''$, mărită în același raport, devine $35'10''$. Aceasta este mărimea ei la distanța medie a Soarelui de la Pământ, neglijînd diferențele ce pot proveni din curbura orbitei mari și a acțiunii mai mari a Soarelui asupra Lunii sub formă de seceră sau nouă, cît și sub formă umflată sau plină. La alte distanțe ale Soarelui de la Pământ, variația maximă este într-un raport care se compune din pătratul timpului revoluției sinodice lunare (timpul anului fiind dat) și inversul cubului distanței Soarelui de la Pământ. Și deci în apogeul Soarelui, variația maximă este de $33'14''$ și în perigeul lui de $37'11''$, dacă numai excentricitatea Soarelui este către semidiametrul transversal al orbitei mari precum $16\frac{15}{16}$ către 1000.

Pînă acum am căutat variația pe o orbită neexcentrică, în care Luna în octanții săi totdeauna este la distanța sa mijlocie de Pământ. Dacă Luna din cauza excentricității sale, se află la o distanță mai mare sau mai mică de Pământ decît ar fi situată pe această orbită, variația poate fi cu ceva mai mare sau cu ceva mai mică decît după regula amintită aici: dar las în grija astronomilor să determine din fenomene excesul sau lipsa.

PROPOZIȚIA XXX. PROBLEMA XI

Să aflăm mișcarea orară a nodurilor Lunii pe o orbită circulară.

Fie S Soarele, T Pământul, P Luna, NPn orbita Lunii, Npn urma orbitei pe planul eclipticei, N, n nodurile, $nTNm$ linia nodurilor prelungită la infinit; PI , PK perpendicularele coborâte pe liniile ST , Qq ; Pp perpendiculara



coborâtă pe planul eclipticei; A, B syzigiile Lunii în planul eclipticei; AZ perpendiculara pe linia nodurilor Nn ; Q, q cvadraturile Lunii în planul eclipticei, și pK perpendiculara pe linia Qq situată între cvadraturi.

Forța Soarelui ce perturbă mișcarea Lunii (potrivit propoziției XXV) este dublă, una proporțională cu linia LM în figura acelei propoziții, cealaltă cu linia MT . Și Luna prin forța dintîi este atrasă spre Pământ, prin cea din urmă spre Soare în direcția unei linii paralele cu dreapta ST dusă de la Pământ la Soare. Prima forță LM acționează în direcția planului orbitei lunare, și de aceea nu schimbă de loc poziția planului. Prin urmare aceasta trebuie neglijată. Forța din urmă MT prin care planul orbitei lunare e perturbat este aceeași cu forța 3 PK sau 3 IT . Și această forță (potrivit propoziției XXV) este către forța cu care Luna se poate învîrți în mod uniform pe un cerc în jurul Pământului în repaus în timpul său periodic, precum 3 IT către raza cercului înmulțită cu numărul 178,725 sau precum IT către raza înmulțită cu 59,575. De altfel în acest calcul, și în toate cele ce urmează, consider toate liniile duse de la Lună la Soare ca paralele cu linia dusă de la Pământ la Soare, fiindcă înclinarea aproape tot atît micșorează toate efectele în unele cazuri, cît le mărește în altele; și căutăm mișcările mijlocii ale nodurilor, neglijînd nimicurile de acest fel, care ar complica numai calculul.

Fie acum PM arcul, pe care-l descrie Luna într-un timp dat cât se poate de scurt; și ML linioara a cărei jumătate ar putea-o descrie Luna, sub influența forței menționate $3IT$, în același timp. Să unim PL , MP și să le prelungim pînă în m și l , unde să taie planul eclipticei; și să coborîm perpendiculara PH pe Tm . Și fiindcă dreapta ML e paralelă cu planul eclipticei, și deci nu poate concura cu dreapta ml situată în acel plan, și totuși aceste drepte sînt situate în planul comun $LMPml$; dreptele vor fi paralele și de aceea triunghiurile LMP , lmP vor fi asemenea. Și cum MPm se află în planul orbitei, în care Luna se mișcă în locul P , punctul m va cădea pe linia Nn dusă prin nodurile N , n ale acelei orbite. Și fiindcă forța prin care se naște jumătatea linioarei LM , dacă toată este imprimată împreună și o dată în locul P , ar produce linia întreagă; și ar face ca Luna să se miște pe un arc, a cărui coardă să fie LP , și de aceea ar muta Luna din planul $MPmT$ în planul $LPIT$; mișcarea unghiulară a nodurilor născută de acea forță, va fi egală cu unghiul mTl . Dar ml este către mP , precum ML către MP și deci cum MP este dat pentru că timpul este dat, ml este precum dreptunghiul $ML \times mP$, adică, precum dreptunghiul $IT \times mP$. Și unghiul mTl , dacă unghiul Tml este drept, este precum $\frac{ml}{Tm}$, și de aceea precum $\frac{IT \times mP}{Tm}$. adică (din cauză că Tm și mP , TP și PH sînt proporționale) precum $\frac{IT \times PH}{TP}$, și deci TP fiind dat, precum $IT \times PH$. Căci dacă unghiul Tml , sau STN este oblic, unghiul mTl va fi mai mic, în raportul sinusului unghiului STN către rază, sau AZ către AT . Deci viteza nodurilor este precum $IT \times PH \times AZ$, sau precum produsul sinusurilor celor trei unghiuri TPI , PTN și STN .

Dacă aceste unghiuri, nodurile fiind în cvadraturi și Luna în syzigii, sînt drepte, linioara ml se va îndepărta la infinit, și unghiul mTl va deveni egal cu unghiul mPl . Dar în acest caz, unghiul mPl este către unghiul PTM , pe care-l descrie Luna în același timp în mișcarea sa aparentă în jurul Pămîntului, precum 1 către 59,575. Căci unghiul mPl este egal cu unghiul LPM , adică, cu unghiul de abatere a Lunii de la drumul drept, pe care-l poate genera în acel timp dat numai forța solară menționată $3IT$, dacă ar înceta gravitatea Lunii; și unghiul PTM este egal cu unghiul de abatere al Lunii de la drumul drept, pe care forța aceea, cu care Luna este reținută pe orbita sa, ar putea-o genera în același timp, dacă ar înceta forța solară $3IT$. Și aceste forțe, după cum am spus mai sus, sînt între ele precum 1 către 59,575. Prin urmare cum mișcarea medie orară a Lunii față de stelele fixe este $32' 56'' 27''' 12 \frac{1}{2}''$, mișcarea orară a nodului în acest caz va fi de $33'' 10''' 33'' 12''$. În alte cazuri însă această mișcare orară va fi către $33'' 10''' 33'' 12''$ precum produsul sinusurilor celor trei unghiuri TPI , PTN și STN (sau a distanțelor Lunii de la cvadratură, a Lunii de la nod și a nodului de la Soare) către cubul razei. Și de cîte ori semnul unui unghi oarecare se schimbă din pozitiv în negativ, și din negativ în pozitiv, mișcarea regresivă va trebui să se schimbe în progresivă și cea progresivă în regresivă. De unde rezultă că nodurile progesează de cîte ori Luna se află între una din cvadraturi și nodul cel mai apropiat de cvadratură. În alte cazuri regresează, și din excesul regresului asupra progresului în fiecare lună sînt purtate înapoi.

COROLARUL 1. Dacă din extremitățile P și M ale arcului foarte mic PM , se coboară perpendicularele PK , Mk pe linia Qq ce unește cvadraturile

și se prelungesc pînă ce taie linia nodurilor Nn în D și d ; mișcarea orară a nodurilor va fi precum aria $MPDd$ și pătratul liniei AZ luate împreună. Căci fie PK , PH și AZ cele trei sinusuri menționate. Anume PK sinusul distanței Lunii de la cvadratură, PH sinusul distanței Lunii de la nod, și AZ sinusul distanței nodului de la Soare; și viteza nodului va fi precum produsul $PK \times PH \times AZ$. Dar PT este către PK precum PM către Kk , și deci PT și PM fiind date Kk este proporțional cu PK . De asemenea AT este către PD precum AZ către PH , și deci PH este proporțional cu dreptunghiul $PD \times AZ$, și unind rapoartele $PK \times PH$ este precum produsul $Kk \times PD \times AZ$, și $PK \times PH \times AZ$ precum $Kk \times PD \times AZ^2$, adică precum aria $PDdM$ și AZ^2 luate împreună. Q.E.D.

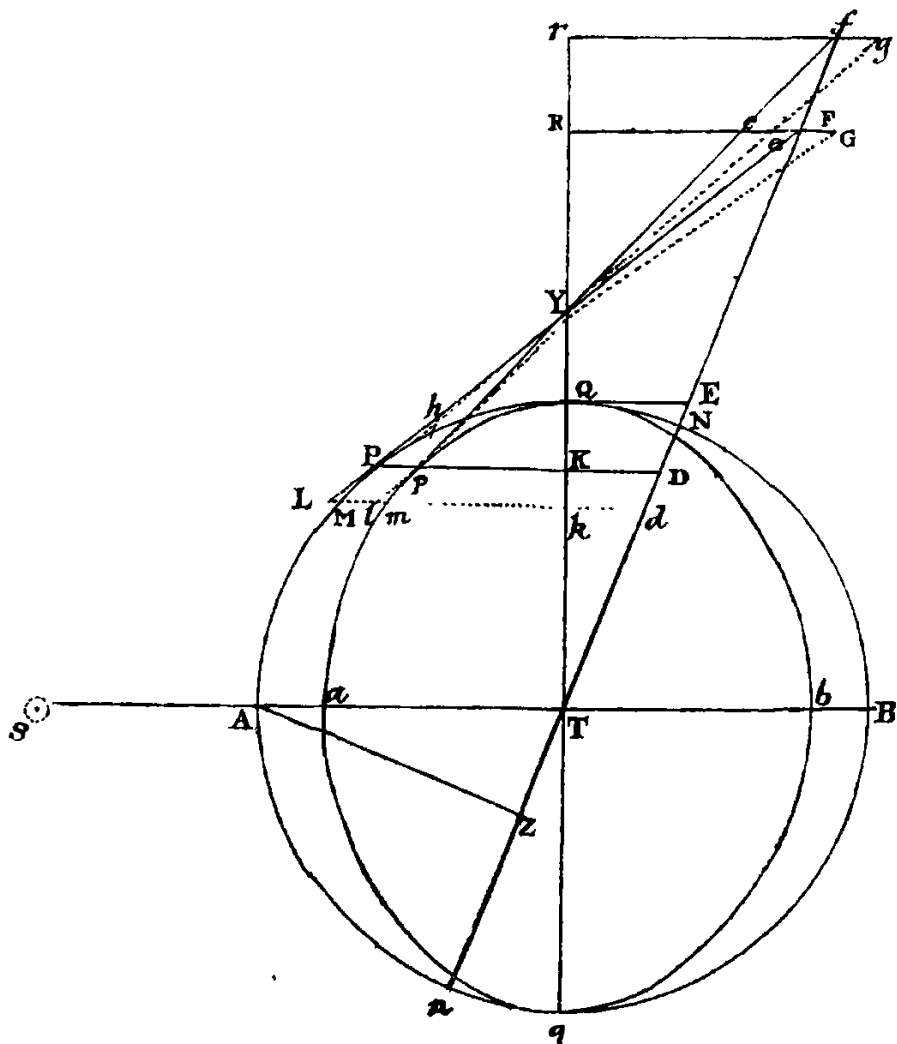
COROLARUL 2. Într-o poziție oarecare dată a nodurilor, mișcarea orară mijlocie este jumătatea mișcării orare în syzigiile Lunii, și deci este către $16^{\circ}35'16''$ precum pătratul sinusului distanței nodurilor de la syzigii către pătratul razei, adică precum AZ^2 către AT^2 . Căci dacă Luna cu o mișcare uniformă ar descrie semicercul Qa , suma tuturor ariilor $PDdM$, în timpul în care Luna merge de la Q la M , va fi aria $QMdE$ care se termină la tangenta QE a cercului; și în timp ce Luna atinge punctul n , acea sumă va fi aria întreagă $EQAn$ pe care o descrie liniă PD , apoi Luna mergînd de la n la q , liniă PD va cădea în exteriorul cercului și va descrie aria nqe terminată la tangenta qe a cercului; care, deoarece nodurile mai înainte regresau, iar acum progresează, trebuie scăzută din aria de mai înainte, și cum ea este egală cu aria QEN , va rămîne semicercul $NQAn$. Prin urmare suma tuturor ariilor $PDdM$, în timp ce Luna descrie un semicerc, este aria semicercului; și suma tuturor în timp ce Luna descrie cercul este aria cercului întreg. Dar aria $PDdM$, cînd luna se află în syzigii, este dreptunghiul cuprins de arcul PM și raza PT ; și suma tuturor ariilor egale cu aceasta, în timp ce Luna descrie un cerc, este dreptunghiul cuprins de circumferința întreagă și raza cercului; și acest dreptunghi, fiind egal cu două cercuri, este de două ori mai mare decît dreptunghiul de mai înainte. Prin urmare nodurile, cu viteza continuată în mod uniform pe care o au syzigiile lunare, ar descrie un spațiu de două ori mai mare decît descriu în realitate; și de aceea mișcarea medie cu care, dacă ar continua în mod uniform, ar putea descrie spațiul descris în realitate cu o mișcare neegală, este jumătatea mișcării pe care o au în syzigiile Lunii. De unde cum mișcarea orară maximă, dacă nodurile se află în cvadraturi, este de $33^{\circ}10'33''$, mișcarea medie orară în acest caz va fi de $16^{\circ}35'16''$. Și cum mișcarea orară a nodurilor

totdeauna este precum AZ^2 și aria $PDdM$ luate împreună, și deci mișcarea orară a nodurilor în syzigiile Lunii precum AZ^2 și aria $PDdM$ luate împreună, adică (din cauza că aria $PDdM$ descrisă în syzigii este dată) precum AZ^2 , mișcarea mijlocie de asemenea va fi precum AZ^2 și de aceea această mișcare, când nodurile se află în afara cvadraturilor, va fi către $16''35'''16''36'''$ precum AZ^2 către AT^2 . Q.E.D.

PROPOZIȚIA XXXI. PROBLEMA XII

Să aflăm mișcarea orară a nodurilor Lunii pe o orbită eliptică.

Fie $Qpmaq$ o elipsă, descrisă cu axa mare Qq , axa mică ab , $QAqB$ cercul circumscris, T Pământul în centrul comun al ambelor, S Soarele, p Luna mișcându-se pe elipsă, și pm arcul pe care-l descrie într-un timp dat foarte scurt, N și n nodurile unite prin linia Nn ; pK și mk perpendiculele



coborâte pe axa Qq și prelungite de ambele părți, pînă ce întîlnesc cercul în P și M , și linia nodurilor în D și d . Și dacă Luna, cu raza dusă la Pământ, descrie o arie proporțională cu timpul, mișcarea orară a nodului pe elipsă va fi precum aria $pDdm$ și AZ^2 luate împreună.

Căci, să presupunem că PF atinge cercul în P , și prelungit întîlnește pe TN în F , și că pf atinge elipsa în p și prelungit întîlnește pe TN în f ,

și aceste tangente se întâlnesc pe axa TQ în Y ; că ML reprezintă spațiul pe care Luna mișcându-se pe un cerc, în timp ce descrie arcul PM , sub acțiunea și impulsul forței amintite $3IT$, sau $3PK$, l-ar putea descrie cu o mișcare transversală, și că ml reprezintă spațiul pe care Luna mișcându-se pe o elipsă l-ar putea descrie în același timp, acționată și de forța $3IT$ sau $3PK$; și să prelungim LP și lp pînă ce întâlnesc planul eclipticei în G și g ; și să unim FG și fg , dintre care FG prelungit să taie pe pf , pg și TG respectiv în c , e și R , și fg prelungit să taie TQ în r . Deoarece forța $3IT$ sau $3PK$ pe cerc este către forța $3IT$ sau $3pK$ pe elipsă, precum PK către pK , sau AT către aT ; spațiul ML produs de forța de mai înainte va fi către spațiul ml născut de forța din urmă, precum PK către pK , adică, din cauza asemănării figurilor $PYKp$ și $FYRc$, precum FR către cR . Dar ML este către FG (din cauza asemănării triunghiurilor PLM , PGF) precum PL către PG , adică (deoarece Lk , PK , GR sînt paralele) precum pl către pe , adică (triunghiurile plm , cpe fiind asemenea) precum lm către ce ; și invers, precum LM către lm , sau FR către cR , tot așa FG către ce . Și de aceea dacă fg este către ce , precum fY către cY , adică precum fr către cR (adică, precum fr către FR și FR către cR luate împreună, adică, precum fT către FT și FG către ce luate împreună) deoarece raportul FG către ce scăzute de ambele părți lasă rapoartele fg către FG și fT către FT , va fi fg către FG precum fT către FT ; și de aceea unghiurile, pe care le-ar subîntinde FG și fg la Pămîntul T , ar fi egale între ele. Dar acele unghiuri (din cauza celor expuse în propoziția precedentă) sînt mișcările nodurilor, în timpul în care Luna descrie pe cerc arcul PM , pe elipsă arcul pm : și de aceea mișcările nodurilor pe cerc și pe elipsă ar fi egale între ele. Acestea se întîmplă astfel, dacă fg este către ce precum fY către cY , adică, dacă fg este egală cu $\frac{ce \times fY}{cY}$. Dar din cauză că triunghiurile fgp , cep sînt asemenea, fg este către ce precum fp către cp ; și deci fg este egal $\frac{ce \times fp}{cp}$; și de aceea unghiul, pe care fg îl subîntinde de fapt, este către unghiul de mai înainte, pe care-l subîntinde FG , adică, mișcarea nodurilor pe elipsă către mișcarea nodurilor pe cerc, precum acest fg sau $\frac{ce \times fp}{cp}$ către fg de mai înainte sau $\frac{ce \times fY}{cY}$, adică, precum acest $fp \times cY$ către $fY \times cp$, sau fp către fY și cY către cp , adică, dacă ph paralelă cu TN întîlnește FP în h , precum Fh către FY și FY către EP ; adică, precum Fh către FP sau Dp către DP ; și deci precum aria $Dpmd$ către aria $DPMd$. Și de aceea cum (potrivit corolarului 1, propoziția XXX) aria din urmă și AZ^2 luate împreună sînt proporționale cu mișcarea orară a nodurilor pe cerc, aria dinainte și AZ^2 luate împreună vor fi proporționale cu mișcarea orară a nodurilor pe elipsă. Q.E.D.

COROLAR. De aceea cum, în poziția dată a nodurilor, suma tuturor ariilor $pDdm$, în timpul în care Luna trece de la cvadratură la un loc oarecare m , este aria $mpQEd$, care se termină la tangenta QE a elipsei; și suma tuturor ariilor, în revoluția întreagă, este aria elipsei întregi; mișcarea mijlocie a nodurilor pe elipsă va fi către mișcarea mijlocie a nodurilor pe cerc, precum elipsa către cerc; precum Ta către TA sau 69 către 70. Și de aceea cum (potrivit corolarului 2, propoziția XXX) mișcarea mijlocie orară a nodurilor pe cerc este către $16'' 35''' 16^{IV} 36^V$ precum AZ^2 către AT^2 , dacă luăm

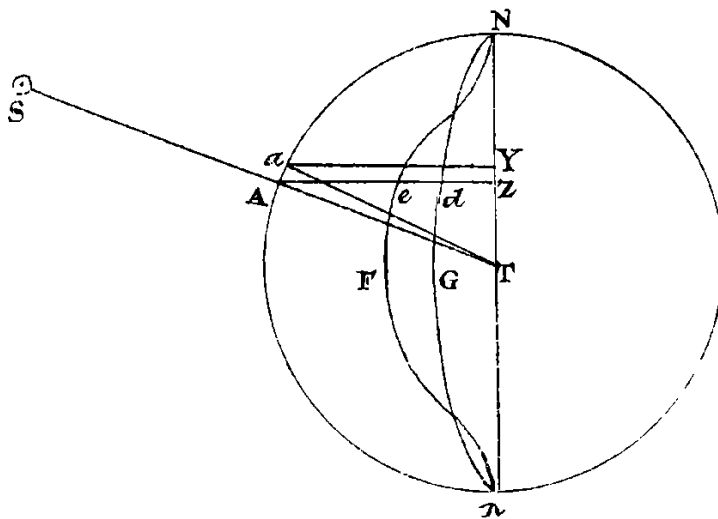
unghiul $16'' 21''' 3^{IV} 30^V$ către unghiul $16'' 35''' 16^{IV} 36^V$ precum 69 către 70, mișcarea mijlocie orară a nodurilor pe elipsă va fi către $16'' 21''' 3^{IV} 30^V$ precum AZ^2 către AT^2 ; adică precum pătratul sinusului distanței nodului de la Soare către pătratul razei.

De altfel Luna, cu raza dusă la Pământ, descrie aria mai repede în syzigii decât în cvadraturi și de aceea când timpul în syzigii se scurtează în cvadraturi se lungeste și împreună cu timpul mișcarea nodurilor se mărește și se micșorează. Dar momentul ariei în cvadraturile Lunei era către momentul ei în syzigii precum 10 973 către 11 073, și de aceea momentul mijlociu în octanți este către excesul în syzigii, și lipsa în cvadraturi, precum semisuma 11 023 a numerelor către semidiferența lor 50. De unde cum timpul Lunii în diversele particule egale ale orbitei este în raport invers cu viteza ei, timpul mijlociu în octanți va fi către excesul timpului în cvadraturi, și lipsa în syzigii provenită din această cauză, precum aproximativ 11 023 către 50. Trecînd însă de la cvadraturi la syzigii, găsesc că excesul momentelor ariei în diversele locuri, față de momentul minim în cvadraturi, este aproximativ precum pătratul sinusului distanței Lunii de cvadraturi; și de aceea diferența dintre momentul într-un loc oarecare și momentul mijlociu în octanți, este precum diferența dintre pătratul sinusului distanței Lunii de cvadraturi și pătratul sinusului de 45 de grade, sau jumătatea pătratului razei; și creșterea timpului în diversele locuri între octanți și cvadraturi, și descreșterea lui între octanți și syzigii, este în același raport. Dar mișcarea nodurilor, în timp ce Luna parcurge diverse părți egale ale orbitei se accelerează sau întîrzie în raportul pătratului timpului. Căci această mișcare, în timp ce Luna parcurge PM (celelalte condiții fiind aceleași) este precum ML , și ML este precum pătratul timpului. De aceea mișcarea nodurilor în syzigii, efectuată în timp ce Luna parcurge părți date ale orbitei, scade precum pătratul raportului numărului 11 073 către numărul 11 023; și descreșterea este către mișcarea rămasă precum 100 către 10 973, iar către mișcarea întreagă aproximativ precum 100 către 11 073. Dar descreșterea în locurile dintre octanți și syzigii, și creșterea în locurile dintre octanți și cvadraturi, este aproximativ către această descreștere precum mișcarea întreagă în acele locuri către mișcarea întreagă în syzigii și diferența dintre pătratul sinusului distanței Lunii la cvadratură și jumătatea pătratului razei către jumătatea pătratului razei luate împreună. De unde dacă nodurile sînt în cvadraturi, și luăm două locuri la distanțe egale de o parte și de alta a octantului, și alte două distanțe cu același interval de la syzigii și cvadraturi, și din descreșterile mișcărilor în două locuri, între syzigii și octant, se scad creșterile mișcărilor în celelalte două locuri, care sînt între octant și cvadratură: descreșterea rămasă va fi egală cu descreșterea în syzigii: după cum se poate afla ușor prin calcul. Și deci descreșterea mijlocie, care trebuie scăzută din mișcarea mijlocie a nodurilor, este a patra parte a descreșterii în syzigii. Mișcarea întreagă orară a nodurilor în syzigii, când se presupunea că Luna descrie cu raza dusă la Pământ o arie proporțional cu timpul, era $32'' 42''' 7^{IV}$. Și descreșterea mișcării nodurilor în timp ce Luna acum descrie mai repede același spațiu, am spus că este către această mișcare precum 100 către 11 073; și deci descreșterea este $17'' 43^{IV} 11^V$, din care a patra parte $4'' 25^{IV} 48^V$ scăzută din mișcarea orară mijlocie aflată

Dacă nodurile se află în afară de cvadraturi, și considerăm două locuri la distanțe egale de o parte și de alta, de la syzigii; suma mișcării nodurilor, cînd Luna se află în aceste locuri va fi către suma mișcărilor, cînd Luna se află în aceleași locuri și nodurile în cvadraturi, precum AZ^2 către AT^2 . Și descreșterile mișcărilor, provenite din cauzele deja expuse, vor fi între ele precum mișcărilor, și deci mișcărilor rămase vor fi între ele precum AZ^2 către AT^2 și mișcărilor mijlocii precum mișcărilor rămase. Prin urmare mișcarea mijlocie orară corectă este în orice poziție o nodurilor către $16'' 16''' 37^{IV} 42^V$ precum AZ^2 către AT^2 ; adică precum pătratul sinusului distanței nodurilor de la syzigii către pătratul razei.

Să aflăm mișcarea mijlocie a nodurilor Lunii.

Mișcarea medie anuală este suma tuturor mișcărilor orare medii de peste an. Să ne închipuim că nodul se află în N , și că după fiecare oră completă este atras spre locul său de mai înainte; încît cu toată mișcarea sa proprie, își păstrează totdeauna poziția dată față de stelele fixe. În acest timp însă Soarele S , din cauza mișcării Pămîntului, progresează de la nod și completează cursul aparent anual în mod uniform. Fie însă Aa arcul dat foarte mic, pe care o dreaptă TS dusă totdeauna la Soare, prin intersecția sa și a cercului NAn , îl descrie într-un timp dat cît se poate de mic: și mișcarea orară medie (din cele mai înainte arătate) va fi precum AZ^2 , adică (din cauza că AZ , ZY sînt proporționale) precum dreptunghiul cuprins de AZ și ZY , adică, precum aria $AZYa$. Și suma tuturor mișcărilor orare mijlocii de la început, precum suma tuturor ariilor $aYZA$ adică, precum aria NAZ . Dar aria maximă $aYZA$ este egală cu dreptunghiul cuprins de arcul Aa și raza cercului; și de aceea suma tuturor dreptunghiurilor în cercul întreg către suma aceluiași număr de maxime, precum aria cercului întreg către dreptunghiul cuprins de circumferința întreagă și rază, adică, precum 1 către 2. Dar mișcarea orară, corespunzînd dreptunghiului maxim, era de $16'' 16''' 37^{IV} 42^V$. Și această mișcare, într-un an sideral întreg de 365 zile 6 ore 9 minute este de $39^\circ 38' 7'' 50'''$. Și deci jumătatea ei $19^\circ 49' 3'' 55'''$ este mișcarea medie a nodurilor corespunzătoare cercului întreg. Și mișcarea nodurilor, în timp ce Soarele merge de la N la A , este către $19^\circ 49' 3'' 55'''$ precum aria NAZ către cercul întreg.



Acestea se întâmplă astfel în ipoteza, că nodul după fiecare oră este readus în locul de mai înainte, astfel că Soarele la sfârșitul unui an întreg se reîntoarce în același nod de la care a plecat la început. Într-adevăr, din cauza mișcării nodului, Soarele revine mai repede la nod și trebuie calculată scurtarea timpului. Cum Soarele într-un an întreg face 360 grade, și nodul prin mișcarea maximă în același timp ar face $39^{\circ} 38' 7'' 50'''$, sau 39,6355 grade; și mișcarea mijlocie a nodului într-un loc oarecare N este către mișcarea sa mijlocie în cvadraturile sale, precum AZ^2 către AT^2 : mișcarea Soarelui va fi către mișcarea nodului în N precum $360 AT^2$ către $39,6355 AZ^2$; adică, precum $9,0827646 AT^2$ către AZ^2 . De unde dacă împărțim circumferința cercului întreg NAn în particule egale Aa , timpul în care Soarele ar parcurge particula Aa , dacă cercul ar fi în repaus, va fi către timpul în care parcurge aceeași particulă, dacă cercul se rotește împreună cu nodurile în jurul centrului T , în raport invers cu $9,0827646 AT^2$ către $9,0827646 AT^2 + AZ^2$. Căci timpul este în raport invers cu viteza cu care este parcursă particula, și această viteză este suma vitezei Soarelui și a nodului. Prin urmare dacă timpul, în care Soarele fără mișcarea nodului ar parcurge arcul NA , se reprezintă prin NTA , și particula timpului în care ar parcurge arcul foarte mic Aa , se exprimă prin particula ATa a sectorului; și (côborînd perpendiculara aY pe Nn) dacă pe AZ luăm dZ , de o astfel de lungime încît dreptunghiul format de dZ și ZY să fie către particula ATa precum AZ^2 către $9,0827646 AT^2 + AZ^2$, adică, dZ să fie către $\frac{1}{2} AZ$ precum AT^2 către $9,0827646 AT^2 + AZ^2$; dreptunghiul format de dZ și ZY va reprezenta descreșterea timpului născută din mișcarea nodului, în timpul întreg în care arcul Aa este parcurs. Și dacă punctul d atinge curba $NdGn$, aria curbilinie NdZ va fi descreșterea întreagă în timp ce este descris arcul întreg NA ; și de aceea excesul sectorului NAT față de aria NdZ va fi timpul întreg. Și fiindcă mișcarea nodului într-un timp mai mic este mai mică în raport cu timpul, va trebui ca și aria $AaYZ$ să scadă în același raport. Ceea ce se va întâmpla dacă luăm pe AZ lungimea eZ , care este către lungimea AZ precum AZ^2 către $9,0827646 AT^2 + AZ^2$. Căci astfel dreptunghiul format de eZ și ZY va fi către aria $AZYa$ precum descreșterea timpului, în care a descrie arcul Aa , către timpul întreg în care ar fi parcurs, dacă nodul ar fi în repaus; și de aceea dreptunghiul acela ar corespunde descreșterii mișcării nodului. Și dacă punctul e atinge curba $NeFn$, aria întreagă NeZ , care este suma tuturor descreșterilor, va corespunde descreșterii întregi, în timp ce este parcurs arcul AN ; și aria rămasă NAe va corespunde mișcării rămase, care este mișcarea adevărată a nodului, în timp ce arcul întreg NA este parcurs prin mișcările unite ale Soarelui și nodului. Dar aria semicercului este către aria figurii $NeFn$, aflată prin metoda seriilor infinite, aproximativ precum 793 către 60. Iar mișcarea care corespunde cercului întreg era de $19^{\circ} 49' 3'' 55'''$ și de aceea mișcarea corespunzătoare figurii duble $NeFn$ este $1^{\circ} 29' 58'' 2'''$. Scăzînd-o din mișcarea de mai sus rămîne $18^{\circ} 19' 5'' 53'''$ pentru mișcarea întreagă a nodului față de stelele fixe în intervalul dintre conjuncțiile sale cu Soarele; și scăzînd această mișcare din mișcarea anuală de 360 grade a Soarelui, rămîne $341^{\circ} 40' 54'' 7'''$ pentru mișcarea Soarelui între aceleași conjuncțiuni. Dar această mișcare este către mișcarea anuală de 360 grade precum mișcarea nodului aflată mai sus de $18^{\circ} 19' 5'' 53'''$ către mișcarea

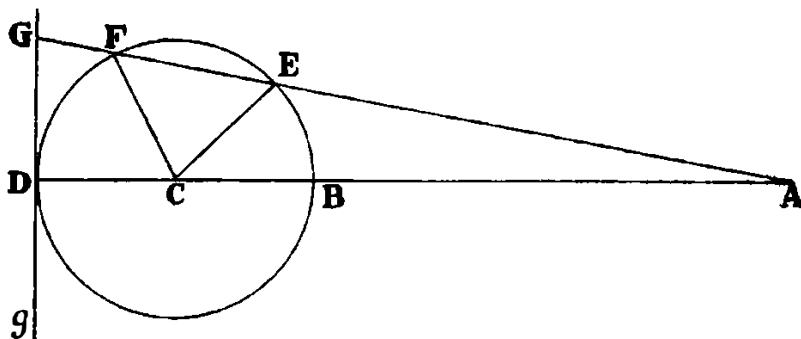
lui anuală, care de aceea va fi de $19^{\circ} 18' 1'' 23'''$. Aceasta este mișcarea medie a nodurilor într-un an sideral. Aceeași din tabelele astronomice este de $19^{\circ} 21' 21'' 50'''$. Diferența este mai mică decît a treia sută parte a mișcării întregi și se pare că provine din excentricitatea orbitei lunare și din înclinația față de planul eclipticei. Prin excentricitatea orbitei mișcarea nodurilor este foarte mult accelerată, și prin înclinația ei la rîndul său este întrucîtva întîrziată, și redusă la viteza justă.

PROPOZIȚIA XXXIII. PROBLEMA XIV

Să aflăm mișcarea adevărată a nodurilor Lunii.

În timpul care este precum aria $NTA - NdZ$ (în figura precedentă), mișcarea aceasta este precum aria NAe , și deci este dată. Dar din cauza difi cultății mari de calcul, este avantajos să ne folosim de următoarea construcție a problemei. Din centrul C cu un interval oarecare CD , să descriem cercul $BEFD$. Să prelungim DC pînă în A , ca să fie AB către AC precum mișcarea medie către jumătatea mișcării adevărate mijlocii, cînd nodurile sînt în cva draturi, adică precum $19^{\circ}18'1''23'''$ către $19^{\circ}49'3''55'''$ și deci BC către AC precum diferența mișcărilor $0^{\circ}31'2''32'''$ către mișcarea din urmă $19^{\circ}49'3''55'''$, adică precum 1 către $38\frac{3}{10}$; apoi prin punctul D să ducem dreapta infinită

Gg, care să atingă cercul în *D*; și dacă luăm unghiul *BCE* sau *BCF* egal cu dublul distanței Soarelui de la locul nodului, aflat prin mișcarea medie; și ducem *AE* sau *AF* tăind perpendiculara *DG* în *G*; și luăm unghiul care este către mișcarea întreagă a nodului între syzigiile lui (adică, către $9^{\circ}11'3''$) precum tangenta *DG* către cir-



cumferința întreagă a cercului *BED*; și acest unghi (în locul căruia se poate folosi unghiul *DAG*) să-l adunăm la mișcarea medie a nodurilor cînd nodurile trec din cvadraturi în syzigii, și din aceeași mișcare medie să-l scădem cînd trec de la syzigii în cvadraturi: vom avea mișcarea lor adevărată. Căci mișcarea adevărată astfel aflată va coincide aproximativ cu mișcarea adevărată care se obține reprezentînd timpul prin aria *NTA—NdZ*, și mișcarea nodului prin aria *NAe*; după cum se va constata studiind problema și făcînd calculele. Aceasta este ecuația mișcării semestriale a nodurilor. Există și o ecuație lunară, dar care este foarte puțin necesară pentru aflarea latitudinii Lunii. Căci cum variația înclinării orbitei lunare către planul eclipticei este supusă unei duble inegalități una semestrială și alta lunară; inegalitatea ei lunară și ecuația lunară a nodurilor se temperează și se corectează reciproc astfel încît ambele se pot neglija la determinarea latitudinii Lunii.

COROLAR. Din propoziția aceasta și din cea precedentă este clar că nodurile sînt în repaus în syzigiile lor, iar în cvadraturi regresează cu mișcarea

orară de $16'' 19''' 26^{IV}$. Și că ecuația mișcării nodurilor în octanți este $1^{\circ} 30'$. Care toate cadrează perfect cu fenomenele cerești.

SCOLIE

I. M a c h i n, profesor de astronomie la Gresham și H e n r i c h P e m b e r t o n, independent unul de celălalt, au aflat printr-o altă metodă mișcarea nodurilor. Am menționat în alt loc această metodă. Și ambele scrieri, pe care le-am văzut, cuprindeau două propoziții, și amîndouă erau concordante între ele. Iar lucrarea lui M a c h i n, deoarece mi-a ajuns repede în mîini, o anexez aici.

DESPRE MIȘCAREA NODURILOR LUNII

”PROPOZIȚIA I

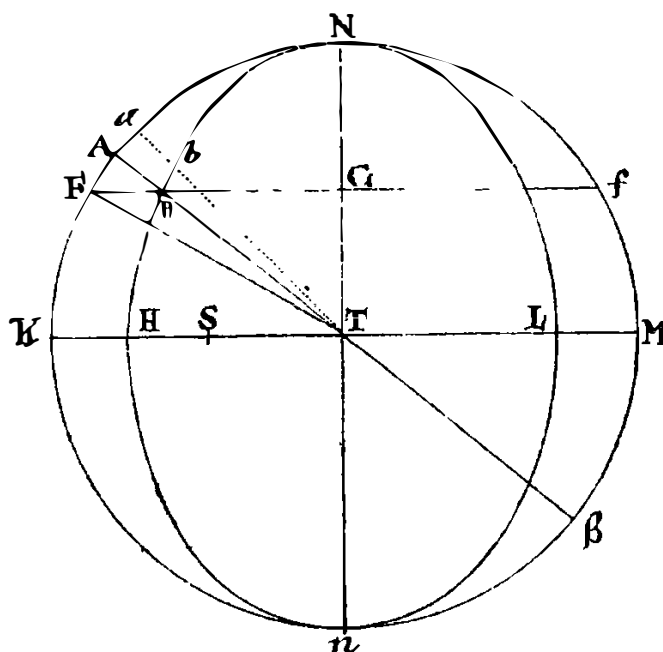
”Mișcarea mijlocie a Soarelui de la nod, se definește prin media geometrică proporțională, dintre mișcarea medie a Soarelui și mișcarea medie prin care Soarele se îndepărtează mai repede de la nod spre cvadraturi.

”Fie T locul Pământului, Nn linia nodurilor Lunii la un moment oarecare dat, KTM dreapta dusă perpendicular pe ea, TA dreapta ce se rotește în jurul centrului cu viteza unghiulară cu care se îndepărtează Soarele și nodurile unul de altul, astfel că unghiul dintre dreapta în repaus Nn și cea în rotire TA , să fie totdeauna egal cu distanța locurilor Soarelui și nodului. Căci dacă o dreaptă oarecare TK se împarte în părțile TS și SK care sînt precum mișcarea orară medie a Soarelui către mișcarea orară medie a nodului în cvadraturi, și dacă se ia dreapta TH medie proporțională între partea TS și întregul TK , această dreaptă va fi proporțională cu mișcarea medie a Soarelui de la nod.

”Căci să descriem cercul $NKnM$ din centrul C cu raza TK , și din același centru cu semiaxele TH și TN să descriem elipsa $NHnL$, și în timpul în care Soarele se îndepărtează de nod prin arcul Na , dacă ducem dreapta Tba , aria sectorului NTa va exprima suma mișcărilor nodului și a Soarelui în același timp. Fie deci arcul foarte mic aA pe care-l descrie dreapta Tba rotindu-se conform legii menționate în mod uniform într-un interval de timp dat, și sectorul foarte mic Taa va fi precum suma vitezelor cu care Soarele și nodul sînt purtate fiecare separat în acel timp. Dar viteza Soarelui este aproape uniformă, astfel că mica lui inegalitate abia poate produce vreo variație în mișcarea medie a nodurilor. Cealaltă parte a acestei sume anume viteza nodului în valoarea sa mijlocie, crește cu îndepărtarea de la syzigii în raportul pătratului sinusului distanței de Soare; potrivit corolarului propoziției 31, Cartea a III-a a Principiilor și fiind maximă în cvadraturi față de Soare în K ea capătă același raport față de viteza Soarelui precum SK către TS adică precum (diferența pătratelor lui TK și TH sau) dreptunghiul KHM către pătratul lui TH . Dar elipsa NBH împarte sectorul ATa care exprimă suma acestor două viteze, în două părți $ABba$ și BTb proporționale cu vitezele.

demonstrația propoziției de mai sus unghiul FTN va fi distanța Soarelui de la locul mijlociu al nodului, iar unghiul ATN distanța de la locul adevărat, și tangentele acestor unghiuri sînt între ele precum TK către TH .

"COROLAR. De aici unghiul FTA este ecuația nodurilor Lunii, și sinusul acestui unghi cînd e maxim în octanți, este către rază precum KH către $TK+TH$. Dar sinusul acestei ecuații într-un alt loc oarecare A este către sinusul maxim, precum sinusul sumei unghiurilor $FTN+ATN$ către rază: adică este aproape precum sinusul distanței duble a Soarelui de la locul mediu al nodului (anume $2FTN$) către rază.



"SCOLIE

"Dacă mișcarea mijlocie orară a nodurilor în cvadraturi este $16'' 16''' 37'' 42''$ adică în anul întreg sideral $39^\circ 38' 7'' 50'''$ va fi TH către TK precum rădăcina pătrată a raportului numărului 9,0827646 către numărul 10,0827646, adică precum 18,6524761 către 19,6524761. Și de aceea TH către HK precum 18,6524761 către 1, adică precum mișcarea Soarelui într-un an sideral către mișcarea medie a nodului $19^\circ 18' 1'' 23\frac{2}{3}'''$.

"Dar dacă mișcarea medie a nodurilor Lunii în 20 de ani iuliani este $386^\circ 50' 15''$ după cum se deduce din observațiile folosite în teoria Lunii: mișcarea medie a nodurilor într-un an sideral va fi $19^\circ 20' 31'' 58'''$. Și TH va fi către HK precum 360° către $19^\circ 20' 31'' 58'''$, adică precum 18,61214 către 1, de unde mișcarea medie orară a nodurilor în cvadraturi va fi $16'' 18''' 48''$. Și ecuația maximă a nodurilor în octanți $1^\circ 29' 57''$."

PROPOZIȚIA XXXIV. PROBLEMA XV

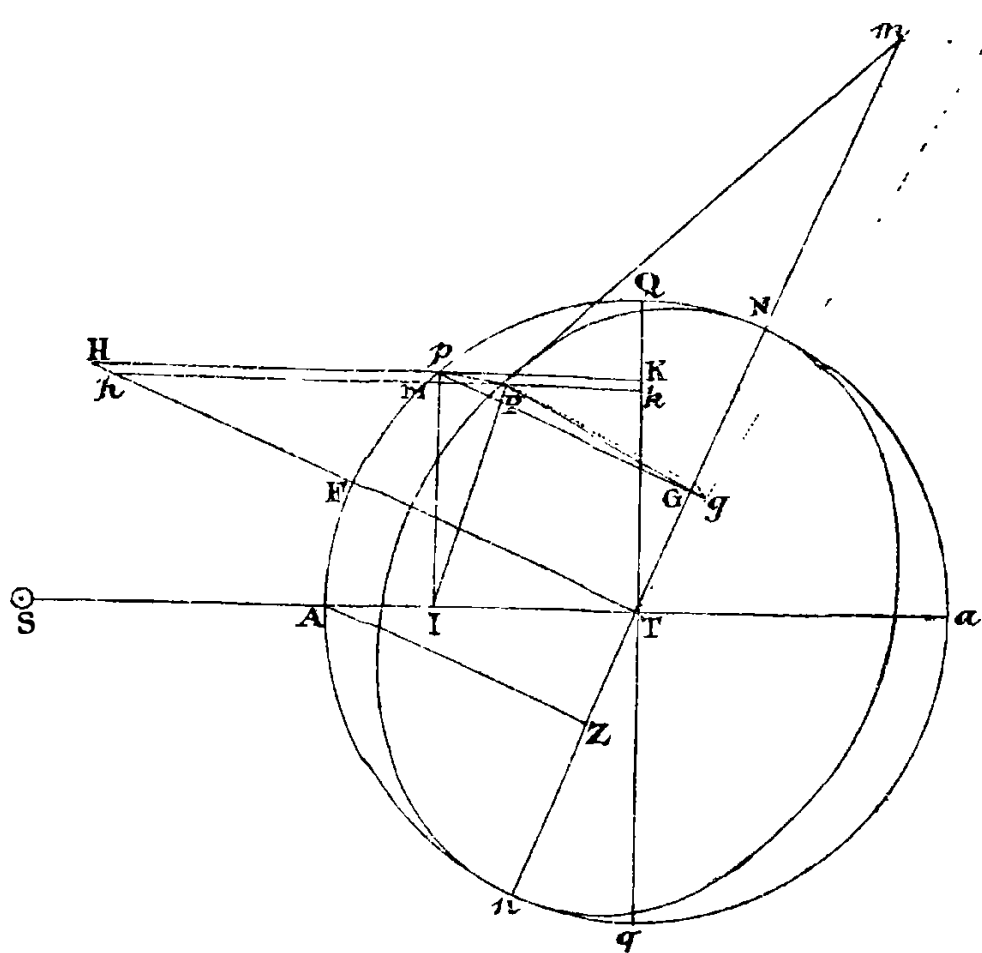
Să aflăm variația orară a înclinării orbitei lunare față de planul eclipticei.

Fie A și a syzigiile; Q și q cvadraturile; N și n nodurile; P locul Lunii pe orbita sa; p urma acestui loc pe planul eclipticei, și mTl mișcarea momentană a nodurilor ca mai sus. Și dacă pe linia Tm coborîm perpendiculara PG , pG , și să o prelungim pînă ce întâlnește pe Tl în g , și să unim și Pg ; unghiul PGp va fi înclinația orbitei lunare față de planul eclipticei, cînd Luna se află în P ; și unghiul Pgp înclinația ei după trecerea unui interval de timp; și deci unghiul CPg va fi variația momentană a înclinației.

Dar unghiul GPg este către unghiul GTg precum TG către PG și Pp către PG luate împreună. Și de aceea dacă pentru intervalul de timp luăm o oră; deoarece unghiul GTg (potrivit propoziției XXX) este către unghiul $33' 10'' 33''$

precum $IT \times PG \times AZ$ către AT^3 unghiul GPg (sau variația înclinației orare) va fi către unghiul $33'' 10''' 33^{iv}$ precum $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ către AT^3 . Q. E. I.

Acestea se întâmplă astfel în ipoteza că Luna se învîrtește în mod uniform pe o orbită circulară. Căci dacă orbita e eliptică, mișcarea mijlocie a



nodurilor se va micșora în raportul axei mai mici către axa mai mare; după cum s-a explicat mai sus. Și în același raport se va micșora și variația înclinației.

COROLARUL 1. Dacă pe Nn ridicăm perpendiculara TF , și pM este mișcarea orară a Lunei în planul eclipticei; și perpendicularele pK , Mk coborâte pe QT și prelungite de ambele părți întâlnesc pe TF în H și h ; IT va fi către AT precum Kk către Mp , și TG către Hp precum TZ către AT , și deci $IT \times TG$ egal cu $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, adică egal cu aria $HpMh$ înmulțită cu raportul $\frac{TZ}{Mp}$; și de aceea variația orară a înclinației către $33'' 10''' 33^{iv}$ precum $HpMh$ înmulțit cu $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ către AT^3 .

COROLARUL 2. Și deci dacă Pământul și nodurile după fiecare oră completă sînt îndepărtate de noile lor locuri, și sînt readuse instantaneu în locurile lor anterioare, astfel ca poziția lor pentru o lună întreagă periodică, să rămînă dată; variația întreagă a înclinației în timpul acelei luni va fi către $33'' 10''' 33^{iv}$ precum agregatul tuturor ariilor $HpMh$, produse în

revoluția punctului p , și sub semnele proprii $+$ și $-$ unite, înmulțit cu $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ către $Mp \times AT^3$, adică precum cercul întreg $QAqa$ înmulțit cu $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ către $Mp \times AT^3$, adică precum circumferința $QAqa$ înmulțită cu $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ către $2Mp \times AT^2$.

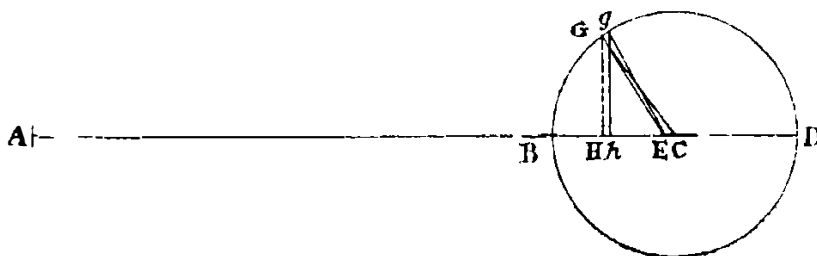
COROLARUL 3. Prin urmare în poziția dată a nodurilor, variația orară mijlocie, din care continuată în mod uniform în timp de o lună se poate naște variația lunară, este către $33'' 10''' 33^{IV}$ precum $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ către $2AT^2$, sau precum $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ către $PG \times 4AT$, adică (cum Pp este către PG precum sinusul înclinației menționate către rază, și $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ este către $4AT$ precum sinusul unghiului dublu ATn către cvadruplul razei) precum sinusul aceleiași înclinații înmulțit cu sinusul dublului distanței nodurilor de la Soare către cvadruplul pătratului razei.

COROLARUL 4. Deoarece variația orară a înclinației când nodurile se află în cvadraturi, este (potrivit acestei propoziții) către unghiul $33'' 10''' 33^{IV}$ precum $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ către AT^3 , adică, precum $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ către $2AT$; adică, precum sinusul distanței duble a Lunii de la cvadraturi înmulțit cu $\frac{Pp}{PG}$ către dublul razei: suma tuturor variațiilor orare, în timp ce luna în această situație a nodurilor trece din cvadratură în syzigie (adică, în spațiul orar $177 \frac{1}{6}$ ore) va fi către suma a tot atâtea unghiuri $33'' 10''' 33^{IV}$, sau $5878''$, precum suma tuturor sinusurilor a distanței duble a Lunii de la cvadraturi înmulțită cu $\frac{Pp}{PG}$ către suma a tot atâtea diametre; adică precum diametrul înmulțit cu $\frac{Pp}{PG}$ către circumferință; adică dacă înclinația este $5^\circ 1'$, precum $7 \times \frac{874}{10\,000}$ către 22, sau 278 la 10 000. Deci întreagă variația compusă din suma tuturor variațiilor orare în timpul menționat este de $163''$, sau $2' 43''$.

PROPOZIȚIA XXXV. PROBLEMA XVI

Într-un timp dat să aflăm înclinația orbitei lunare față de planul eclipticei.

Fie AD sinusul înclinației maxime, și AB sinusul înclinației minime. Să bisectăm BD în C , și din centrul C , cu intervalul BC să descriem cercul BGD . Pe AC să luăm CE către EB în raportul care-l are EB către $2BA$: și dacă la timpul dat se construiește unghiul AEG egal cu dublul distanței nodurilor de la cvadraturi și pe AD coborâm perpendiculara GH : AH va fi sinusul înclinației căutate.



Căci GE^2 este egală cu $GH^2 + HE^2 = BHD + HE^2 = HBD + HE^2 - BH^2 = HBD + BE^2 - 2BH \times BE = BE^2 + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Și deci $2EC$ fiind dat, GE^2 este proporțional cu AH . Fie acum Aeg dublul distanței nodurilor de la cvadraturi după un moment oarecare complet de timp, și arcul Gg din cauza unghiului dat GEg va fi precum distanța GE . Dar Hh este către Gg precum GH către GC , și de aceea Hh este precum dreptunghiul $GH \times Gg$, sau $GH \times GE$; adică, precum $\frac{GH}{GE} \times GE^2$ sau $\frac{GH}{GE} \times AH$, adică, precum AH și sinusul unghiului AEG luate împreună. Prin urmare dacă AH într-un caz oarecare este sinusul înclinației ea se va mări cu aceleași creșteri odată cu sinusul înclinației, potrivit corolarului 3 al propoziției de mai sus, și de aceea va rămâne totdeauna egal cu sinusul. Dar AH , când punctul G cade pe unul din cele două puncte B sau D , este egal cu acest sinus, și de aceea rămâne totdeauna egal cu el. Q.E.D.

În această demonstrație am presupus că unghiul BEG , care e dublul distanței nodurilor de la cvadraturi, crește în mod uniform. Căci e de prisos să mă extind asupra tuturor inegalităților mărunte. Să ne închipuim acum că unghiul BEG este drept, și că în acest caz Gg este creșterea orară a distanței duble a nodurilor și a Soarelui una de alta; și variația orară a înclinației în același caz (potrivit corolarului 3, propoziția ultimă) va fi către $33'' 10''' 33^{IV}$ precum dreptunghiul format de înclinarea sinusului AH și a sinusului unghiului drept BEG , care e distanța dublă a nodurilor de la Soare, către cvadruplul pătratului razei; adică precum sinusul înclinației medii AH către cvadruplul razei; adică, (cum înclinația mijlocie este cam $5^\circ 8 \frac{1}{2}'$) precum sinusul ei 896 către cvadruplul razei 40 000, sau precum 224 către 10 000. Dar variația întreagă, corespunzătoare diferenței BD a sinusurilor, către variația orară precum diametrul BD către arcul Gg ; adică, precum diametrul BD către semicircumferința BGD și timpul orar $2079 \frac{7}{10}$, în care nodul trece de la cvadraturi la syzigii, către o oră luate împreună; adică, precum 7 către 11 și $2079 \frac{7}{10}$ către 1. De aceea dacă se compun toate aceste rapoarte variația întreagă BD va fi către $33'' 10''' 33^{IV}$ precum $224 \times 7 \times 2079 \frac{7}{10}$ către 110 000, adică, precum 29 645 către 1000, și deci variația BD va deveni $16' 23 \frac{1}{2}''$.

Aceasta este variația maximă a înclinației întrucât nu luăm în considerație locul Lunii pe orbita sa. Căci înclinația, dacă nodurile se află în syzigii, nu se schimbă de loc prin variația poziției Lunii. Dar dacă nodurile sînt în cvadraturi, înclinația este mai mică atunci când Luna se află în syzigii, decît cînd ea se află în cvadraturi cu un exces de $2' 43''$; după cum am arătat în corolarul al patrulea al propoziției de mai sus. Și variația medie întreagă BD micșorată cu $1' 21 \frac{1}{2}''$ jumătatea acestui exces în cvadraturile lunare este de $15' 2''$, iar mărită în syzigiile sale este $17' 45''$. Prin urmare dacă Luna se află în syzigii, variația întreagă în întrecerea nodurilor de la cvadraturi la syzigii va fi $17' 45''$: și deci dacă înclinația, cînd nodurile se află în syzigii este de $5^\circ 17' 20''$; aceeași, cînd nodurile sînt în cvadraturi și Luna în syzigii, va fi $4^\circ 59' 35''$. Prin observații se confirmă că acestea se întîmplă astfel.

Dacă acum înclinația orbitei, când Luna se află în syzigii și nodurile oriunde; fie AB către AD precum sinusul unghiului de $4^{\circ} 59' 35''$ către sinusul unghiului de $5^{\circ} 17' 20''$, și să luăm unghiul AEG egal cu distanța dublă a nodurilor de la cvadraturi; și AH va fi sinusul înclinației căutate. Cu această înclinație a orbitei este egală înclinația ei când Luna e la 90 grade distanță de noduri. În alte poziții ale Lunii inegalitatea lunară, pe care o admite variația înclinației, se compensează în calculul latitudinii Lunii, și întrucâtva e anihilată de inegalitatea lunară a mișcării nodurilor (după cum am spus mai sus) și deci în calculul latitudinii poate fi neglijată.

SCOLIE

Prin acest calcul al mișcărilor lunare am voit să arăt că mișcările lunare pot fi calculate prin teoria gravitației din cauzele sale. Prin aceeași teorie am aflat afară de acestea că ecuația anuală a mișcării medii a Lunii provine din dilatația deosebită a orbitei Lunii prin forța Soarelui, potrivit corolarului 6, propoziția LXVI, Cartea I. Această forță e mai mare în perigeul Soarelui, și dilată orbita Lunii; în apogeul ei este mai mică și permite ca orbita să se contracteze. Pe orbita dilatată, Luna se rotește mai încet, pe cea contractată mai repede și ecuația anuală prin care se compensează această neegalitate în apogeul și perigeul Soarelui e nulă la distanța mijlocie a Soarelui de Pământ se ridică aproximativ la $11' 50''$, în alte locuri e proporțională cu ecuația centrului Soarelui; și se adună la mișcarea medie a Lunii când Pământul trece de la afeliul său la periheliu, și de partea opusă a orbitei se scade. Luând pentru raza orbitei mari 1000 și excentricitatea Pământului $16\frac{7}{8}$ această ecuație când e maximă, rezultă din teoria gravitației $11' 49''$. Dar excentricitatea Pământului se pare că e cu ceva mai mare, și mărim excentricitatea această ecuație trebuie mărită în același raport. Fie excentricitatea $16\frac{11}{12}$, și ecuația maximă va fi $11' 51''$.

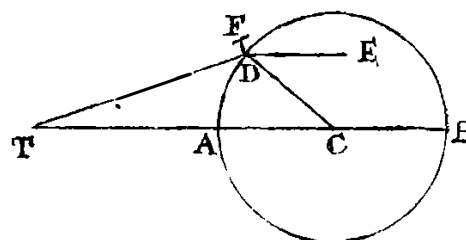
Am aflat de asemenea că în periheliul Pământului, din cauza forței mai mari a Soarelui, apogeul și nodurile Lunii se mișcă mai repede decât în afeliul ei, și aceasta în raport invers cu cubul distanței Pământului la Soare. Și de aici provin ecuațiile anuale ale acestor mișcări proporționale cu ecuația centrului Soarelui. Mișcarea Soarelui este însă în raport invers cu pătratul distanței Pământului la Soare, și ecuația maximă a centrului pe care o produce această inegalitate, este $1^{\circ} 56' 20''$ corespunzătoare excentricității menționate $16\frac{11}{12}$ a Soarelui. Căci dacă mișcarea Soarelui ar fi în raport invers cu cubul distanței, această inegalitate ar naște ecuația maximă de $2^{\circ} 54' 30''$. Și de aceea ecuațiile maxime pe care le nasc inegalitățile mișcărilor apogeului și a nodurilor Lunii sînt către $2^{\circ} 54' 30''$ precum mișcarea medie zilnică a apogeului și mișcarea medie zilnică a nodurilor Lunii către mișcarea medie zilnică a Soarelui. De unde rezultă ecuația maximă a mișcării medii a apogeului $19' 43''$ și ecuația maximă a mișcării medii a nodurilor $9' 24''$. Într-adevăr se adună ecuația dintîi și se scade ecuația din urmă, când Pământul trece din periheliul său în afeliu: și contrariul se întîmplă de partea opusă a orbitei.

Prin teoria gravitației s-a aflat de asemenea că acțiunea Soarelui asupra Lunii e cu ceva mai mare când diametrul transversal al orbitei lunare trece prin Soare decât când el e sub unghiuri drepte cu linia ce unește Pământul și Soarele; și de aceea orbita lunară e cu ceva mai mare în cazul dintii decât în cel din urmă. Și de aici se naște altă ecuație a mișcării medii lunare, depinzând de poziția apogeului Lunii față de Soare, care e maximă când apogeul Lunii se află în octant cu Soarele; și e nulă când el ajunge la cvadraturi sau syzigii; și se adună la mișcarea medie în trecerea apogeului Lunii de la cvadratura Soarelui la syzigie și se scade în trecerea apogeului de la syzigie la cvadratură. Această ecuație, pe care o voi numi semestrială, în octanții apogeului, când e maximă, crește la aproape $3' 45''$, după cum am putut deduce din fenomene. Aceasta este mărimea ei la distanța mijlocie a Soarelui de Pământ. Dar ea crește și se micșorează în raport invers cu cubul distanței Soarelui, și deci la distanța maximă a Soarelui e de $3' 34''$ și la cea minimă aproape de $3' 56''$: într-adevăr când apogeul Lunii e situat în afara octanților devine mai mică; și este către ecuația maximă, precum sinusul distanței duble a apogeului Lunii de la syzigia proximă sau cvadratura către rază.

Prin aceeași teorie a gravitației teoria acțiunii Soarelui asupra Lunii este cu puțin mai mare când linia dreaptă dusă prin nodurile Lunii trece prin Soare, decât când linia aceea face unghiuri drepte cu dreapta ce unește Soarele și Pământul. Și de aici se naște o altă ecuație a mișcării medii lunare, pe care o voi numi a doua semestrială, și care e maximă când nodurile se află în octanții Soarelui, și dispare când sînt în syzigii sau cvadraturi, și în alte poziții ale nodurilor e proporțională cu sinusul distanței duble a unuia din cele două noduri de la syzigia sau cvadratura cea mai apropiată: și se adună la mișcarea medie a Lunii, dacă Soarele se află în urma nodului celui mai apropiat, și se scade dacă este înainte, și în octanți, unde e maximă, se urcă la $47''$ la distanța mijlocie a Soarelui de la Pământ, după cum deduc din teoria gravitației. La alte distanțe de Soare această ecuație maximă în octanții nodurilor este în raport invers cu cubul distanței Soarelui de Pământ și deci în perigeul Soarelui se ridică la $49''$ în apogeu la aproximativ $45''$.

Prin aceeași teorie a gravitației apogeul Lunii progresează mai mult când este sau în conjuncțiune cu Soarele sau în opoziție cu el, și regresează când e în cvadratură cu Soarele. Și excentricitatea e maximă în primul caz și minimă în cel din urmă, potrivit corolarului 7, 8 și 9 propoziția LXVI, Cartea I. Și aceste inegalități prin aceleași corolare sînt foarte mari, și dau naștere ecuației principale a apogeului, pe care o voi numi semestrială. Și ecuația maximă a semestrului este aproximativ de $12^\circ 18'$, după cum am putut deduce din observații. Compatriotul nostru H o r o x a stabilit cel dintii că Luna se rotește pe o elipsă în jurul Pământului, situat în focarul ei inferior. H a l l e y a situat centrul elipsei pe un epiciclu al cărui centru se rotește în mod uniform în jurul Pământului. Și din mișcarea pe epiciclu se nasc inegalitățile amintite în progresarea și regresarea apogeului și în mărimea excentricității. Să ne închipuim distanța medie a Lunii de la Pământ împărțită în 100 000 părți, și fie T Pământul și TC excentricitatea medie a Lunii de 5505 părți. Să prelungim pe TC pînă în B , astfel ca CB să fie sinusul ecuației maxime semestriale $12^\circ 18'$ către raza TC , și cercul BDA descris din centrul C , cu intervalul CB , va fi epiciclu în care e situat centrul orbitei lunare și se învîrtește după ordinea literelor BDA . Să luăm unghiul BCD egal cu dublul

argumentului anual sau cu distanța dublă a locului adevărat al Soarelui de apogeul Lunii odată corectat, și CTD va fi ecuația semestrială a apogeului Lunii, și TD excentricitatea orbitei ei în apogeu tinzînd spre cel corectat a doua oară. Avînd însă mișcarea medie a Lunii și apogeul și excentricitatea, precum și axa mare a orbitei de 200000 de părți; din acestea se determină locul adevărat al Lunii pe orbită și distanța ei la Pămînt, și aceasta prin mijloacele foarte cunoscute.



În periheliul Pămîntului, din cauza forței mai mari a Soarelui, centrul orbitei Lunii se mișcă mai repede în jurul centrului C decît în afeliu, și anume în raport invers cu cubul distanței Pămîntului la Soare. Din cauza ecuației centrului Soarelui cuprinsă în argumentul anual, centrul orbitei Lunii se mișcă mai repede pe ep ciclu BDA în raport invers cu pătratul distanței Pămîntului la Soare. Pentru ca acesta să se miște mai repede în raport invers cu distanța; din centrul D al orbitei să ducem dreapta DE spre apogeul Lunii, sau paralelă cu dreapta TC și să luăm unghiul EDF egal cu excesul argumentului anual menționat față de distanța apogeului Lunii de la perigeul Soarelui înainte; sau ceea ce e același lucru, să luăm unghiul CDF egal cu complementul anomaliei adevărate a Soarelui la 360 grade. Și fie DF către DC precum dublul excentricității orbitei mari către distanța mijlocie a Soarelui de Pămînt, și mișcarea medie zilnică a Soarelui de la apogeul Lunii către mișcarea medie zilnică a Soarelui de la apogeul propriu luate împreună, adică, precum $33\frac{7}{8}$ către 1000 și $52' 27'' 16'''$ către $59' 8'' 10'''$ luate împreună, sau precum 3 către 100. Și să ne închipuim că centrul orbitei lunare e situat în punctul F , și se învîrtește pe un ep ciclu al cărui centru este D , și raza DF , în timp ce punctul D progresează pe circumferința cercului $DABD$. În acest fel viteza, cu care se va mișca centrul orbitei Lunii pe o linie curbă oarecare descrisă în jurul centrului C , va fi aproximativ în raport invers cu cubul distanței Soarelui la Pămînt, după cum trebuie.

Calculul acestei mișcări e dificil, dar se face mai ușor prin aproximația următoare. Dacă distanța medie a Lunii la Pămînt este de 100000 de părți, și excentricitatea TC este de 5505 părți ca mai sus: dreapta CB sau CD se va afla de $1172\frac{3}{4}$ părți, și dreapta DF de $35\frac{1}{5}$ părți. Și această dreaptă la

distanța TC subîntinde unghiul la Pămînt pe care-l generează translația centrului orbitei de la locul D spre locul F în mișcarea acestui centru: și dublul aceleiași drepte într-o poziție paralelă la distanța focarului superior a orbitei Lunii de la Pămînt, subîntinde același unghi, pe care-l generează translația în mișcarea focarului, și la distanța Lunii de Pămînt subîntinde unghiul pe care-l generează aceeași translație în mișcarea Lunii, și care de aceea se poate numi ecuația a doua a centrului. Și această ecuație, la distanța mijlocie a Lunii de Pămînt, este aproximativ precum sinusul unghiului, pe care-l formează dreapta DF cu dreapta dusă de la punctul F la Lună, și cînd e maximă devine $22' 5''$. Unghiul însă pe care-l formează dreapta DF și dreapta dusă din punctul F la Lună, se află fie scăzînd unghiul EDF din anomalia medie a Lunii, fie adunînd distanța Lunii de la Soare la distanța

apogeului Lunii de la apogeul Soarelui. Și după cum e raza către sinusul unghiului astfel aflat, tot așa $2'25''$ sînt către ecuația a doua a centrului, de adunat dacă suma e mai mică decît un semicerc, de scăzut dacă e mai mare. Astfel se va obține lungimea ei în syzigiile astrelor.

Cum atmosfera Pămîntului refractă lumina Soarelui pînă la înălțimea de 35 sau 40 de mile, și refractînd-o o împrăștie în umbra Pămîntului, și împrăștiind lumina la marginea umbrei dilată umbra; la diametrul umbrei, care provine din paralaxă, adun un minut în eclipsele Lunii, sau un minut și o treime.

Dar teoria Lunii trebuie examinată și stabilită prin fenomene mai întîi în syzigii, apoi în cvadraturi, și pe urmă în octanți. Și cine vrea să întreprindă această lucrare va afla ușor în mișcările medii ale Soarelui și Lunii în timpul meridianului în Observatorul regal *Greenwich*, în ziua ultimă a lunii decembrie stil vechi al anului 1700: anume mișcarea medie a Soarelui $\text{♄ } 20^\circ 43' 40''$, și apogeul ei $\text{♄ } 7^\circ 44' 30''$; și mișcarea medie a Lunii $\approx 15^\circ 21' 00''$; și a apogeului ei $\text{♄ } 8^\circ 20' 00''$; și a nodului ascendent $\odot 27^\circ 24' 20''$; și diferența dintre meridianul acestui Observator și al Observatorului regal din *Paris* $0^h 9^m 20^s$ iar mișcarea medie a Lunii și a apogeului ei nu se obține destul de precis încă.

PROPOZIȚIA XXXVI. PROBLEMA XVII

Să aflăm forța Soarelui ce mișcă marea.

Forța *ML* sau *PT* a Soarelui, în cvadraturile lunare, pentru perturbările mișcărilor lunare era (potrivit propoziției XXV a acestei Cărți) către forța gravității la noi, precum 1 către 638092,6; și forța *TM—LM* sau *2PK* în syzigiile lunare este de două ori mai mare. Aceste forțe însă, dacă ne coborîm la suprafața Pămîntului, se micșorează în raportul distanțelor de la centrul Pămîntului, adică în raportul de $60\frac{1}{2}$ la 1; și deci forța de mai înainte la suprafața

Pămîntului este către forța gravității precum 1 către 38604600. Prin această forță marea e apăsată în locurile, care sînt depărtate de 90 grade de Soare.

Prin cealaltă forță, care e de două ori mai mare, marea se ridică și sub Soare și în regiunea opusă Soarelui. Suma forțelor către forța gravității precum 1 către 12868200. Și fiindcă aceeași forță produce aceeași mișcare, fie că ea apasă apa în regiunile care sînt la distanță de 90 grade de Soare, fie că o ridică în regiunile sub Soare și opuse Soarelui, această sumă va fi forța întregă a soarelui pentru agitarea mării; și va avea același efect, ca și cînd întregă ar ridica marea în regiunile sub Soare și cele opuse Soarelui, iar în regiunile care sînt la o distanță de 90 grade de Soare nu ar acționa de loc.

Aceasta este forța Soarelui ce mișcă marea într-un loc oarecare dat, cînd Soarele se află atît în vîrfurile locului cît și la distanța sa mijlocie de Pămînt. În alte poziții ale Soarelui forța pentru ridicarea mării este precum sinus versus-ul dublului înălțimii Soarelui deasupra orizontului locului și în raport invers cu cubul distanței Soarelui la Pămînt.

COROLAR. Cum forța centrifugă a părților Pămîntului provenită din mișcarea diurnă a Pămîntului, care este către forța gravității precum 1 către 289, face ca înălțimea apei sub ecuator să întreacă înălțimea ei sub poli cu 85472 picioare pariziene, ca mai sus, în propoziția XIX; forța solară despre

care am vorbit, deoarece este către forța gravității precum 1 către 12868200, și deci către forța centrifugă precum 289 către 12868200 sau 1 la 44527, va face ca înălțimea apei în regiunile sub Soare și cele opuse Soarelui să întracă înălțimea ei în locurile, care sînt la 90 grade distanță de Soare, numai cu un picior parizian și unsprezece degete împreună cu a treizecea parte din deget. Căci această măsură este către măsura de 85472 picioare precum 1 către 44527.

PROPOZIȚIA XXXVII. PROBLEMA XVIII

Să aflăm forța Lunii ce mișcă marea.

Forța Lunii pentru mișcarea mării trebuie dedusă din proporția ei către forța Soarelui, și această proporție trebuie dedusă din proporția mișcărilor mării, care provin din aceste forțe. Înaintea gurii fluviului *Avon*, la a treia piatră sub *Bristol*, în timp de iarnă și toamnă, ascensiunea întreagă a apei în conjuncțiunea și opoziția astrelor, după observațiile lui *Samuel Sturmy*, este de aproape 45 picioare, iar în cvadraturi numai de 25 picioare. Înălțimea întii provine din suma forțelor, cea din urmă din diferența lor. Fie deci S și L forțele Soarelui și al Lunii situate la ecuator și la distanța medie de Pămînt, și va fi $L + S$ către $L - S$ precum 45 către 25, sau 9 către 5.

În portul *Plymouth* fluxul mării după observațiile lui *Samuel Colepress* se ridică la înălțimea mijlocie de aproape 16 picioare înălțime, și în timp de iarnă și toamnă înălțimea fluxului în syzigii poate întrece înălțimea ei în cvadraturi cu mai bine de 7 sau 8 picioare. Dacă diferența maximă a acestor înălțimi este de 9 picioare, $L + S$ va fi către $L - S$ precum $20\frac{1}{2}$ către $11\frac{1}{2}$ sau 41 către 23. Care proporție coincide de ajuns de bine cu cea de mai înainte. Din cauza mărimii fluxului în portul *Bristol*, se pare că trebuie să acordăm mai mare încredere observațiilor lui *Sturmy*; și deci, pînă ce se va obține ceva mai sigur, vom folosi proporția de 9 către 5.

De altfel din cauza mișcărilor reciproce ale apelor, fluxurile maxime nu coincid cu syzigiile astrelor, ci vin, după cum s-a spus, sau în rîndul al treilea după syzigii, sau urmează imediat după a treia trecere a Lunii prin meridianul locului după syzigii, sau îndeosebi (după cum notează *Sturmy*) sînt în cel de-al treilea rînd după Luna nouă sau plină sau aproximativ a douăsprezecea oră de la Luna nouă sau plină, și deci coincid cu aproximativ a patruzeci și treia oră după Luna nouă sau plină. Dar în acest port au loc aproximativ în ora a șaptea de la trecerea Lunii prin meridianul locului; și deci urmează imediat după trecerea Lunii la meridian cînd distanța Lunii în sens direct față de Soare sau de opoziția Soarelui este de aproape 18 sau 19 grade. Vara și iarna se manifestă mai tare, nu în solstițiile înseși, ci cînd Soarele e departe de solstiții cu aproximativ a zecea parte a circuitului întreg, sau cu circa 36 sau 37 grade. Și la fel fluxul maxim al mării se produce după trecerea Lunii prin meridianul locului, cînd Luna e la o depărtare de Soare de aproape a zecea parte a mișcării întregi de la flux la flux. Fie această distanță de aproximativ $18\frac{1}{2}$ grade. Și forța Soarelui la această distanță a Lunii de la syzigii și cvadraturi, va fi mai mică pentru mărirea sau micșorarea

mișcării mării ce provine din forța Lunii, decît în syzigii și cvadraturi, în raportul razei către sinusul complementului acestei distanțe duble sau a unui unghi de 37 grade, adică în raportul lui 10 000 000 către 7986355. Și deci în analogia de mai sus în loc de S trebuie să scriem $0,7986355 S$.

Dar și forța Lunii în cvadraturi, din cauza declinației Lunii de la ecuator, trebuie să se micșoreze. Căci Luna în cvadraturi, sau mai bine zis în gradul $18\frac{1}{2}$ după cvadraturi, se află în declinația de aproximativ $22^\circ 13'$. Și forța pentru mișcarea mării din partea astrului cînd acesta declină de la ecuator, se micșorează aproximativ în raportul patratului sinusului complementului declinației. Și deci forța Lunii în aceste cvadraturi este de numai $0,8570327L$. Prin urmare $L + 0,7986355S$ este către $0,8570327L - 0,7986355S$ precum 9 către 5.

Afară de aceasta diametrele orbitei, în care Luna ar trebui să se miște fără excentricitate, sînt între ele precum 69 către 70; și deci distanța Lunii la Pămînt în syzigii este către distanța ei în cvadraturi precum 69 către 70, celelalte condiții fiind egale. Și distanțele ei de gradul $18\frac{1}{2}$ de la syzigii, cînd se produce fluxul maxim, și în gradul $18\frac{1}{2}$ de la cvadraturi cînd se naște fluxul minim, sînt către distanța ei mijlocie precum 69,098747 și 69,897345 către $69\frac{1}{2}$. Dar forțele Lunii ce mișcă marea sînt în raport invers cu cubul raportului distanțelor, și deci forțele la distanța maximă și minimă sînt către forța la distanța mijlocie precum 0,9830427 și 1,017522 către 1. De unde $1,017522L + 0,7986355 S$ către $0,9830427 \times 0,8570327L - 0,7986355S$ precum 9 la 5. Și S către L precum 1 către 4,4815. Deci cum forța Soarelui este către forța gravitației precum 1 către 12868200, forța Lunei va fi către forța gravitației precum 1 către 2871 400.

COROLARUL 1. Deoarece apa acționată de forța Soarelui se ridică la înălțimea de 1 picior și 11 degete împreună cu a treizecea parte dintr-un deget, prin aceeași forță a Lunii se va urca la înălțimea de 8 picioare și $7\frac{5}{22}$ degete, și prin ambele forțe la înălțimea de 10 picioare și jumătate, și cînd Luna este în perigeu la înălțimea de 12 picioare și jumătate și mai mult, îndeosebi cînd fluxul este ajutat de vîrtejuri de vînt. Însă o forță atît de mare este deajuns pentru excitarea tuturor mișcărilor mării, și corespunde bine cu cantitatea de mișcare. Căci în mările care sînt deschise de la răsărit la apus, ca în Marea *Pacifică* și în părțile în afară de tropice ale Mării *Atlantice* și *Etiopiene*, apa de obicei se ridică la înălțimea de 6, 9, 12, sau 15 picioare. Dar în Marea *Pacifică*, care e mai adîncă și mai lată, se spune că fluxurile sînt mai mari decît în marea *Atlantică* și *Etiopiană*. Căci pentru ca fluxul să fie deplin, lățimea mării de la răsărit la apus nu trebuie să fie mai mică de 90 de grade. În Marea *Etiopiană* ridicarea apei între tropice e mai mică decît în zonele temperate, din cauza îngustimii mării între *Africa* și partea de sud a *Americii*. La mijlocul mării apa nu se poate urca, decît dacă în același timp se coboară simultan la fiecare litoral atît oriental cît și occidental: fiindcă totuși în mod alternativ pe litoralele mărilor noastre înguste trebuie să se coboare. De aceea fluxul și refluxul în insulele, care sînt foarte îndepărtate de Continent, sînt de obicei foarte mici. În anumite porturi, în care apa e silită să intre și să iasă cu mare putere prin locuri puțin adînci, pentru

a umple și goli golfurile, fluxul și refluxul de obicei trebuie să fie mai mari, ca la *Plymouth* și la podul *Chepstow* în *Anglia*, la munții *St. Michel* și la orașul *Avranches* în *Normandia* la *Cambaia* și *Pegu* în *India* orientală. În aceste locuri marea, apropiindu-se și depărtându-se cu mare viteză, când inundă litoralele când le lasă uscate pe mai multe mile. Nici nu se poate frînge putera fluxului și refluxului, înainte ca apa să fie ridicată sau coborîtă la 30,40, sau 50 de picioare și mai mult. Și la fel este cazul strîmtorilor lungi și puțin adînci ca aceea a lui *Magellan* și aceea care înconjoară *Anglia*. În porturile și strîmtorile de acest fel marea din cauza puterii cursului fluxului și refluxului crește peste măsură. În litoralele însă care printr-o coborîre precipitată privesc spre o mare adîncă și deschisă, unde apa se poate urca și coborî fără să înainteze și să se retragă cu putere, mărimea fluxului corespunde forțelor Soarelui și Lunii.

COROLARUL 2. Cum forța Lunii ce mișcă marea este către forța gravitației precum 1 către 2871400, este evident că această forță este cu mult mai mică decît aceea care se poate observa fie prin experiențele pendulelor, fie prin altele statice sau hidrostatice. Această forță produce un efect sensibil numai prin fluxul maritim.

COROLARUL 3. Deoarece forța Lunii ce mișcă marea este către forța asemănătoare a Soarelui precum 4,4815 către 1, și forțele (potrivit corolarului 14, propoziția LXVI, Cartea I) sînt precum densitățile corpurilor Lunii și Soarelui și cuburile diametrelor aparente luate împreună; densitatea Lunii va fi către densitatea Soarelui precum 4,4815 către 1, și în raport invers cu cubul diametrului Lunii către cubul Soarelui: adică (cum diametrele mijlocii aparente ale Lunii și Soarelui sînt $31'16\frac{1}{2}"$ și $32'12"$) precum 4891 către 1000. Dar densitatea Soarelui era către densitatea Pămîntului precum 1000 către 4000; și deci densitatea Lunii este către densitatea Pămîntului precum 4891 către 4000 sau 11 către 9. Așadar corpul Lunii e mai dens și mai terestru decît Pămîntul nostru.

COROLARUL 4. Și cum diametrul adevărat al Lunii din observațiile astronomice este către diametrul adevărat al Pămîntului precum 100 către 365; masa Lunii va fi către masa Pămîntului precum 1 către 39,788.

COROLARUL 5. Și gravitatea acceleratoare la suprafața Lunii va fi aproape de trei ori mai mică decît gravitatea acceleratoare la suprafața Pămîntului.

COROLARUL 6. Și distanța centrului Lunii la centrul Pămîntului va fi către distanța centrului Lunii la centrul comun de greutate al Pămîntului și al Lunii; precum 40,788 către 39,788.

COROLARUL 7. Și distanța mijlocie a centrului Lunii de la centrul Pămîntului în octanții Lunii va fi aproximativ de $60\frac{2}{5}$ semidiametre maxime ale Pămîntului. Căci semidiametrul maxim al Pămîntului a fost de 19658600 picioare pariziene, și distanța medie a centrelor Pămîntului și Lunii, constînd din $60\frac{2}{5}$ semidiametre de acest fel, este egal cu 1187379440 picioare. Și această distanță (potrivit corolarului de mai sus) este către distanța centrului Lunii de la centrul comun de greutate al Pămîntului și al Lunii, precum 40,788 către 39,788; și deci distanța din urmă este de 1158268534 picioare.

Și cum Luna se învîrtește, față de stelele fixe, în 27 zile, 7 ore și $43\frac{4}{9}$ minute, sinusul versus al unghiului, pe care-l descrie Luna în timpul unui minut, este 12752341, raza fiind 1000,000000,000000. Și după cum e raza către acest sinus versus, tot așa sînt 1158268534 picioare către 14,7706353 picioare. Prin urmare Luna căzînd spre Pămînt cu forța, cu care e reținută pe orbită, în timpul unui minut va descrie 14,7706353 picioare. Și mărid această forță în raportul $178\frac{29}{40}$ către $177\frac{29}{40}$, vom obține forța întreagă a gravității pe orbita Lunei potrivit corolarului propoziției III. Și Luna căzînd cu această forță în timp de un minut va descrie 14,8538067 picioare. Și la a 60-a parte a distanței Lunii de centrul Pămîntului, adică la o distanță de 197896573 picioare de centrul Pămîntului, un corp greu căzînd în timp de o secundă va descrie de asemenea 14,8538067 picioare. Și deci la distanța de 19615800 picioare, care este semidiametrul mijlociu al Pămîntului, corpul greu căzînd va descrie 15,11175 picioare, sau 15 picioare, 1 deget și $4\frac{1}{11}$ linii. Aceasta va fi căderea corpurilor la latitudinea de 45 grade. Și din tabela precedentă descrisă în propoziția XX, căderea va fi cu ceva mai mare la latitudinea *Parisului* cu un exces de aproape $\frac{2}{3}$ linii. Prin urmare potrivit acestui calcul corpurile grele căzînd în vid la latitudinea *Parisului* vor descrie în timpul unei secunde aproximativ 15 picioare pariziene, 1 deget și $4\frac{26}{33}$ linii. Și dacă gravitatea se micșorează scăzînd forța centrifugă, care provine din mișcarea zilnică a Pămîntului la acea latitudine; corpurile grele căzînd acolo vor descrie în timpul unei secunde 15 picioare, 1 deget și $1\frac{1}{2}$ linii. Și mai sus la propoziția IV și XIX s-a arătat că corpurile grele la latitudinea *Parisului* cad cu această viteză.

COROLARUL 8. Distanța mijlocie a centrelor Pămîntului și Lunii, în syzigiile Lunii este de 60 semidiametre mari ale Pămîntului, scăzînd aproximativ a 30-a parte a semidiametrului. Și în cvadraturile Lunii distanța mijlocie a centrelor este de $60\frac{5}{6}$ semidiametre ale Pămîntului. Căci aceste două distanțe sînt către distanța mijlocie a Lunii în octanți precum 69 și 70 către $69\frac{1}{2}$ potrivit propoziției XXVIII.

COROLARUL 9. Distanța mijlocie a centrelor Pămîntului și Lunii în syzigiile Lunii este de 60 semidiametre mijlocii ale Pămîntului și a zecea parte a semidiametrului. Și în cvadraturile Lunii distanța mijlocie a acelorași centre este de 61 semidiametre mijlocii ale Pămîntului, scăzînd a 30-a parte a semidiametrului.

COROLARUL 10. În syzigiile Lunii paralaxa ei orizontală medie la latitudinea de 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90 grade este respectiv de 57'20", 57'16", 57'14", 57'12", 57'10", 57'8", 57'4".

În aceste calcule nu am considerat atracția magnetică a Pămîntului, a cărei cantitate e foarte mică și nu se cunoaște. Dacă vreodată această atracție se va cunoaște, și dacă măsurile gradelor în meridian, și lungimile pendulelor izocrone în diversele paralele, și legile mișcărilor mării, și paralaxa Lunii cu diametrele aparente ale Soarelui și Lunii se vor determina din fenomene mai precis: acest calcul întreg se va putea repeta mai exact.

PROPOZIȚIA XXXVIII. PROBLEMA XIX

Să aflăm figura corpului Lunii.

Dacă corpul lunar ar fi fluid și la fel cu marea noastră, forța Pământului ce ridică acel fluid atât în părțile cele mai apropiate cât și în cele mai depărtate ar fi către forța Lunii, cu care marea noastră se ridică atât în părțile de sub Lună cât și în cele opuse Lunii, precum gravitatea acceleratoare a Lunii spre Pământ către gravitatea acceleratoare a Pământului spre Lună, și diametrul Lunii către diametrul Pământului luați împreună; adică, precum 39,788 către 1 și 100 către 365 luate împreună, sau 1081 către 100. De unde cum marea noastră prin forța Lunii se ridică la $8\frac{3}{5}$ picioare, fluidul lunar prin forța Pământului ar trebui să se ridice la 93 picioare. Din aceeași cauză figura Lunii ar fi sferoidală, al cărei diametru maxim prelungit ar trece prin centrul Pământului, și ar întrece diametrele perpendiculare cu un exces de 186 picioare. Așadar Luna posedă o astfel de figură, și trebuie să o fi luat de la început. Q.E.I.

COROLAR. De aici provine că aceeași parte a Lunii e îndreptată totdeauna spre Pământ. Căci în altă poziție corpul lunar nu poate fi în repaus, ci oscilând totdeauna va reveni la această poziție. Totuși oscilațiile, din cauza micimii forțelor ce acționează, ar fi foarte lente: astfel că fața care ar trebui să privească totdeauna spre Pământ, poate privi celălalt focar al orbitei lunare (prin raționamentul adus în propoziția XVII), fără a fi imediat abătut și îndreptat spre Pământ.

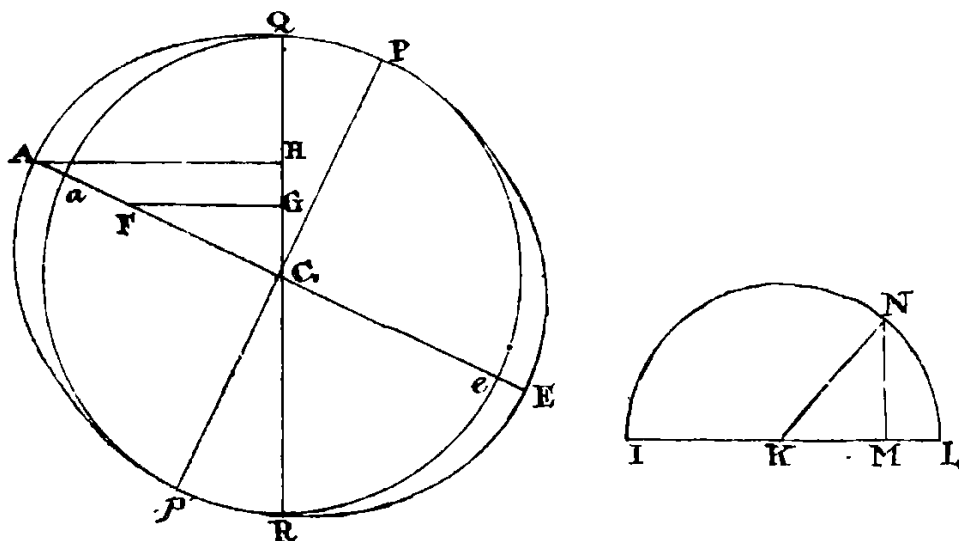
L E M A I

Dacă APEp reprezintă Pământul uniform de dens, marcat cu centrul C și polii P,p și ecuatorul AE; și dacă ne închipuim că din centrul C, cu raza CP descriem sfera Pape; iar QR este planul pe care o dreaptă dusă de la centrul Soarelui la centrul Pământului stă normal; și diversele particule ale întregului Pământ exterior PapA PepE, care sînt situate în afara sferei considerate, tind să se îndepărteze de o parte și de alta a planului QR, și tendința fiecărei particule este precum distanța ei la plan: zic că mai întîi întreaga forță și eficacitate a tuturor particulelor în cercul ecuatorial AE, situate în afară de sferă în mod uniform pe întreg circuitul după modelul unui inel, pentru a roti Pământul în jurul centrului lui, este către întreaga forță și eficacitate a aceluiași număr de particule concentrate în punctul A al ecuatorului, care e mai îndepărtat de planul QR, pentru a roti Pământul cu o mișcare circulară asemănătoare în jurul centrului său, precum unul către doi. Și această mișcare circulară are loc în jurul unei axe, situată la intersecția comună a ecuatorului și a planului QR.

Căci din centrul K cu diametrul IL să descriem semicercul INL. Să ne închipuim semicircumferința INL împărțită în nenumărate părți egale, și din diversele părți N să coborîm pe diametrul IL sinusul NM. Și suma pătratelor tuturor sinusurilor NM va fi egală cu suma pătratelor sinusurilor

KM , și fiecare din cele două sume va fi egală cu suma pătratelor aceluiași număr de semidiametre KN ; și deci suma pătratelor tuturor NM va fi de două ori mai mică decât suma pătratelor aceluiași număr de semidiametre KN .

Să împărțim acum perimetrul cercului AE în tot atâtea particule egale, și din fiecare din ele F să coborâm pe planul QR perpendiculara FG , precum și din punctul A perpendiculara AH . Și forța, cu care particula F se înde-



părtează de planul QR , prin ipoteză va fi precum perpendiculara FG ; și această forță înmulțită cu distanța CG va fi puterea particulei F în rotirea Pământului în jurul centrului său. Și deci puterea particulei în locul F , va fi către puterea particulei în locul A , precum $FG \times GC$ către $AH \times HC$, adică, precum FC^2 către AC^2 ; și de aceea puterea întreagă a tuturor particulelor în locurile lor F va fi către puterea aceluiași număr de particule în locul A , precum suma tuturor FC^2 către suma aceluiași număr de AC^2 , adică (potrivit celor demonstrate) precum unul către doi. Q.E.D.

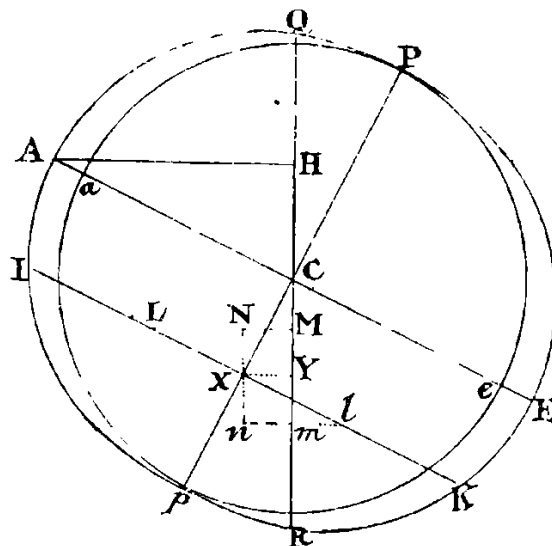
Și fiindcă particulele acționează îndepărtându-se perpendicular de planul QR , și aceasta în mod egal de fiecare parte a acestui plan ele rotesc circumferința cercului ecuatorului, și Pământul legat de el, în jurul axei situate atît în planul QR cît și în planul ecuatorului.

LEMĂ 11

Presupunînd aceleași: zic în al doilea rînd că forța și puterea întreagă a tuturor particulelor situate de toate părțile în afara sferei, pentru a roti Pământul în jurul aceleiași axe, este către forța întreagă a aceluiași număr de particule, situate în mod uniform în jurul întregului cerc ecuatorial AE sub forma unui inel, pentru a roti Pământul cu o mișcare circulară asemănătoare, precum 2 către 5.

Căci fie IK un cerc oarecare mai mic paralel cu ecuatorul AE , și fie L, l două particule oarecare egale situate pe acest cerc în afara sferei Pape. Și dacă în planul QR , care e perpendicular pe raza dusă la Soare, coborâm perpendicularele LM, lm : forțele întregi, prin care acele particule se înde-

părtează de planul QR , vor fi proporționale cu perpendicularele LM , lm . Dar fie dreapta Ll paralelă cu planul $Pape$, și să o bisectăm în X ; și prin punctul X să ducem Nn , care să fie paralelă cu planul QR și să întâlnească perpendicularele LM , lm în N și n , și să coborâm pe planul QR perpendiculara XY . Și forțele contrare ale particulelor L și l , pentru rotirea Pământului în părți contrare, sînt precum $LM \times MC$ și $lm \times mC$, adică, precum $LN \times MC + NM \times MC$, și $ln \times mC - nm \times mC$; sau $LN \times MC + NM \times MC$ și $LN \times mC - NM \times nC$: și diferența lor $LN \times Mm - NM \times (MC + mC)$ este forța ambelor particule luate împreună pentru rotația Pământului. Partea pozitivă a acestei diferențe $LN \times Mm$ sau $2LN \times NX$ este către forța $2AH \times HC$ a celor două particule de aceeași mărime situate în A , precum LX^2 către AC^2 . Și partea negativă $NM \times (MC + mC)$ sau $2XY$



$\times CY$ către forța $2AH \times HC$ a acelorași particule situate în A , precum CX^2 către AC^2 . Și deci diferența părților, adică forța celor două particule L și l luate împreună pentru rotirea Pământului este către forța a două particule egale cu aceleași și situate în locul A pentru aceeași rotire a Pământului, precum $LX^2 - CX^2$ către AC^2 . Dar dacă împărțim circumferința IK a cercului IK în nenumărate particule egale L , toate LX^2 vor fi către tot atâtea IX^2 precum 1 către 2 (potrivit lemei 1) și către tot atâtea AC^2 , precum IX^2 către $2AC^2$; și același număr de CX^2 către același număr de AC^2 precum $2CX^2$ către $2AC^2$. De aceea forțele unite ale tuturor particulelor în circuitul cercului IK sînt către forțele unite ale aceleiași număr de particule în locul A , precum forțele unite $IX^2 - 2CX^2$ către $2AC^2$: și de aceea (potrivit lemei I) către forțele unite ale aceleiași număr de particule în circuitul cercului AE , precum $IX^2 - 2CX^2$ către AC^2 .

Dacă acum împărțim diametrul sferei Pp în nenumărate părți egale, pe care să fie situate tot atâtea cercuri IK ; materia în perimetrul unui cerc oarecare IK va fi precum IX^2 : și deci forța acelei materii pentru rotirea Pământului, va fi precum IX^2 înmulțit cu $IX^2 - 2CX^2$. Și forța aceleiași materii, dacă ar fi situată pe perimetrul cercului AE , ar fi precum IX^2 înmulțit cu AC^2 . Și de aceea forța tuturor particulelor ale întregii materii, situate în afara sferei pe perimetrele tuturor cercurilor, este către forța aceleiași număr de particule situate pe perimetrul cercului maxim AE , precum toate IX^2 înmulțit cu $IX^2 - 2CX^2$ către același număr de IX^2 înmulțit cu AC^2 , adică, precum toate $AC^2 - CX^2$ înmulțit cu $AC^2 - 3CX^2$ către același număr de $AC^2 - CX^2$ înmulțit cu AC^2 , adică, precum toate $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$ către același număr de $AC^4 - AC^2 \times CX^2$, adică, precum întreaga cantitate fluentă a cărei fluxiune este $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$, către întreaga cantitate fluentă a cărei fluxiune este $AC^4 - AC^2 \times CX^2$; și apoi prin metoda fluxiunilor, precum $AC^4 \times CX - \frac{4}{3} AC^2 \times CX^3 + \frac{3}{5} CX^5$ către $AC^4 \times CX - \frac{1}{3} AC^2 \times CX^3$,

adică dacă în loc de CX scriem întregul Cp sau AC , precum $\frac{4}{15} AC^5$ către $\frac{2}{3} AC^5$, adică, precum 2 către 5. Q.E.D.

LEMA III

Presupunînd aceleași: zic în al treilea rînd că mișcarea întregului Pămînt în jurul axei considerată mai sus, compusă din mișcările tuturor particulelor, va fi către mișcarea inelului menționat în jurul aceleiași axe într-un raport, care se compune din raportul materiei Pămîntului către materia inelului, și din raportul a trei pătrate ale cadranelor unui cerc oarecare către două pătrate ale diametrului; adică, în raportul materiei către materie și al numărului 925275 către numărul 1000000.

Căci mișcarea unui cilindru ce se învîrtește în jurul axei sale imobile este către mișcarea sferei înscrise ce se rotește împreună cu ea, precum patru pătrate egale oarecare către trei cercuri înscrise în ele: și mișcarea cilindrului către mișcarea unui inel foarte subțire, ce înconjoară sfera și cilindrul în contactul lor comun, precum dublul materiei în cilindru către triplul materiei în inel; și această mișcare a inelului continuată în mod uniform în jurul axei cilindrului, către mișcarea sa uniformă în jurul diametrului propriu, efectuată în același timp periodic, precum circumferința cercului către dublul diametrului.

IPOTEZA II

Dacă inelul menționat celeilalte părți ale Pămîntului fiind înlăturat, ar fi purtat singur pe orbita Pămîntului, într-o mișcare anuală în jurul Soarelui, și în același timp s-ar învîrți cu mișcarea zilnică în jurul axei sale, înclinată față de planul eclipticei sub un unghi de $23\frac{1}{2}$ grade: mișcarea punctelor echinocțiale va fi aceeași, fie că inelul este fluid, fie că ar consta dintr-o materie rigidă și dură.

PROPOZIȚIA XXXIX. PROBLEMA XX

Să aflăm precesiunea echinocțiilor.

Mișcarea mijlocie orară a nodurilor Lunii pe orbita circulară, cînd nodurile sînt în cvadraturi, era $16'' 35''' 16^{IV} 36^V$, și jumătatea ei $8'' 17''' 38^{IV} 18^V$ (din motivele explicate mai sus) este mișcarea medie orară a nodurilor pe o astfel de orbită; și într-un an sidereal întreg $20^\circ 11' 46''$. Prin urmare fiindcă nodurile Lunii pe o astfel de orbită parcurg anual retrograd $20^\circ 11' 46''$; și dacă ar fi mai multe Luni, mișcările nodurilor fiecăreia (potrivit corolarului 16, propoziția LXVI, Cartea I) vor fi precum timpurile periodice: dacă Luna în timpul unei zile siderale s-ar învîrți în apropierea suprafeței Pămîntului, mișcarea anuală a nodurilor ar fi către $20^\circ 11' 46''$ precum ziua siderală de $23^h 56^m$ către timpul periodic al Lunii de $27^d 7^h 43^m$, adică, precum 1436 către 39343. Și același este cazul nodurilor inelului Lunilor ce înconjoară

Pământul; fie că Lunile nu se ating reciproc, fie că sînt lichide și formează un inel continuu, fie că în sfîrșit inelul devine rigid și inflexibil.

Să ne închipuim așadar că inelul, în ce privește cantitatea de materie, este egal cu Pământul întreg *PapAPepE* care este în afara sferei *Pape* (vezi figura lemei II) și fiindcă sfera este către Pământul exterior precum aC^2 către $AC^2 - aC^2$ adică (deoarece semidiametrul cel mic al Pământului *PC* sau *aC* este către semidiametrul cel mare *AC* precum 229 către 230) precum 52441 către 459; dacă inelul ar înconjura Pământul în jurul ecuatorului și fiecare din ele s-ar învîrți simultan în jurul diametrului inelului, mișcarea inelului ar fi către mișcarea sferei interioare (potrivit lemei III a acestei Cărți) precum 459 către 52441 și 1 000 000 către 925275 luate împreună, adică, precum 4590 către 485223; și deci mișcarea inelului ar fi către suma mișcărilor inelului și sferei, precum 4590 către 489813. De aceea dacă inelul aderează la sferă, și comunică sferei mișcarea sa cu care regresează nodurile sale sau punctele echinoctiale: mișcarea ce va rămîne în inel va fi către mișcarea sa de mai înainte, precum 4590 către 489813; și de aceea mișcarea punctelor echinoctiale va scădea în același raport. Deci mișcarea anuală a punctelor echinoctiale a corpului compus din inel și sferă va fi către mișcarea $20^{\circ} 11' 46''$, precum 1436 către 39343 și 4590 către 489813 luate împreună, adică, precum 100 către 292369. Forțele însă prin care nodurile Lunilor (după cum am explicat mai sus) și de aceea prin care punctele echinoctiale ale inelului regresează (adică forțele *3IT*, în fig., propoziția XXX) sînt în diversele particule precum distanțele particulelor de la planul *QR*, și prin aceste forțe particulele se îndepărtează de plan; și de aceea (potrivit lemei II) dacă materia inelului s-ar împrăști pe întreaga suprafață a sferei la fel ca în figura *PapAPepE* formînd partea de sus a pământului, forța și puterea întreagă a tuturor particulelor pentru rotirea Pământului în jurul unui diametru oarecare al ecuatorului, și deci pentru mișcarea punctelor echinoctiale, va deveni mai mică în raportul de 2 la 5. Și deci regresul anual al echinoctiilor ar fi către $20^{\circ} 11' 46''$ precum 10 către 73092; și deci va fi $9^{\circ} 56' 50''$ ^{IV}.

De altfel această mișcare trebuie micșorată din cauza înclinării planului ecuatorului față de planul eclipticei, și anume în raportul sinusului 91706 (care e sinusul complementului gradelor $23\frac{1}{2}$) către raza 100000. Din care cauză această mișcare va fi $9^{\circ} 7' 20''$ ^{IV}. Aceasta este precesiunea anuală a echinoctiilor produsă de forța Soarelui.

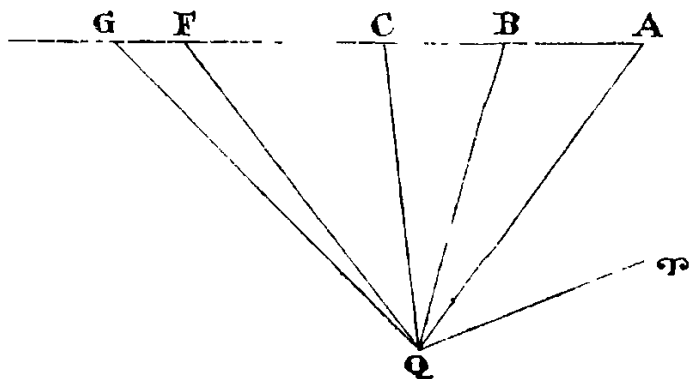
Dar forța Lunii la mișcarea mării era către forța Soarelui, aproximativ precum 4,4815 către 1. Și forța Lunii pentru mișcarea echinoctiilor e în aceeași proporție către forța Soarelui. Și de aici provine precesiunea anuală a echinoctiilor ce se naște din forța Lunii de $40'' 52'' 52''$ ^{IV}, și întreaga precesiune anuală născută din cele două forțe $50'' 00'' 12''$ ^{IV}. Și această mișcare e de acord cu fenomenele. Căci precesiunea echinoctiilor din observațiile astronomilor este anual de aproximativ de 50 secunde. Dacă înălțimea Pământului la ecuator ar întrece înălțimea lui la poli, cu mai mult de $17\frac{1}{6}$ mile, materia lui ar fi mai rară pe circumferință decît la centru: și precesiunea echinoctiilor din cauza înălțimii ar trebui să crească, din cauza răririi ar trebui să scadă.

Am descris pînă acum sistemul Soarelui, al Pământului, al Lunii și al planetelor: mai rămîne să adaug ceva despre comete.

L E M A I V

Cometele sînt mai îndepărtate decît Luna și se află în regiunea planetelor.

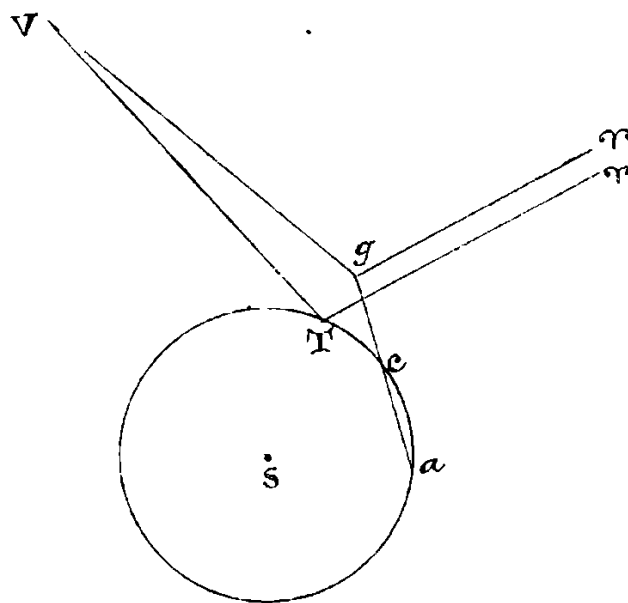
După cum lipsa paralaxei diurne situează cometele dincolo de regiunile sublunare, tot astfel din paralaxa anuală ne convingem de coborîrea lor în regiunile planetelor. Căci toate cometele, care progresează în ordinea semnelor, la sfîrșitul apariției sînt de obicei sau lente, sau retrograde, dacă Pămîntul este între ele și Soare; și peste măsură de rapide dacă Pămîntul tinde către opoziție. Și dimpotrivă, acele care merg în sens contrar cu ordinea semnelor sînt excesiv de rapide la sfîrșitul apariției, dacă Pămîntul se află între ele și Soare; și foarte lente sau retrograde, dacă Pămîntul e situat în părțile opuse. Aceasta se întîmplă îndeosebi din cauza mișcării Pămîntului în pozițiile sale diferite, după cum se întîmplă cu planetele, care din cauza mișcării Pămîntului fie în același sens fie în sens contrar cînd sînt retrograde, cînd par aînainta mai încet, cînd mai repede. Dacă Pămîntul înaintează de aceeași parte cu cometa, și e dus cu o mișcare unghiulară în jurul Soarelui atît de repede, încît dreapta dusă neconținut prin Pămînt și cometă converge dincolo de cometă, cometa privită de pe Pămînt din cauza mișcării sale mai lente pare a fi retrogradă; dacă însă Pămîntul este dus mai încet, mișcarea cometei (scăzînd mișcarea Pămîntului) devine uneori mai lentă. Dar dacă Pămîntul tinde în sens contrar, cometa apare mai rapidă. Dar din accelerația sau întîrzierea sau mișcarea retrogradă distanța cometei se determină în felul acesta. Fie $\angle Q A, \angle Q B, \angle Q C$ cele trei longitudini observate ale cometei la începutul mișcării, și fie $\angle Q C$ ultima longitudine observată, cînd cometa încetează de a fi văzută. Să ducem dreapta $A B C$, ale cărei părți $A B, B C$ cuprinsă între dreptele $Q A$ și $Q B, Q B$ și $Q C$, să fie între ele precum timpurile dintre primele trei observații. Să prelungim pe $A C$ pînă în G , așa fel ca $A G$ către $A B$ să fie precum timpul dintre observația întîi și ultima către timpul dintre prima și a doua observație, și să unim $Q G$. Și dacă cometa s-ar mișca uniform, pe o linie dreaptă, și Pămîntul sau ar fi în repaus, sau de asemenea s-ar mișca în linie dreaptă cu o mișcare uniformă; unghiul $\angle Q G$ va fi longitudinea cometei în timpul ultimei observații. Deci unghiul $\angle F Q G$, care e diferența lungimilor,



se naște din inegalitatea mișcărilor cometei și Pămîntului. Dar acest unghi, dacă Pămîntul și cometa se mișcă în părți contrarii, se adună la unghiul $\angle Q G$, și astfel face mai rapidă mișcarea aparentă a cometei: dacă însă cometa înaintează de aceeași parte cu Pămîntul, se scade din el, și face mișcarea cometelor sau mai lentă, sau poate

retrogradă; după cum am expus mai sus. Așadar acest unghi se naște în deosebi din mișcarea Pămîntului, și de aceea cu drept cuvînt poate fi considerat ca paralaxa cometei, neglijînd anume unele creșteri și descreșteri, care pot proveni din mișcarea neegală a cometei pe orbita proprie. Iar distanța cometei se află astfel din această paralaxă. Fie S Soarele, $a c T$ orbita mare, a

locul Pământului în prima observație, c locul Pământului în observația a treia, T locul Pământului în observația ultimă, și TV linia dreaptă dusă spre începutul Berbecului. Să adunăm unghiul $\angle TV$ egal cu unghiul $\angle QF$, adică, egal cu lungimea cometei când Pământul se află în T . Să unim ac , și să prelungim pînă în g , ca să fie ag către ac precum AG către AC , și g va fi locul în care Pământul va ajunge în timpul ultimei observații, continuînd mișcarea în mod uniform pe dreapta ac . Și deci dacă ducem gV , paralelă cu TV , și luăm unghiul $\angle gV$ egal cu unghiul $\angle QG$, unghiul $\angle gV$ va fi egal cu longitudinea cometei privită din locul g ; și unghiul $\angle TVg$ va fi paralaxa, care se naște din translația Pământului din locul g în locul T : și deci V va fi locul cometei în planul eclipticei. Acest loc V însă de obicei e mai jos decît orbita lui Jupiter.



Același lucru se deduce din curbura traiectoriei cometelor. Aceste corpuri se mișcă mai mult pe cercurile maxime atît timp cît se mișcă repede; dar la sfîrșitul cursei, cînd partea mișcării aparente, care provine din paralaxă, are o proporție mai mare către mișcarea întregă aparentă, de obicei, se abat de la aceste cercuri, și de cîte ori se mișcă Pământul într-o parte, ele se duc în partea contrară. Această deviere provine îndeosebi din paralaxă, deoarece ea corespunde mișcării Pământului; și mărimea ei considerabilă după calculul meu a așezat disparente destul de mult dincoace de Jupiter. De unde urmează că în perigee și perihelii, unde sînt mai aproape, se coboară adesea dincoace de orbita lui Marte și a planetelor inferioare.

Apropierea cometelor se confirmă și din lumina capetelor. Căci lumina unui corp ceresc luminat de Soare și care se duce în regiuni îndepărtate, se micșorează în raportul puterii a patra a distanței: anume în raportul pătratului din cauza creșterii distanței la Soare, și în alt raport pătratic din cauza mișcării diametrului aparent. De unde dacă se dă atît cantitatea de lumină cît și diametrul aparent al cometei, se va da distanța, zicînd că distanța este către distanța planetei, precum diametrul către diametru și în raport invers cu rădăcina pătrată a luminii către lumină. Astfel diametrul minim al capătului cometei anului 1682, observat de *F l a m s t e e d* prin tubul optic de 16 picioare și măsurat cu micrometrul era egal cu $2' 0''$; iar nucleul sau steaua în mijlocul capului abia ocupa a zecea parte a lățimii acestuia, și deci era lată numai de $11''$ sau $12''$. Dar prin intensitatea luminoasă și claritatea capului întrecea capul cometei anului 1680, și se întrecea cu stelele de mărimea întâi sau a doua. Să presupunem că Saturn împreună cu inelul său ar fi fost aproape de patru ori mai luminos: și fiindcă lumina inelului era aproape egală cu lumina sferei intermediare, și diametrul aparent al sferei este aproape $21''$, și deci lumina sferei și a inelului luate împreună ar fi egale cu lumina sferei, al cărei diametru ar fi $30''$: distanța cometei va fi către

distanța lui Saturn în raport invers cu 1 către $\sqrt{4}$, și precum 12" către 30", adică precum 24 către 30 sau 4 către 5. Iar cometa din luna aprilie a anului 1665, după cum ne informează H e v e l i u s, prin claritatea sa întrece aproape toate stelele fixe, chiar pe însuși Saturn, din cauza culorii foarte vii. Căci această cometă era mai luminoasă decât cealaltă, care apăruse la sfârșitul anului precedent, și se aseamăna cu stelele de mărimea întâi. Lățimea capului era de aproape 6', nucleul însă comparat cu planetele cu ajutorul tubului optic era mai mic decât Jupiter, și părea când mai mic decât corpul intermediar al lui Saturn, când egal cu el. Apoi cum diametrul capului cometelor rareori întrece 8' sau 12', diametrul nucleului sau a stelei centrale este aproape a zecea parte sau poate a cincisprezecea parte a diametrului capului, este evident că aceste stele în genere sînt de aceeași mărime aparentă cu planetele. De aceea cum lumina lor poate fi asemănată nu rareori cu lumina lui Saturn, și uneori o și întrece, este evident, că toate cometele în periheliu trebuie situate sau dincoace de Saturn, sau nu departe dincolo. Prin urmare rătăcesc aceia care situează cometele în regiunea apropiată a stelelor fixe: din care cauză nu ar putea fi luminate mai mult de Soarele nostru, decât sînt luminate planetele, care sînt aici, de stelele fixe.

Acestea le-am discutat fără să considerăm obscuritatea cometelor din cauza fumului foarte bogat și gros, cu care e înconjurat capul, lucind totdeauna slab ca printr-un nor. Căci cu cît corpul devine mai obscur prin acest fum, cu atît e mai necesar să se apropie de Soare, pentru ca prin bogăția de lumină reflectată de el să poată concura cu planetele. Deci e verosimil că cometele se apropie cu mult dincoace de sfera lui Saturn, după cum am demonstrat din paralaxă. Același lucru se confirmă foarte bine prin cozi. Acestea se nasc fie din reflexia fumului împrăștiat prin eter, fie din lumina capului. În primul caz trebuie micșorată distanța cometelor, ca nu cumva fumul născut totdeauna din cap să se propage prin spații foarte vaste cu o viteză și expansiune de necrezut. În al doilea caz trebuie să atribuim nucleului capului toată lumina atît a cozii cît și a capului. Așadar dacă ne închipuim că toată lumina e adunată și condensată în discul nucleului, desigur nucleul, de cîte ori emite o coadă foarte mare și strălucitoare, va întrece cu mult în splendoarea sa pe însuși Jupiter. Prin urmare emițînd mai multă lumină cu un diametru aparent mai mic, va fi cu mult mai mult luminat de Soare, și deci va fi cu mult mai aproape de Soare. Iar pe acelea care-și ascund capetele sub Soare, și emit cozi pe cît de mari pe atît de strălucitoare, uneori ca niște torțe de foc, din același motiv trebuie să le situăm în interiorul orbitei lui Venus. Căci dacă presupunem că întreaga lumină se concentrează într-o stea, le-ar întrece uneori pe însăși Venus, ca să nu zic mai multe Venus-uri luate împreună.

În sfîrșit același lucru se deduce din lumina capetelor ce crește când cometele se îndepărtează de la Pămînt spre Soare, și descrește când ele se îndepărtează de la Soare spre Pămînt. Căci astfel ultima cometă a anului 1665 (după observațiile lui H e v e l i u s) din momentul cînd a început a fi văzută pierdea totdeauna din mișcarea sa aparentă, și deci trecuse peste perigeu; totuși splendoarea capului creștea din zi în zi, pînă ce cometa acoperită de razele solare a încetat de a se vedea. Cometa anului 1683 (după observația aceluiași H e v e l i u s) la sfîrșitul lunii iulie, cînd s-a văzut mai întâi, se mișca foarte încet, făcînd aproximativ 40 sau 45 minute în fiecare zi pe orbita sa.

Din acel timp mișcarea ei diurnă creștea într-una pînă la 4 septembrie cînd deveni de aproape 5 grade. Deci în tot acest timp cometa se apropia de Pămînt. Ceea ce se deduce și din diametrul capului măsurat cu micrometrul: căci *H e v e l i u s* a aflat la 6 august că este de numai 6'5" inclusiv coama, la 2 septembrie că e de 9'7". Așadar la început capul apăru cu mult mai-mic decît la sfîrșitul mișcării, totuși la început din cauza apropierii de Soare apăru cu mult mai luminos decît aproape de sfîrșit, după cum comunică același *H e v e l i u s*. Prin urmare în tot acest timp, din cauza depărtării sale de Soare, lumina ei a descrescut cu toate că se apropia de Pămînt. Cometa anului 1618 de pe la mijlocul lui decembrie, și cea din anul 1680 de pe la sfîrșitul aceleiași luni, se mișcau foarte repede, și deci atunci erau în perigee. Dar strălucirea maximă a capetelor s-a observat înainte cu aproape două săptămîni, cînd tocmai ieșeau din razele solare; și strălucirea maximă a cozilor cu puțin înainte, în apropierea mai mare a Soarelui. Capul primei comete, după observațiile lui *C y s a t*, la 1 decembrie apărea mai mare ca stelele de mărimea întîi, și la 16 decembrie (fiind deja în perigeu) scăzuse în mărime puțin, foarte mult însă în claritatea luminii. La 7 ianuarie *K e p l e r*, nefiind sigur de cap, încetă observațiile. În ziua de 12 a lunii decembrie capul ultimei comete a fost văzut și observat de *F l a m s t e e d* la 9 grade distanță de Soare; ceea ce cu greu s-ar fi admis unei stele de mărimea a treia. La 15 și 17 decembrie, aceeași a apărut ca o stea de mărimea a treia, scăzută prin strălucirea norilor din apropierea Soarelui ce apunea. La 26 decembrie cu o mișcare foarte rapidă, și aflîndu-se aproape de perigeu, era mai mică decît gura lui Pegasus, stea de mărimea a treia. La 3 ianuarie apărea ca o stea de mărimea a patra, la 9 ianuarie ca o stea de mărimea a cincea, la 13 ianuarie a dispărut din cauza strălucirii crescînde a Lunii. La 25 ianuarie abia era egală cu o stea de mărimea a șaptea. Dacă se iau timpuri egale de o parte și de alta, a perigeului, capetele cometei, care în acele timpuri situate în regiuni foarte îndepărtate, din cauza distanțelor egale de la Pămînt, ar fi trebuit să lucească în mod egal, au strălucit mai tare în partea dinspre Soare, dispărînd de cealaltă parte a perigeului. Prin urmare din marea diferență de lumină în fiecare din cele două poziții, se conchide marea vecinătate a Soarelui și a cometei în poziția de mai înainte. Căci lumina cometelor de obicei e regulată, și apare maximă cînd capetele se mișcă foarte repede, și deci sînt în perigee; dacă nu cumva ea e mai mare în vecinătatea Soarelui.

COROLARUL 1. Așadar cometele lucesc prin lumina Soarelui pe care ele o reflectă.

COROLARUL 2. Din cele spuse se înțelege și pentru ce cometele frecventează atît de mult regiunea Soarelui. Dacă ar fi observate în regiunile depărtate dincolo de Saturn, ar trebui să apară mai des în părțile opuse Soarelui. Căci cele care s-ar afla în aceste părți, ar fi mai aproape de Pămînt; și Soarele situat între ele ar acoperi pe celelalte. Într-adevăr, parcurgînd istoria cometelor, am aflat că s-au descoperit de patru sau de cinci ori mai multe pe emisfera dinspre Soare, decît pe emisfera opusă, afară de altele fără îndoială nu puține, pe care le-a acoperit lumina solară. Desigur în apropiere de regiunile noastre ele nu emit nici cozi, nici nu sînt atît de luminate de Soare, ca să se descopere ochilor liberi, înainte de a fi mai aproape decît Jupiter. Dar partea cu mult mai mare a spațiului descris în jurul Soarelui cu o rază atît de mică e situată de partea Pămîntului, care privește spre Soare; și în

această parte mai mare cometele, ca fiind cele mai apropiate de Soare, de obicei sînt mai luminate.

COROLARUL 3. De aici se mai vede, că cerurile sînt lipsite de rezistență. Căci cometele urmînd drumuri oblice și uneori contrare cursului planetelor, se mișcă cu cea mai mare libertate, și-și păstrează mișcările timp foarte îndelungat, chiar împotriva cursului planetelor. Mă înșel dacă nu sînt de genul planetelor, revenind incontinuu pe aceeași orbită. Căci se pare lipsită de temei părerea unor scriitori că ele ar fi meteori, plecînd de la argumentul că, capetele lor sînt supuse la schimbări continue. Capetele cometelor sînt înconjurate de atmosfere foarte mari; și atmosferele în interior trebuie să fie mai dense. Prin urmare norii sînt aceia, nu însăși corpurile cometelor, în care se observă acele schimbări. Astfel, Pămîntul, dacă ar fi privit de planete, fără îndoială că ar străluci de lumina norilor săi, și corpul solid aproape s-ar ascunde sub nori. Astfel cercurile lui Jupiter s-au format în norii acelei planete, care-și schimbă poziția între ele, și corpul solid al lui Jupiter prin acei nori se vede mai greu. Și cu atît mai mult trebuie să se ascundă corpurile cometelor sub atmosferele și mai profunde și mai groase.

PROPOZIȚIA XL. TEOREMA XX

Cometele se mișcă pe secțiuni conice avînd focarele în centrul Soarelui, și cu razele duse la Soare descriu arii proporționale cu timpurile.

Aceasta este evident din corolarul 1, propoziția XIII, Cartea I, comparată cu propozițiile VIII, XII și XIII, Cartea a III-a.

COROLARUL 1. De aici dacă cometele se mișcă pe orbite; orbitele vor fi elipse, și timpurile periodice vor fi către timpurile periodice ale planetelor în raportul puterii $\frac{3}{2}$ a axelor principale. Și deci cometele care în cea mai mare parte se află dincolo de planete, și de aceea descriu orbite cu axe mai mari, se mișcă mai încet. Astfel dacă axa orbitei cometei este de patru ori mai mare decît axa orbitei lui Saturn, timpul revoluției cometei va fi către timpul revoluției lui Saturn, adică, către 30 de ani, precum $4\sqrt{4}$ (sau 8) către 1, și deci va fi de 240 de ani.

COROLARUL 2. Iar orbitele vor fi atît de apropiate de parabole, încît în locul lor se pot folosi parabole fără erori sensibile.

COROLARUL 3. Și de aceea (potrivit corolarului 7, propoziția XVI, Cartea I) viteza oricărei comete, va fi totdeauna către viteza unei planete oarecare ce se învîrtește pe un cerc în jurul Soarelui, în raportul rădăcinii pătrate a dublului distanței planetei de la centrul Soarelui, către aproximativ distanța cometei de la centrul Soarelui. Să presupunem că raza orbitei mari, sau semidiametrul mare al elipsei pe care se rotește Pămîntul este de 100000000: și Pămîntul în mișcarea sa medie zilnică va descrie 1720212 părți, și din mișcarea orară 71675 $\frac{1}{2}$ părți. Și deci cometa la aceeași distanță medie a Pămîntului de Soare, cu viteza care este către viteza Pămîntului precum $\sqrt{2}$ către 1, va descrie în mișcarea sa diurnă 2432747 părți, și în mișcarea orară 101364 $\frac{1}{2}$ părți. Dar la distanțele mai mari sau mai mici,

atît mișcarea zilnică cît și orară va fi către această mișcare diurnă și orară în raport invers cu rădăcina pătrată a distanțelor, și deci e dată.

COROLARUL 4. De unde dacă parametrul parabolei este de patru ori mai mare decît raza orbitei mari, și presupunem că pătratul acelei raze este de 100 000 000 părți : aria pe care o descrie zilnic cometa cu raza dusă la Soare, va fi de $1\,216\,373\frac{1}{2}$ părți, și în fiecare oră aria va fi de $50\,682\frac{1}{4}$ părți. Dacă însă parametrul este într-un raport oarecare mai mare sau mai mic, aria zilnică și orară va fi mai mare sau mai mică în același raport al rădăcinii pătrate.

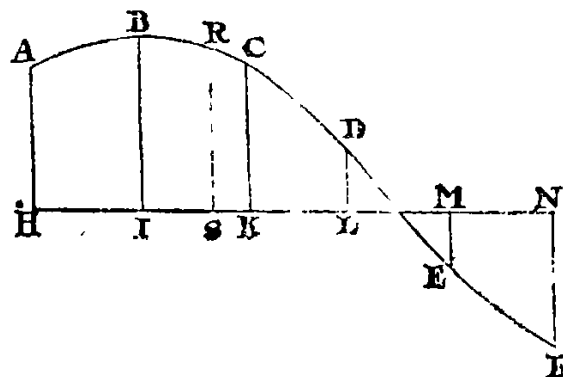
LEMA V

Să aflăm linia curbă de genul parabolei, care va trece prin oricîte puncte date.

Fie A, B, C, D, E, F etc. acele puncte, și din ele pe o dreaptă oarecare de poziție dată să coborîm oricîte perpendiculare AH, BI, CK, DL, EM, FN .

CAZUL 1. Dacă intervalele HI, IK, KL etc. ale punctelor H, I, K, L, M, N etc. sînt egale, să luăm diferențele de ordinul întâi $b, 2b, 3b, 4b, 5b$ etc. ale perpendicularelor AH, BI, CK etc., cele de ordinul al doilea $c, 2c, 3c, 4c$ etc., cele de ordinul al treilea $d, 2d, 3d$ etc., adică, astfel încît să fie $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$ etc., apoi $b - 2b = c$ etc., și să pășim astfel

$$\begin{array}{cccccc} b & 2b & 3b & 4b & 5b & \\ c & 2c & 3c & 4c & & \\ d & 2d & 3d & & & \\ e & 2e & & & & \\ f & & & & & \end{array}$$



pînă la ultima diferență, care aici este f . Apoi ridicînd o perpendiculară oarecare RS , care să fie ordonată curbei căutate: ca să aflăm lungimea acesteia să presupunem că intervalele HI, IK, KL, LM etc. sînt unități, și să punem $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p$ înmulțit cu $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ înmulțit cu $+SK = r$, $\frac{1}{4}r$ înmulțit cu $+SL = s$, $\frac{1}{5}s$ înmulțit cu $+SM = t$; mergînd astfel pînă la perpendiculara penultimă ME , și punînd semnele negative înaintea termenilor HS, IS etc., care sînt situate de părțile punctului S spre A , și semnele pozitive înaintea termenilor SK, SL etc., care sînt situate de celelalte părți ale punctului S . Și observînd corect semnele, va fi $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$ etc.

CAZUL 2. Căci dacă intervalele HI, IK etc. ale punctelor H, I, K, L etc. sînt inegale, să luăm primele diferențe ale perpendicularelor AH, BI, CK etc., împărțite prin intervalele perpendicularelor $b, 2b, 3b, 4b, 5b$; cele de ordinul al doilea împărțite prin intervalele a oricăror două $c, 2c, 3c, 4c$ etc. și cele de ordinul al treilea prin intervalele dintre oricare trei $d, 2d, 3d$ etc., cele de

ordinul al patrulea prin intervalele dintre oricare patru $e, 2e$ etc. și așa mai departe; adică, astfel încît să fie $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$ etc., apoi $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$ etc., apoi $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$ etc. Afînd diferențele, să punem $AH = a$, $-HS = p$, p înmulțit cu $-IS = q$, q înmulțit cu $+SK = r$, r înmulțit cu $+SL = s$, s înmulțit cu $+SM = t$; mergînd astfel pînă la perpendiculara penultimă ME , și ordonata va fi $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$ etc.

COROLAR. De aici se pot afla aproximativ ariile tuturor curbelor. Căci dacă aflăm cîteva puncte ale unei curbe oarecare a cărei cvadratură voim să o găsim, și ne închipuim că ducem prin ea o parabolă: aria acestei parabole va fi aproximativ aceeași cu aria acelei curbe a cărei cvadratură o căutăm. Cvadratura parabolei însă totdeauna poate fi aflată prin mijloacele foarte cunoscute ale cvadraturii geometrice.

LEMA VI

Din observațiile cîtorva locuri ale cometei să aflăm locul ei într-un timp oarecare intermediar dat.

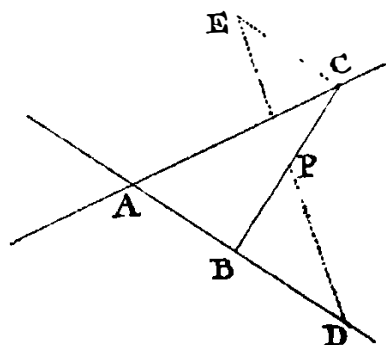
Fie HI, IK, KL, LM timpurile dintre observații (în figura precedentă), HA, IB, KC, LD, ME cinci longitudini observate ale cometei, HS timpul dat între prima observație și longitudinea căutată. Și dacă prin punctele A, B, C, D, E presupunem dusă o curbă regulată $ABCDE$; și prin lema de mai sus aflăm ordonata ei RS , RS va fi lungimea căutată.

Prin aceeași metodă din cinci latitudini observate se află latitudinea la un timp dat.

Dacă diferențele longitudinilor observate sînt mici, să zicem numai de 4 sau 5 grade; ar fi deajuns trei sau patru observații pentru a afla o nouă longitudine și latitudine. Dacă însă diferențele sînt mai mari, să zicem de 10 sau 20 grade, va trebui să folosim cinci observații.

LEMA VII

Printr-un punct dat P să ducem o linie dreaptă BC , ale cărei părți PB, PC , tăiate de două drepte de poziții date AB, AC , să aibă între ele un raport dat.

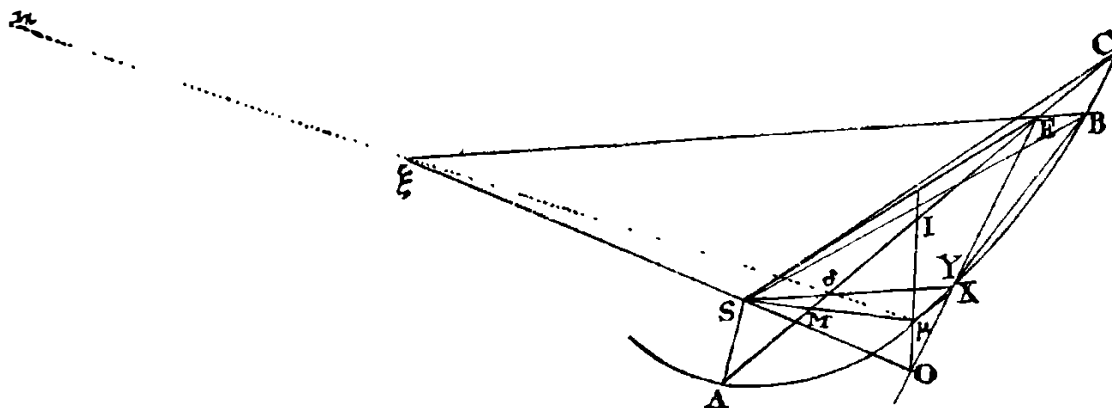


Din punctul P să ducem la una din drepte AB o dreaptă oarecare PD , și să o prelungim spre dreapta cealaltă AC pînă în E , astfel ca PE să fie către PD în acel raport dat. Fie EC paralelă cu AD ; și dacă ducem CPB, PC va fi către PB precum PE către PD . Q.E.F.

L E M A VIII

Fie ABC o parabolă avînd focarul S . Coarda AC bisectată în I să taie segmentul $ABCI$, al cărui diametru fie $I\mu$ și vîrfurile μ . Pe $I\mu$ prelungită să luăm μO egală cu jumătatea lui $I\mu$. Să unim OS , și să o prelungim pînă în ξ , astfel că $S\xi$ să fie egală cu $2SO$. Și dacă cometa B se mișcă pe arcul CBA , și ducem ξB tăind AC în E : zic că punctul E va tăia din coarda AC segmentul AE aproximativ proporțional cu timpul.

Căci să unim EO tăind arcul parabolic ABC în Y , și să ducem μX , care să atingă același arc în vîrfurile μ , și să întîlnească dreapta dusă EO în X ; și aria curbinie $AEX\mu A$ va fi către aria curbinie $ACY\mu A$ precum AE



către AC . Și deci cum triunghiul ASE este către triunghiul ASC în același raport, aria întreagă $ASEX\mu A$ va fi către aria întreagă $ASCY\mu A$ precum AE către AC . Cum însă ξO este către SO precum 3 la 1, și EO către XO în același raport, SX va fi paralelă cu EB : și de aceea dacă unim BX , triunghiul SEB va fi egal cu triunghiul XEB . De unde dacă la aria $ASEX\mu A$ adunăm triunghiul EXB , și din sumă scădem triunghiul SEB , va rămîne aria $ASBX\mu A$, egală cu aria $ASEX\mu A$, și deci către aria $ASCY\mu A$ precum AE către AC . Dar aria $ASBY\mu A$ este aproximativ egală cu aria $ASBX\mu A$, și această arie $ASBY\mu A$ este către aria $ASCY\mu A$, precum timpul de descriere al arcului AB către timpul de descriere al arcului întreg AC . Și deci AE este către AC aproximativ în raportul timpurilor. Q.E.D.

COROLAR. Cînd punctul B coincide cu vîrfurile μ al parabolei, AE este către AC exact în raportul timpurilor.

S C O L I E

Dacă unim $\mu\xi$ tăind AC în δ , și pe ea luăm ξn , care să fie către μB precum $27MI$ către $16\mu M$: dreapta dusă Bn va tăia coarda AC în raportul timpurilor mai precis ca mai înainte. Dar punctul n trebuie să fie situat dincolo de punctul ξ , dacă punctul B este mai îndepărtat de vîrfurile principale al parabolei decît punctul μ ; și dincoace dacă este mai apropiat de același vîrf.

L E M A IX

Dreptele $I\mu$ și μN și lungimea $\frac{AIC}{4S\mu}$ sînt egale între ele, căci $4S\mu$ este parametrul parabolei aparținînd vîrfurilor μ .

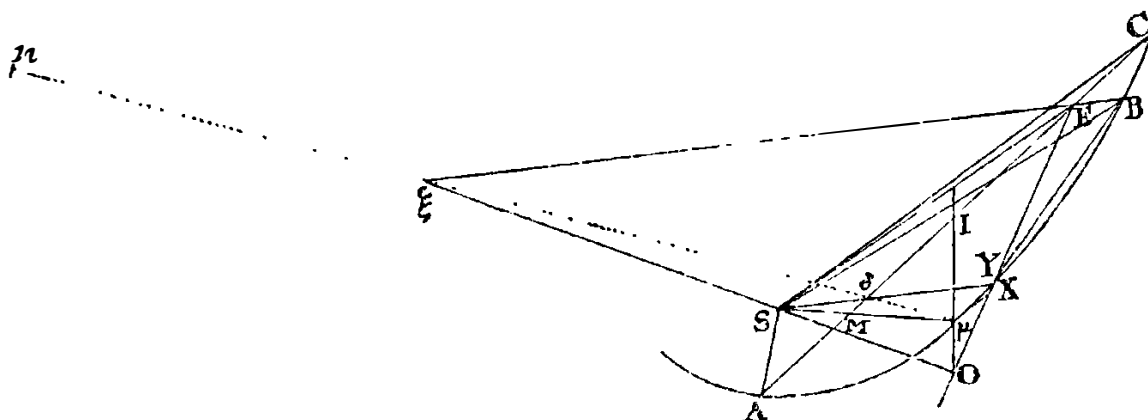
bolic, precum rădăcina pătrată a raportului $\frac{1}{2}$. Și de aceea greutatea, pe care o are în Soare la înălțimea SP , căzînd de la acea înălțime spre Soare, ar descrie în jumătatea aceluși timp (potrivit corolarului 9, propoziția IV, Cartea I) un spațiu egal cu pătratul jumătății acelei coarde împărțite cu cva-druplul înălțimii SP , adică spațiul $\frac{AI^2}{4S\mu}$. De unde cum greutatea cometei spre Soare la înălțimea SN este către greutatea ei spre Soare la înălțimea SP , precum SP către $S\mu$: cometa căzînd spre Soare, cu greutatea pe care o are la înălțimea SN , în același timp va descrie spațiul $\frac{AI^2}{4S\mu}$, adică un spațiu egal cu lungimea $I\mu$ sau $M\mu$. Q.E.D.

PROPOZIȚIA XLI. PROBLEMA XXI

Să determinăm din trei observații date traiectoria unei comete ce se mișcă pe o parabolă.

Această problemă foarte grea încercînd să o rezolv în mai multe feluri, am compus cîteva probleme în Cartea I, care se referă la soluția ei. Apoi am găsit soluția următoare ceva mai simplă.

Să alegem trei observații depărtate între ele aproximativ prin intervale egale de timp. Fie însă intervalul de timp, în care cometa se mișcă mai încet, cu ceva mai mare decît celălalt, anume astfel ca diferența timpurilor să fie



către suma timpurilor, precum suma timpurilor către aproape 600 de zile; sau așa fel ca punctul E (în figura lemei VIII) să cadă aproximativ în punctul M , și de aici să se îndrepte mai mult spre I decît spre A . Dacă nu avem la dispoziție astfel de observații, trebuie să aflăm un nou loc al cometei cu ajutorul lemei VI. Fie S Soarele, T, t, τ trei locuri ale Pămîntului pe orbita mare, $TA, tB, \tau C$ trei lungimi observate ale cometei, V timpul dintre observația întâi și a doua, W timpul între a doua și a treia, X lungimea, pe care o poate descrie cometa în tot acel timp cu viteza, pe care o are la distanța mijlocie a Pămîntului de Soare, și care (potrivit corolarului 3, propoziția XL, Cartea a III-a) trebuie aflată, și tV perpendiculara pe coarda $T\tau$. Pe lungimea mijlocie observată tB să luăm un punct oarecare B în locul cometei în planul eclipticei, și de aici spre Soarele S să ducem linia BE , care să fie către săgeata

punctele noi e, a, c, g și $\varepsilon, \alpha, k, \gamma$. Apoi dacă prin G, g, γ , ducem circumferința cercului $Gg\gamma$, tăind dreapta τC în $Z : Z$ va fi locul cometei în planul eclipticei. Și dacă pe $AC, ac, \alpha k$ luăm $AF, af, \alpha \Phi$, egale respectiv cu $CG, cg, k\gamma$ și prin punctele F, f, Φ ducem circumferința cercului $Ff\Phi$, tăind dreapta AT în X ; punctul X va fi un alt loc al cometei în planul eclipticei. În punctele X și Z să ridicăm tangentele latitudinilor cometei la razele TX și τZ ; și vom avea două locuri ale cometei pe orbita proprie. În sfârșit (potrivit poziției XIX, Cartea I) din focarul S , prin cele două locuri să descriem o parabolă, și aceasta va fi traiectoria cometei. Q.E.I.

Demonstrația acestei construcții rezultă din leme; deoarece cum dreapta AC se taie în E în raportul timpurilor, potrivit lemei VII, după cum cere lema VIII: și BE potrivit lemei XI este o parte a dreptei BS sau $B\xi$ în planul eclipticei interceptată între arcul ABC și coarda AEC ; și MP (potrivit corolarului lema X) este lungimea coardei arcului pe care trebuie să-l descrie cometa pe orbita proprie între observația întâi și a treia, și deci ar fi egală cu MN , dacă B este locul adevărat al cometei în planul eclipticei.

De altfel e convenabil să nu alegem punctele B, b, β la întâmplare, ci foarte apropiate. Dacă cunoaștem aproximativ unghiul AQt , după care proiecția orbitei descrisă în planul eclipticei taie dreapta tB : în acel unghi trebuie să ducem linia AC , care să fie către $\frac{4}{3} T\tau$ precum rădăcina pătrată a raportului lui SQ către St . Și ducând dreapta SEB , a cărei parte EB să fie egală cu lungimea Vt ; vom determina punctul B pe care-l putem întrebuința întâia dată. Atunci ștergînd dreapta AC și ducînd-o din nou după construcția precedentă și, pe lîngă aceea, lungimea MP ; pe tB să luăm punctul b , în așa fel că, dacă $TA, \tau C$ s-ar tăia reciproc în Y , distanța Yb să fie către distanța YB , într-un raport compus din raportul lui MP către MN și rădăcina pătrată a raportului lui SB către Sb . Și după aceeași metodă va trebui aflat punctul al treilea β , dacă voim să repetăm operația a treia oară. Dar prin această metodă două operații de obicei sînt de ajuns. Căci dacă distanța Bb se întîmplă să fie foarte mică; după ce am aflat punctele F, f , și G, g drepte duse Ff și Gg , vor tăia TA și τC în punctele căutate X și Z .

EXEMPLU

Să considerăm cometa anului 1680. Mișcarea ei observată de *Flamsteed* și calculată din observații, și corectată de *Halley* din aceleași observații, este dată în tabloul următor:

		Timpul aparent	Timpul adevărat	Longitudinea Soarelui	Longitudinea cometei	Latitudinea nor- dică a cometei
1680 decembrie	d	h m	h m s	° ' "	° ' "	° ' "
	12	4 46	4 46 0	♊ 1 51 23	♊ 6 32 38	8 28 0
	21	6 32 $\frac{1}{2}$	6 36 59	11 6 44	♊ 5 8 12	21 42 13
	24	6 12	6 17 52	14 9 26	18 49 23	25 23 5
	26	5 14	5 20 44	16 9 22	28 24 13	27 0 52
	29	7 55	8 3 2	19 19 43	♋ 13 10 41	28 9 58
	30	8 2	8 10 26	20 21 9	17 38 20	28 11 53

		Timpul aparent	Timpul adevărat	Longitudinea Soarelui	Longitudinea cometei	Latitudinea nor- dică a cometei
1681 ianuarie	d	h m	h m s	° ' "	° ' "	° ' "
	3	7 41	7 50 38	24 24 43	2 53 0	27 7 48
	5	5 51	6 1 38	26 22 18	♊ 8 48 53	26 15 7
	9	6 49	7 0 53	♊ 0 29 2	18 44 4	24 11 56
	10	5 54	6 6 10	1 27 43	20 40 50	23 43 52
	13	6 56	7 8 55	4 33 20	25 59 48	22 17 28
	25	7 44	7 58 42	16 45 36	♊ 9 35 0	17 56 30
	26	6 35	6 49 44	17 46 28	10 19 0	17 40 30
1681 februarie	30	8 7	8 21 53	21 49 58	13 19 51	16 42 18
	2	6 20	6 34 51	24 46 59	15 13 53	16 4 1
	5	6 50	7 4 41	27 49 51	16 59 6	15 27 3

Să alăturăm acestora câteva observații de-ale noastre.

		Timpul aparent	Longitudinea cometei	Latitudinea nordică a cometei
1681 februarie	d	h m	° ' "	° ' "
	25	8 30	♊ 26 18 35	12 46 46
1681 martie	27	8 15	27 4 30	12 36 12
	1	11 0	27 52 42	12 23 40
	2	8 0	28 12 48	12 19 38
	5	11 30	29 18 0	12 3 16
	7	9 30	♊ 0 4 0	11 57 0
	9	8 30	0 43 4	11 45 52

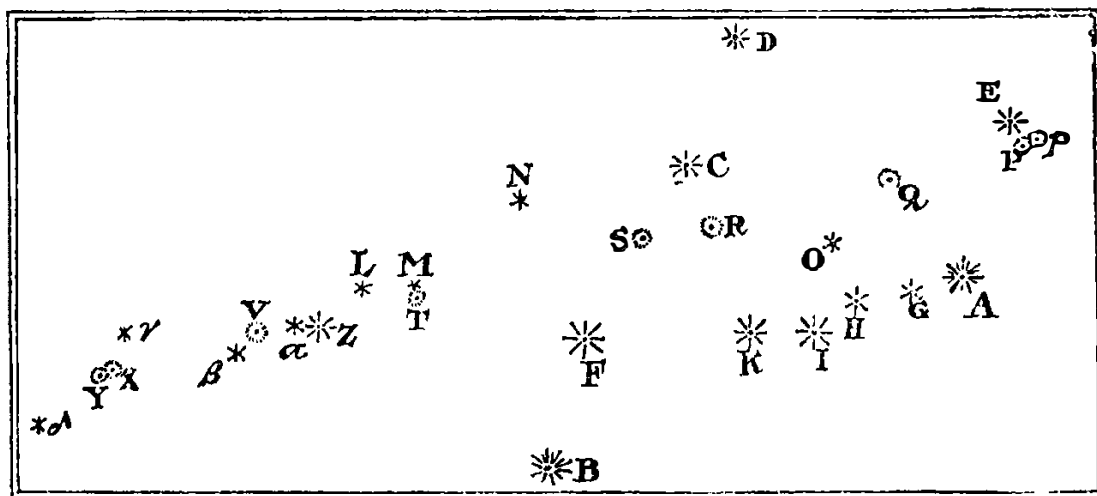
Aceste observații au fost făcute cu un telescop de 7 picioare, și cu un micrometru și fire plasate în focarul telescopului; cu aceste instrumente am determinat atât pozițiile stelelor fixe între ele cât și pozițiile cometelor față de stelele fixe. Fie *A* o stea de mărimea a patra în călcîiul stîng al lui Perseus (*o* a lui *Bayer*) *B* steaua următoare de mărimea a treia în piciorul stîng (Ța lui *Bayer*) și *C* stea de mărimea a șasea (*n* a lui *Bayer*) în călcîiul aceuiași picior, și *D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, α, β, γ, δ* alte stele mai mici în același picior. Și fie *p, P, Q, R, S, T, V, X*, locurile în observațiile descrise mai sus: și distanța *AB* fiind de $80\frac{7}{12}$ părți, *AC* era de $52\frac{1}{4}$ părți, *BC* de $58\frac{5}{6}$, *AD* de $57\frac{5}{12}$, *BD* de $82\frac{6}{11}$, *CD* de $23\frac{2}{3}$, *AE* de $29\frac{4}{7}$, *CE* de $57\frac{1}{2}$, *DE* de $49\frac{11}{2}$, *AI* de $27\frac{7}{12}$, *BI* de $52\frac{1}{6}$, *CI* de $36\frac{7}{12}$, *DI* de $53\frac{5}{11}$, *AK* de $38\frac{2}{3}$, *BK* de 43, *CK* de $31\frac{5}{9}$. *FK* de 29, *FB* de 23, *FC* de $36\frac{1}{4}$, *AH* de $18\frac{6}{7}$, *DH* de $50\frac{7}{8}$, *BN* de $46\frac{5}{12}$, *CN* de $31\frac{1}{3}$, *BL* de $45\frac{5}{12}$, *NL* de $31\frac{5}{7}$. *HO* era către *HI* precum 7 către 6 și prelungite treceau printre stelele *D* și *E*, astfel încît distanța stelei *D* de la această dreaptă era $\frac{1}{6}$ *CD*. *LM* era către *LN* precum 2 către 9 și prelungită trecea prin steaua *H*. Prin acestea se determinau pozițiile stelelor fixe între ele.

În sfîrșit compatriotul nostru *Pound* a observat din nou pozițiile acestor stele fixe între ele, și a pus longitudinile și latitudinile lor în tabloul următor.

Stelele fixe	Longitudinea	Latitudinea nord	Stelele fixe	Longitudinea	Latitudinea nord
	° ' "	° ' "		° ' "	° ' "
<i>A</i>	♈ 26 41 50	12 8 36	<i>L</i>	♈ 29 33 34	12 7 48
<i>B</i>	28 40 23	11 17 54	<i>M</i>	♊ 23 18 54	12 7 20
<i>C</i>	27 58 30	12 40 25	<i>N</i>	28 48 29	12 31 9
<i>E</i>	26 27 17	12 52 7	<i>Z</i>	29 44 48	11 57 13
<i>F</i>	> 1 28 28 37	11 52 22	α	29 52 3	11 55 48
<i>G</i>	26 56 8	12 4 58	β	♈ 0 8 23	11 48 56
<i>H</i>	27 11 45	12 2 1	γ	0 40 10	11 55 18
<i>I</i>	27 25 2	11 53 11	δ	1 3 20	11 30 42
<i>K</i>	27 42 7	11 53 25			

Pozițiile cometei față de aceste stele fixe le-am observat după cum urmează:

În ziua de vineri 25 februarie st. v. ora $8\frac{1}{2}$ p.m. distanța cometei situate în *p* de la steaua *E* era mai mică decât $\frac{3}{13} AE$, mai mare decât $\frac{1}{5} AE$, și



deci aproximativ egală cu $\frac{1}{14} AE$; și unghiul ApE era puțin obtuz, dar aproape drept. Căci dacă din *A* s-ar coborî pe *pE* o perpendiculară, distanța cometei de la acea perpendiculară era $\frac{1}{5} pE$.

În aceeași noapte la ora $9\frac{1}{2}$, distanța cometei situate în *P* la steaua *E* era mai mare ca $\frac{1}{4\frac{1}{2}} AE$, mai mică decât $\frac{1}{5\frac{1}{4}} AE$, și deci egală cu $\frac{1}{4\frac{8}{8}} AE$, sau aproximativ $\frac{8}{39} AE$. Dar distanța cometei la perpendiculara coborâtă din steaua *A* pe dreapta *PE* era de $\frac{4}{5} PE$.

În ziua de duminică 27 februarie ora $8\frac{1}{4}$ p. m. distanța cometei situate în *Q* la steaua *O* era egală cu distanța stelelor *O* și *H*, și dreapta *QO* prelungită trecea printre stelele *K* și *B*. Poziția acestei drepte nu am putut-o determina mai precis din cauza intervenției norilor.

În ziua de marți 1 martie ora 11 p.m., cometa, fiind în *R*, era situată precis între stelele *K* și *C*, și partea *CR* a dreptei *CRK* era ceva mai mare

decît $\frac{1}{3} CK$, și puțin mai mică decît $\frac{1}{3} CK + \frac{1}{8} CR$, și deci egală cu $\frac{1}{3} CK + \frac{1}{16} CR$ sau $\frac{16}{45} CK$.

În ziua de miercuri 2 martie ora 8 p.m. distanța cometei situate în S la steaua C era aproximativ de $\frac{4}{9} FC$. Distanța stelei F la dreapta CS prelungită era de $\frac{1}{24} FC$; și distanța stelei B la aceeași dreaptă, era de cinci ori mai mare ca distanța stelei F . La fel dreapta NS prelungită trecea printre stelele H și I , fiind de cinci sau șase ori mai aproape de steaua H decît steaua I .

În ziua de sîmbătă 5 martie ora $11\frac{1}{2}$ p. m., cometa fiind în T , dreapta MT era egală cu $\frac{1}{2} ML$, și dreapta LT prelungită trecea printre B și F , de patru sau de cinci ori mai aproape de F decît de B , tăind din BF a cincea sau a șasea parte înspre F . Și MT prelungită trecea în afara spațiului BF de părțile stelei B , fiind de patru ori mai aproape de steaua B decît de steaua F . M era o stea foarte mică care abia se putea vedea prin telescop, și L o stea mai mare aproape de mărimea a opta.

În ziua de luni 7 martie ora $9\frac{1}{2}$ p.m. cometa fiind în V , dreapta $V\alpha$ prelungită trecea printre B și F , tăind din BF spre F , $\frac{1}{10} BF$, și era către dreapta $V\beta$ precum 5 către 4. Și distanța cometei la dreapta $\alpha\beta$ era $\frac{1}{2} V\beta$.

În ziua de miercuri 9 martie ora $8\frac{1}{2}$ p. m., cometa fiind în X , dreapta γX era egală cu $\frac{1}{4} \gamma\delta$, și perpendiculara coborîtă de la steaua δ pe dreapta γX era de $\frac{2}{5} \gamma\delta$.

În aceeași noapte la ora 12, cometa fiind în Y , dreapta γY era egală cu $\frac{1}{3} \gamma\delta$, sau ceva mai mică, anume $\frac{5}{16} \gamma\delta$, și perpendiculara coborîtă de la steaua δ pe dreapta γY era egală cu aproximativ $\frac{1}{6}$ sau $\frac{1}{7} \gamma\delta$. Dar din cauza apropierii de orizont abia am putut observa cometa, și nici n-am putut determina locul ei atît de precis ca în cele precedente.

Din observații de acest fel prin construcțiile figurilor și calcule am dedus longitudinile și latitudinile cometei; și compatriotul nostru P o u n d din pozițiile mai precise ale stelelor fixe a corectat pozițiile cometei; și pozițiile corectate sînt date mai sus. M-am folosit de un micrometru construit cu puțină artă, totuși erorile longitudinilor și latitudinilor (întru cît provin din observațiile noastre) abia întrec un minut. Cometa însă (după observațiile noastre) la sfîrșitul mișcării sale a început să se abată în mod sensibil spre nord, de la paralelă pe care o descria la sfîrșitul lunii februarie.

Pentru a determina orbita cometei, am ales din observațiile descrise pînă acum, trei pe care le-a efectuat F l a m s t e e d la 21 decembrie, 5 ianuarie și 25 ianuarie.

Din acestea am determinat pe St de 9842,1 părți și Vt de 455 părți, de care semidiametrul orbitei mari are 10000. Atunci pentru întîia operație luînd tB de 5657 părți, am aflat SB de 9747, BE întîia dată de 412, $S\mu$ de 9503, $i\lambda$ de 413: BE a doua oară de 421, OD de 10186, X de 8528,4,

MP de 8450, MN de 8475, NP de 25. De unde pentru operația a doua am obținut distanța tb de 5640. Și prin această operație am aflat în sfârșit distanțele TX de 4775 și τZ de 11322. Din acestea determinînd orbita, am aflat nodul ei descendent în ϖ și ascendent în ϖ $1^{\circ}53'$; înclinarea planului ei față de planul eclipticei $61^{\circ}20' \frac{1}{3}$; că vîrfurile ei (sau periheliul cometei) e la o distanță de nod de $8^{\circ}38'$; și că este în λ $27^{\circ}43'$, avînd latitudinea sudică de $7^{\circ}34'$; și parametrul de 236,8. și aria descrisă cu raza dusă la Soare în fiecare zi de 93 585, presupunînd că pătratul semidiametrului orbitei mari e de 100 000 000; că, cometa s-a mișcat pe această orbită după seria semnelor, și în decembrie $8^d 0^h 4^m$ p.m. se afla în vîrfurile orbitei sau în periheliu. Toate acestea le-am determinat în mod grafic cu ajutorul scării părților egale și coardele unghiurilor culese din tabloul sinusurilor naturale; construind o schemă destul de vastă, în care anume semidiametrul orbitei mari (de 10 000 părți) este egală cu $16 \frac{1}{3}$ degete ale unui picior englezesc.

În sfârșit pentru a constata dacă cometa de fapt se mișcă pe orbita astfel aflată, am determinat prin operații parte aritmetice, parte grafice pozițiile cometei pe această orbită în timpurile unor observații: după cum se pot vedea în tabloul următor:

		Distanța cometei de la Soare	Longitudinea calculată	Latitudinea calculată	Longitudinea observată	Latitudinea observată	Diferența longitu- dinii	Diferența latitudinii
			° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	' "	' "
decembrie	12	2792	ϖ 6 32	8 $18 \frac{1}{2}$	ϖ 6 $31 \frac{1}{3}$	8 26	+1	- $7 \frac{1}{2}$
	29	8403	γ 13 $13 \frac{1}{2}$	28 0	γ 13 $11 \frac{3}{4}$	28 $10 \frac{1}{12}$	+2	- $10 \frac{1}{12}$
februarie	5	16 669	γ 17 0	15 $29 \frac{2}{3}$	γ 16 $59 \frac{7}{8}$	15 $27 \frac{2}{5}$	+0	+ $2 \frac{1}{4}$
martie	5	21 737	29 $19 \frac{3}{4}$	12 4	29 $20 \frac{6}{7}$	12 $3 \frac{1}{2}$	-1	+ $\frac{1}{2}$

După aceea compatriotul nostru Halley a determinat orbita printr-un calcul aritmetic mai precis, decît se poate, efectua prin operații grafice; și a aflat locul nodurilor în ϖ și ϖ $1^{\circ}53'$ și înclinarea planului orbitei față de ecliptică de $61^{\circ}20' \frac{1}{3}$, precum și timpul periheliului cometei decembrie $8^d 0^h 4^m$: iar distanța periheliului de la nodul ascendent măsurată pe orbita cometei a aflat-o de $9^{\circ}20'$, și parametrul parabolei de 2430 părți, distanța medie a Soarelui la Pămînt fiind de 100 000 părți. Și din aceste date, făcînd un calcul aritmetic precis, a determinat pozițiile cometei în timpurile observațiilor, după cum urmează în tabloul de la p. 396.

Această cometă a mai apărut în luna noiembrie trecut și a fost observată la Coburg în Saxonia de către d-l Gottfried Kirch în ziua a patra, a șasea și a unsprezecea a acestei luni, stil vechi; și din pozițiile ei față de stelele fixe cele mai apropiate observate destul de precis cu ajutorul unui telescop de două picioare cît și a unuia de zece picioare, și din diferența longitudinilor dintre Coburg și Londra de unsprezece grade și din pozițiile stelarilor fixe observate de compatriotul nostru Pound, compatriotul nostru Halley a determinat locurile cometei după cum urmează.

Noiembrie $3^d 17^h 2^m$, timpul aparent la Londra, cometa era în α $29^{\circ}51'$ cu $1^{\circ}17'45''$ latitudine nordică.

Timpul adevărat			Distanța cometei de la ☉	Longitudinea calculată	Latitudinea calculată	Erorile de	
						longitudine	latitudine
	d h m			° ' "	° ' "	' "	' "
decembrie	12 4 46	28028	♄	6 29 25	8 26 0	-3 5	-2 0
	21 6 37	61076	♄	5 6 30	21 43 20	-1 42	+1 7
	24 6 18	70008		18 48 20	25 22 40	-1 3	-0 25
	26 5 21	75576		28 22 45	27 1 36	-1 28	+0 44
	29 8 3	84021	♃	13 12 40	28 10 10	+1 59	+0 12
ianuarie	30 8 10	86661		17 40 5	28 11 20	+1 45	-0 33
	5 6 1 $\frac{1}{2}$	101440	♈	8 49 49	26 15 15	+0 56	+0 8
	9 7 0	110959		18 44 36	24 12 54	+0 32	+0 58
	10 6 6	113162		20 41 0	23 44 10	+0 10	+0 18
	13 7 9	120000		26 0 21	22 17 30	+0 33	+0 2
februarie	25 7 59	145370	♉	9 33 40	17 57 55	-1 20	+1 25
	30 8 22	155303		13 17 41	16 42 7	-2 10	-0 11
	2 6 35	160951		15 11 11	16 4 15	-2 42	+0 14
	5 7 4 $\frac{1}{2}$	166686		16 58 25	15 29 13	-0 41	+2 10
	25 8 41	202570		26 15 46	12 48 0	-2 49	+1 14
martie	5 11 39	216205		29 10 35	12 5 40	+0 35	+2 24

Noiembrie 5^d 15^h 58^m, cometa era în ♍ 3°23', cu 1°6' latitudine nordică.

Noiembrie 10^d 16^h 31^m, cometa era la o distanță egală de steaua σ din Leul și τ a lui Bayer; dar nu atinsese încă dreapta ce le unește, ci era puțin depărtată de ea. În catalogul stelelor lui Flamsteed σ avea atunci ♍ 14°15' cu latitudinea nordică de aproximativ 1°41', iar τ în ♍ 17°3 $\frac{1}{2}$ ' cu latitudinea sudică de 0°34'. Și punctul mijlociu între acestea a fost ♍ 15°39 $\frac{1}{4}$ ', cu 0°33 $\frac{1}{2}$ ' latitudine nordică. Fie distanța mijlocie a cometei la acea dreaptă aproximativ 10' sau 12', și diferența longitudinilor cometei și a punctului mediu 'va fi de 7', și diferența latitudinilor de aproape 7 $\frac{1}{2}$ '. Și deci cometa era în ♍ 15°32' cu latitudinea nordică de 26' aproximativ.

Prima observație din poziția cometei față de anumite stele mici fixe a fost destul de precisă. A doua de asemenea a fost destul de precisă. În a treia, care a fost mai puțin precisă, eroarea putea fi mai mică de șase sau șapte minute, și poate ceva mai mare. Iar longitudinea cometei în prima observație, care a fost mai precisă decât celelalte, calculată pe orbita parabolică menționată era ♍ 29°30'22" latitudinea nordică de 1°25'7" și distanța ei de la Soare 115 546.

Mai mult, Halley observînd că o importantă cometă într-un interval de 575 de ani a apărut de patru ori, anume în luna septembrie după moartea lui Julius Caesar, în anul 531 după Christos în timpul consulatului lui Lampadius și Oreste, în anul de la Christos 1106, luna februarie și la sfîrșitul anului 1680, și anume cu o coadă lungă și remarcabilă (cu excepția epocii morții lui Caesar, cînd din cauza poziției nepotrivite a Pămîntului coada a apărut mai mică): a căutat orbita eliptică a cărei axă mare ar fi de 1 382 957, distanța medie a Pămîntului la Soare fiind de 10 000 părți: pe care orbită, cometa să se poată roti în 575 de ani. Și punînd nodul ascendent în ♈ 2°2'; înclinarea planului orbitei față de planul eclipticei

61°6'48"; periheliul cometei în acest plan în $\nearrow 22^{\circ}44'25''$; timpul egal al periheliului decembrie 7^d23^h9^m; distanța periheliului de la nodul ascendent în planul eclipticei 9°17'35"; și axa conjugată 18481,2: a calculat mișcarea cometei pe această orbită eliptică. Iar locurile ei deduse atât din observații cât și calculate pe această orbită sînt expuse în tabloul următor:

Timpul adevărat	Longitudinea observată	Latitudinea nord observată	Longitudinea calculată	Latitudinea calculată	Erorile în	
					longitudine	latitudine
d h m	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	' "	' "
noiembrie 3 16 47	♏ 29 51 0	1 17 45	♏ 29 51 22	1 17 32 N	+0 22	-0 13
5 15 37	♏ 3 23 0	1 6 0	♏ 3 24 32	1 6 9	+1 32	+0 9
10 16 18	15 32 0	0 27 0	15 33 2	0 25 7	+1 2	-1 53
16 17 0			♐ 8 16 45	0 53 7A		
18 21 34			18 52 15	1 26 54		
20 17 0			28 10 36	1 53 35		
23 17 5			♐ 13 22 42	2 29 0		
decembrie 12 4 46	♐ 6 32 30	8 28 0	♐ 6 31 20	8 29 6 B	-1 10	+1 6
21 6 37	♐ 5 8 12	21 42 13	♐ 5 6 14	21 44 42	-1 58	+2 29
24 6 18	18 49 23	25 23 5	18 47 30	25 23 35	-1 53	+0 30
26 5 21	28 24 13	27 0 52	28 21 42	27 2 1	-2 31	+1 9
29 8 3	♑ 13 10 41	28 9 58	♑ 13 11 14	28 10 38	+0 33	+0 40
30 8 10	17 38 20	28 11 53	17 38 27	28 11 37	+0 7	-0 16
ianuarie 5 6 1 $\frac{1}{2}$	♑ 8 48 53	26 15 7	♑ 8 48 51	26 14 57	-0 2	-0 10
9 7 1	18 44 4	24 11 56	18 43 51	24 12 17	-0 13	+0 21
10 6 6	20 40 50	23 43 32	20 40 23	23 43 25	-0 27	-0 7
13 7 9	25 59 48	22 17 28	26 0 8	22 16 32	+0 20	-0 56
25 7 59	♒ 9 35 0	17 56 30	♒ 9 34 11	17 56 6	-0 49	-0 24
30 8 22	13 19 51	16 42 18	13 18 28	16 40 5	-1 23	-2 13
februarie 2 6 35	15 13 53	16 4 1	15 11 59	16 2 7	-1 54	-1 54
5 7 4 $\frac{1}{2}$	16 59 6	15 27 3	16 59 17	15 27 0	+0 11	-0 3
25 8 41	26 18 35	12 46 46	26 16 59	12 45 22	-1 36	-1 24
martie 1 11 10	27 52 42	12 23 40	27 51 47	12 22 28	-0 55	-1 12
5 11 39	29 18 0	12 3 16	29 20 11	12 2 50	+2 11	-0 26
9 8 38	0 43 4	11 45 52	♓ 0 42 46	11 45 35	-0 21	-0 17

Observațiile acestei comete de la început pînă la sfîrșit coincid nu mai puțin cu mișcarea cometei pe orbita descrisă, decît de obicei coincid mișcările planetelor cu teoriile lor, și fiind în concordanță demonstrează că a fost una și aceeași cometă, care a apărut în tot timpul, și orbita ei aici a fost definită corect.

În tabloul precedent am omis observațiile din zilele de 16, 18, 20 și 23 noiembrie ca mai puțin precise. Căci cometa a fost observată și în aceste timpuri. Anume Ponthio și colaboratorii săi, la 17 noiembrie st.v. la ora șase dimineța timpul Romei (adică, la 5^h10^m timpul de la Londra), îndreptînd firele spre stele, a observat cometa în $\approx 8^{\circ}30'$, cu latitudinea sudică 0°40'. Observațiile lor se află în tratatul, pe care Ponthio l-a publicat asupra acestei comete. Cellio, care era de față și și-a trimis observațiile într-o scrisoare lui Cassini, a văzut cometa la aceeași oră în $\approx 8^{\circ}30'$ cu latitudinea sudică 0°30'. Gallet din Avignon a văzut cometa la aceeași oră (adică la 5^h42^m dimineța timpul Londrei) în $\approx 8^{\circ}$ fără latitudine. Dar conform teoriei cometa a fost în $\approx 8^{\circ}16'45''$ cu latitudinea sudică de 0°53 7".

La 18 noiembrie ora dimineții 6^h 30^m a Romei (adică, ora 5^h 40^m a *Londrei*) P o n t h i o a văzut cometa în $\approx 13^{\circ}30'$ cu latitudinea sudică $1^{\circ}20'$. C e l l i o în $\approx 13^{\circ}30'$ cu latitudinea sudică $1^{\circ}00'$. G a l l e t însă la ora 5^h 30^m dimineța a văzut la *Avignon* cometa în $\approx 13^{\circ}00'$, cu o latitudine sudică de $1^{\circ}00'$. Și A n g o în Academia din *La Flèche* în Franța, la ora cinci dimineța (adică ora 5^h 9^m a *Londrei*), a văzut cometa la mijloc între două stele mici, dintre care una este media dintre cele trei în linie dreaptă în mîna Fecioarei din emisfera australă, ψ a lui Bayer, și cealaltă este extrema aripei θ a lui Bayer. Prin urmare cometa atunci a fost în $\approx 12^{\circ}46'$ cu latitudinea sudică de $50'$. În aceeași zi, la *Boston* din *Noua-Anglie*, la latitudinea de $42\frac{1}{2}$ grade, ora cinci dimineța (adică după *Londra* la 9^h 44^m dimineța), cometa a fost văzută aproape de ≈ 14 grade, cu latitudinea sudică de $1^{\circ}30'$, după cum am aflat de la vestitul H a l l e y.

La 19 noiembrie ora 4 $\frac{1}{2}$ dimineța, la *Cambridge*, cometa (după observațiile unui tînăr oarecare) era departe de Spica \mathbb{M} , cam 2 grade spre nord-vest. Spica era însă în $\approx 19^{\circ}23'47''$ cu latitudinea sudică de $2^{\circ}1'59''$. În aceeași zi la ora 5 dimineța, la *Boston* în *Noua-Anglie*, cometa era la o distanță de un grad de Spica \mathbb{M} , diferența de latitudine fiind de $40'$. În aceeași zi în insula *Jamaica*, cometa era la o distanță de Spica de aproape un grad. În aceeași zi A r t h u r S t o r e r lîngă fluviul *Patuxent*, aproape de *Huting-Creek* în *Maryland*, la granițele *Virginiei* la latitudinea de $38\frac{1}{2}^{\circ}$, ora cinci dimineța (adică, ora 10 din *Londra*) a văzut cometa deasupra Spicei \mathbb{M} , și aproape în contact cu Spica, între ele fiind o distanță de aproximativ $\frac{3}{4}$ grade. Și din aceste observații comparate între ele conchid că la ora 9^h 44^m după *Londra* cometa era în $\approx 18^{\circ}50'$ cu latitudinea sudică de circa $1^{\circ}25'$. Dar conform teoriei cometa era în $\approx 18^{\circ}52'15''$ cu latitudinea sudică de $1^{\circ}26'54''$.

La 20 noiembrie, d-l M o n t e n a r i profesor de astronomie la *Padua*, la ora șase dimineța *venețiană* (adică, ora 5^h 10^m după *Londra*) a văzut cometa în $\approx 25^{\circ}$ cu latitudinea sudică de $1^{\circ}30'$. În aceeași zi la *Boston*, cometa era la o distanță de Spica \mathbb{M} , 4° de longitudine spre răsărit, și deci era în $\approx 25^{\circ}24'$ aproximativ.

La 21 noiembrie, P o n t h i o și colaboratorii săi la ora 7 $\frac{1}{4}$ dimineța au observat cometa în $\approx 27^{\circ}50'$ cu latitudinea sudică de $1^{\circ}16'$; C e l l i o în $\approx 28^{\circ}$, A n g o la ora cinci dimineța în $\approx 27^{\circ}45'$, M o n t e n a r i în $\approx 27^{\circ}51'$. În aceeași zi în insula *Jamaica*, cometa s-a văzut aproape de începutul Scorpionului, și avea aproape aceeași latitudine cu Spica din Fecioară, adică $2^{\circ}2'$. În aceeași zi la ora cinci dimineța, la *Ballasore* în *India Orientală* (adică în noaptea precedentă la ora 11^h 20^m după *Londra*), s-a luat distanța cometei de la Spica \mathbb{M} $7^{\circ}35'$ spre răsărit. Era pe linia dreaptă dintre Spica și Balanță, și deci se afla în $\approx 26^{\circ}58'$ cu latitudinea sudică de circa $1^{\circ}11'$; și după orele 5^h 40^m (anume la ora 5 dimineța după *Londra*) era în $\approx 28^{\circ}12'$ cu latitudinea sudică de $1^{\circ}16'$. După teorie cometa era în $\approx 28^{\circ}10'36''$, cu latitudinea sudică de $1^{\circ}53'35''$.

La 22 noiembrie, cometa a fost văzută de M o n t e n a r i în \mathbb{M} $2^{\circ}33'$. La *Boston* însă în *Noua-Anglie* a apărut aproximativ în \mathbb{M} 3 grade, aproape cu

aceeași latitudine ca mai sus, adică $1^{\circ}30'$. În aceeași zi la ora cinci dimineța, la *Ballasore*, cometa a fost observată în $\mathbb{M} 1^{\circ}50'$; și deci la ora cinci dimineța după *Londra*, cometa era aproximativ în $\mathbb{M} 3^{\circ}5'$. În aceeași zi la ora $6\frac{1}{2}$ a *Londrei* compatriotul nostru *H o o k e* a văzut cometa aproximativ în $\mathbb{M} 3^{\circ}30'$, și anume pe linia dreaptă ce trece prin *Spica Fecioarei* și *Inima Leului*, nu tocmai exact, ci puțin mai spre nord. *M o n t e n a r i* de asemenea a observat că linia dusă de la cometă prin *Spica*, în această zi și în cele următoare trecea prin partea de sud a *Inimii Leului*, fiind un interval foarte mic între *Inima Leului* și această linie. Linia dreaptă trecând prin *Inima Leului* și *Spica Fecioarei* a tăiat ecliptica în $\mathbb{M} 3^{\circ}46'$; sub un unghi de $2^{\circ}51'$. Și dacă cometa ar fi fost situată pe această linie în $\mathbb{M} 3$ grade latitudinea ei ar fi fost de $2^{\circ}26'$. Dar cum cometa după părerile lui *H o o k e* și *Montenari* e puțin depărtată de această linie spre nord, latitudinea ei a fost puțin mai mică. În ziua de 20, după observația lui *Montenari*, latitudinea ei era aproape egală cu latitudinea *Spicei* \mathbb{M} și era circa de $1^{\circ}30'$, și după părerile unanime ale lui *H o o k e*, *Montenari* și *Ango* creștea neconținut, și deci era în mod sensibil mai mare decât $1^{\circ}30'$. Între limitele stabilite de $2^{\circ}26'$ și $1^{\circ}30'$, latitudinea în mărime mijlocie va fi de aproximativ $1^{\circ}58'$. *H o o k e* și *Montenari* sînt de acord că coada cometei era îndreptată spre *Spica* \mathbb{M} , deviind puțin de la această stea, după *H o o k e* spre Sud, după *Montenari* spre nord; și deci declinația era abia sensibilă, și coada fiind aproape paralelă cu ecuatorul era deviată întrucîtva de la opoziția Soarelui spre nord.

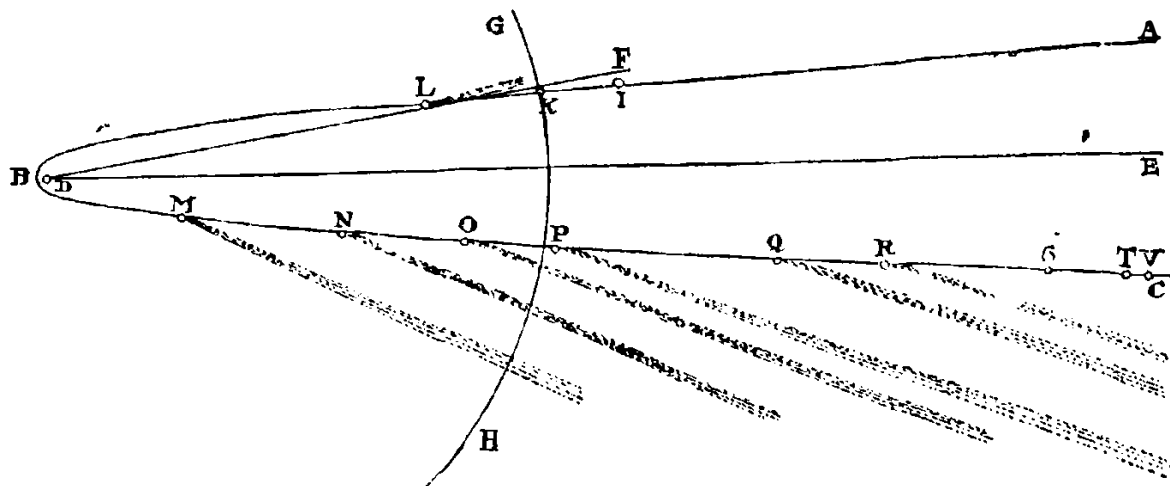
La 23 noiembrie st. v., ora 5 dimineța după *Nürnberg* (adică ora $4\frac{1}{2}$ a *Londrei*), d-l *Zimmerman* a văzut cometa în $\mathbb{M} 8^{\circ}8'$, cu latitudinea sudică de $2^{\circ}31'$, luînd anume distanțele ei de la stelele fixe.

La 24 noiembrie, înainte de răsăritul Soarelui, cometa a fost văzută de *Montenari* în $\mathbb{M} 12^{\circ}52'$, de partea nordică a dreptei ce trecea prin *Inima Leului* și *Spica Fecioarei*, și deci avea o latitudine ceva mai mică decât $2^{\circ}38'$. Această latitudine, după cum am spus, potrivit observațiilor lui *Montenari*, lui *Ango* și ale lui *H o o k e*, creștea neconținut; și deci era ceva mai mare decât $1^{\circ}58'$; și în mărime mijlocie, fără eroare notabilă, se poate stabili la $2^{\circ}18'$. *Ponthio* și *Gallet* susțin că latitudinea scade, și *Cellio* și un observator din *Noua-Anglie*, că ea păstrează aproape aceeași mărime, și anume de un grad sau unul și jumătate. Mai grosolane sînt observațiile lui *Ponthio* și *Cellio*, în deosebi acelea în care se foloseau de azimuturi și înălțimi, precum și acelea ale lui *Gallet*; mai bune sînt acelea care au fost făcute prin pozițiile cometei față de stelele fixe de către *Montenari*, *H o o k e*, *Ango* și observatorul din *Noua-Anglie*, și uneori de *Ponthio* și *Cellio*. În aceeași zi la ora cinci dimineța la *Ballasore* cometa a fost observată în $\mathbb{M} 11^{\circ}45'$; și deci la ora cinci dimineța după *Londra* era aproximativ în $\mathbb{M} 13$ grade. Conform teoriei cometa era în $\mathbb{M} 13^{\circ}22'42''$.

La 25 noiembrie, înainte de răsăritul Soarelui, *Montenari* a observat cometa aproximativ în $\mathbb{M} 17\frac{3}{4}$ grade. Și *Cellio* a observat în același timp că, cometa era pe linia dreaptă dintre steaua luminoasă în coapsa dreaptă a *Fecioarei* și discul de sud al *Balanței*, și această dreaptă

taie drumul cometei în \mathbb{M} $18^{\circ}36'$. Potrivit teoriei cometa era aproximativ în \mathbb{M} $18\frac{1}{3}$ grade.

Așadar aceste observații sînt de acord cu teoria, întrucît ele sînt de acord între ele, și fiind de acord probează că a fost una și aceeași cometă aceea care a apărut tot timpul din 4 noiembrie pînă la 9 martie. Traectoria acestei comete a tăiat de două ori planul eclipticei, și de aceea nu a fost rectilinie. A tăiat ecliptica nu în părțile opuse ale cerului, ci la sfîrșitul Fecioarei și la începutul Capricornului, la un interval de circa 98 grade; și deci cursul cometei era foarte mult deviat de la un cerc mare. Căci și în luna noiembrie cursul ei devia de la ecliptică spre sud cu cel puțin trei



grade, și apoi în luna decembrie devia cu 29 grade de la ecliptică spre nord, cele două părți ale orbitei, în care cometa tindea spre Soare și revenea de la Soare, deviind una de alta cu un unghi aparent de mai mult de treizeci de grade, după cum a observat Montenari. Această cometă trecea prin nouă semne, anume de la ultimul grad al Leului pînă la începutul Gemenilor, afară de semnul Leului, prin care trecea înainte de a fi început a se vedea și nu există altă teorie, prin care o cometă să parcurgă o parte atît de mare a cerului cu o mișcare regulată. Mișcarea ei a fost foarte neegală. Căci în jurul zilei de 20 noiembrie descria aproape 5 grade în fiecare zi; apoi cu o mișcare întîrziată între 26 noiembrie și 12 decembrie, adică într-un spațiu de 15 zile și jumătate, a descris numai 40 grade. Iar după aceea cu o mișcare accelerată, a descris aproximativ 5 grade în fiecare zi, înainte ca mișcarea să fi început să întîrzie. Și teoria care corespunde exact unei mișcări atît de neegale prin cea mai mare parte a cerului, și care observă aceleași legi cu teoria planetelor, și coincide exact cu observațiile astronomice precise, nu poate să nu fie adevărată.

De altfel mi s-a părut util să schițez în figura de mai sus, traectoria pe care a descris-o cometa, și coada adevărată pe care a emis-o în diversele poziții așezate în planul traectoriei: unde ABC reprezintă traectoria cometei, D Soarele, DE traectoria axei, DF linia nodurilor, GH intersecția sferei orbitei mari cu planul traectoriei, I locul cometei la 4 noiembrie anul 1680, K locul aceleiași la 11 noiembrie, L locul la 19 noiembrie, M locul la 12 decembrie, N locul la 21 decembrie, O locul la 29 decembrie, P locul la 5 ianuarie următor, Q locul la 25 ianuarie, R locul la 5 februarie, S locul la 25 februarie, T locul la 5 martie și V locul la 9 martie. M-am folosit de următoarele observații pentru determinarea cozii.

Noiembrie 4 și 6: coada nu apăruse încă. Noiembrie 11: coada începuse să se observe dar nu mai lungă de o jumătate de grad într-un telescop de zece picioare. Noiembrie 17: coada a fost văzută de P o n t h i o mai lungă de 15 grade. Noiembrie 18: coada a fost observată lungă de 30 grade în *Noua-Anglie*, direct opusă Soarelui, și se întindea pînă la steaua δ , care atunci era în Υ $9^{\circ}54'$. Noiembrie 19: În *Maryland* coada a fost văzută de 15 sau 20 grade lungime. Decembrie 10: coada (după observațiile lui F l a m s t e e d) trecea prin mijlocul distanței dintre coada șarpelui Ophiuchus și steaua δ în aripa de sud a Vulturului și se termina aproape de stelele A , ω , b în tabelele lui B a y e r. Prin urmare capătul ei era în Υ $19\frac{1}{2}$ grade, cu latitudinea boreală de circa $34\frac{1}{4}$ grade. Decembrie 11: coada se urca pînă la capătul Săgeții (α , β după B a y e r) terminîndu-se în Υ $26^{\circ}43'$ cu latitudinea nordică $38^{\circ}34'$. Decembrie 12: coada trecea prin mijlocul Săgeții, și nu se întindea mult mai departe, terminîndu-se în \approx 4 grade, cu latitudinea nordică de aproximativ $42\frac{1}{2}$ grade. Acestea trebuie înțelese pentru partea mai strălucitoare a cozii. Căci cu o lumină mai obscură, într-un cer poate mai senin, în 12 decembrie la $5^h 40^m$ a Romei (după observația lui P o n t h i o) coada s-a extins pînă la 10 grade deasupra cozii Lebedei; și partea ei dinspre vest și dinspre nord era la o depărtare de 45 minute de această stea. Dar în aceste zile lățimea cozii era de 3 grade, pînă la capătul de sus, și deci mijlocul ei era la o distanță de $2^{\circ}15'$ spre sud, și capătul superior era \times în 22 grade, cu latitudinea nordică de 61 grade, și deci coada avea o lungime de circa 70 grade. Decembrie 21: ea se întindea aproape pînă la scaunul *Cassiopeei*, egal depărtată de β și *Schedir*, și fiind la o distanță de fiecare dintre ele egală cu distanța lor reciprocă, și deci terminîndu-se în Υ 24 grade, cu lățimea de $47\frac{1}{2}$ grade. Decembrie 29: coada atingea *Scheat* situat la stînga, și umplea complet spațiul dintre două stele în piciorul de nord al *Andromedei* și era lungă de 54 grade; și deci se termina în Υ 19 grade, cu latitudinea de 35 grade. Ianuarie 5: coada a atins steaua π în pieptul *Andromedei* de partea ei dreaptă, și steaua μ în cingătoarea ei de partea stîngă; și (după observațiile noastre) era lungă de 40 grade; era însă curbă și cu partea convexă privea spre sud. Și în apropierea capului cometei făcea un unghi de 4 grade cu cercul ce trecea prin Soare și capul cometei; dar spre celălalt capăt se înclina spre cerc sub un unghi de 10 sau 11 grade și coarda cozii făcea un unghi de 8 grade cu cercul. Ianuarie 13: coada cu o lumină destul de sensibilă se termina între *Alamech* și *Algol* și cu o lumină foarte slabă se termina în regiunea stelei K în latura lui *Perseus*. Distanța capătului cozii de la cercul ce unea Soarele și cometa era de $3^{\circ}50'$, și înclinarea coardei cozii față de cerc de $8\frac{1}{2}$ grade. Ianuarie 25 și 26: coada strălucea cu o lumină slabă la latitudinea de 6 sau 7 grade; și o noapte sau două după aceea cînd cerul era foarte senin, cu o lumină foarte slabă și abia sensibilă atingea lungimea de 12 grade și ceva mai mult. Iar axa ei era îndreptată exact spre steaua strălucitoare din umărul oriental al Vizitiului, și deci devia de la opoziția Soarelui spre nord cu un unghi de 10 grade. În sfîrșit, la 10 februarie, am observat cu telescopul coada de două grade lungime. Căci lumina mai slabă amintită nu se vedea prin sticle. P o n t h i o

însă scrie că la 7 februarie a văzut coada avînd o lungime de 12 grade. La 25 februarie și după aceea cometa se vedea fără coadă.

Privind orbita descrisă mai sus și luînd în considerare celelalte fenomene ale acestei comete, se constată fără greutate, că corpurile cometelor sînt solide, compacte, fixe și durabile la fel cu corpurile planetelor. Căci dacă nu ar fi altceva decît vapori sau exhalatii de ale Pămîntului, ale Soarelui și planetelor, această cometă în trecerea sa prin vecinătatea Soarelui ar trebui să se risipească imediat. Căci căldura Soarelui este precum densitatea razelor, adică, în raport invers cu pătratul distanței locurilor de la Soare. Și deci cum distanța cometei de la centrul Soarelui la 8 decembrie cînd se afla în periheliu, era către distanța Pămîntului la centrul Soarelui aproximativ precum 6 către 1000, căldura Soarelui către cometă era în acel timp către căldura Soarelui de vară la noi precum 1 000 000 către 36, sau 28 000 către 1. Dar căldura apei în fierbere este aproape de trei ori mai mare decît căldura pe care o primește pămîntul uscat de la soarele de vară, după cum am observat; și căldura fierului incandescent (dacă presupunerea mea este corectă) este aproape de trei sau de patru ori mai mare decît căldura apei ce fierbe; și deci căldura, pe care o poate primi pămîntul uscat de pe cometa situată în periheliu de la razele solare, este de aproape 2000 de ori mai mare decît căldura fierului incandescent. Dar la o căldură atît de mare vaporii și exhalatiile, și orice materie volatilă ar trebui să se consume și să se risipească imediat.

Prin urmare cometa în periheliul său primește o căldură imensă de la Soare, și această căldură o poate conserva timp foarte îndelungat. Căci o sferă de fier incandescent de un deget lățime, stînd în aer abia își pierde căldura întreagă în timp de o oră. O sferă mai mare însă își va păstra căldura timp mai îndelungat în raportul diametrului, deoarece suprafața (după măsura căreia se răcește în contact cu aerul înconjurător) este în acel raport mai mică față de cantitatea materiei sale calde cuprinse. Și deci o sferă de fier incandescent egală cu Pămîntul nostru, adică, avînd o lățime de circa 40 000 000 de picioare, abia s-ar răci în tot atîtea zile, și deci în 50 000 ani. Presupun însă că durata căldurii, din cauze latente, crește într-un raport mai mic decît acela al diametrului: și ași dori să se caute adevăratul raport prin experiențe.

Trebuie să notăm mai departe că cometa din luna decembrie, tocmai cînd se încălzea de la Soare, emitea o coadă cu mult mai mare și mai strălucitoare decît mai înainte în luna noiembrie, cînd nu atinsese încă periheliul. Și în general toate cozile mari și strălucitoare se nasc din comete imediat după trecerea lor prin regiunea Soarelui. Prin urmare încălzirea cometei contribuie la mărimea cozii. Și de aici mi se pare că pot deduce că coada nu este altceva decît o vapoare foarte fină, pe care o emite capul sau nucleul cometei prin căldura sa.

De altfel asupra cozilor cometelor există trei păreri; ele sînt sau lumina Soarelui propagată prin capetele translucide ale cometelor, sau provin din refracția luminii în trecerea ei de la capul cometei spre Pămînt, sau în sfîrșit sînt un nor sau vapori ce izvorăsc într-una din capul cometei îndepărtîndu-se în părțile opuse ale Soarelui. Prima părere o susțin aceia care încă nu sînt familiarizați cu știința optice. Căci lumina Soarelui nu se vede într-o cameră întunecoasă, decît dacă lumina se reflectă de particulele de praf și de fum care totdeauna plutesc prin aer; și deci în aerul infectat cu fum gros este

mai strălucitoare, și se va observa mai tare; într-un aer mai clar e mai slabă și abia se va observa: în ceruri însă unde nu există materie reflectantă este nulă. Lumina nu se vede pentru că ea se află într-un corp strălucitor, ci pentru că se reflectă spre ochii noștri. Căci vedere nu există decît prin razele care pătrund în ochii noștri. Trebuie deci să existe o materie reflectantă în regiunea cozii, ca nu cumva întreg cerul luminat de Soare să strălucească în mod uniform. Opinia a doua se lovește de multe dificultăți. Cozile niciodată nu variază în culori: care totuși de obicei sînt însoțitorii inseparabili ai refracțiilor. Lumina stelelor fixe și a planetelor transmisă nouă în mod distinct demonstrează că mediul ceresc nu are nici o putere de refracție. Căci ceea ce se spune despre *egipteni* că ar fi văzut stele fixe cu coadă aceasta, deoarece se întîmplă foarte rar, trebuie să o atribuim unei refracții întîmplătoare a norilor. Radierea și scînteierea stelelor fixe trebuie atribuite refracțiilor atît ale ochilor cît și ale aerului tremurător: căci punînd un telescop înaintea ochilor ele dispar. Din cauza tremurării aerului și a vaporilor ce se ridică se întîmplă ușor ca razele să fie deviate alternativ din spațiul îngust al pupilei, dar niciodată din deschiderea mai largă a sticlei obiectivului. De aici provine că în primul caz se naște scînteierea, în al doilea însă încețază; și încetarea în cazul din urmă demonstrează transmisiunea regulată a luminei prin ceruri fără vreo refracție sensibilă. Să nu spună cineva că cozile nu se văd de obicei în comete, cînd lumina lor nu este destul de intensă, fiindcă atunci razele secundare nu au putere de ajuns ca să impresioneze ochii, și de aceea nu se văd cozile stelelor fixe: căci trebuie să știm că lumina stelelor fixe se poate mări cu ajutorul telescoapelor mai mult de o sută de ori, și totuși cozile nu se văd. Lumina planetelor este mai intensă, dar ele n-au coadă: cometele însă adesea au cozi bogate, pe cînd lumina capetelor este slabă și ștearsă. Căci astfel cometa anului 1680, în luna decembrie, în timp ce capul prin lumina sa abia egala stelele de mărimea a doua, emitea o coadă de o mare strălucire avînd o lungime pînă la 40, 50, 60 sau 70 de grade și chiar și mai mult: după aceea în 27 și 28 ianuarie capul apărea numai ca o stea de mărimea a șaptea, pe cînd coada de o lumină slabă dar destul de sensibilă era lungă de 6 sau 7 grade, și cu o lumină foarte obscură, care abia se putea observa, se întîindea pînă la 12 grade sau ceva mai mult: după cum am spus mai sus. Dar și în 9 și 10 februarie, cînd capul nu se putea vedea cu ochii liberi, am observat prin telescop o coadă lungă de două grade. Apoi, dacă coada ar proveni din refracția materiei cerești, și ar devia de la opoziția Soarelui după forma cerurilor, ar trebui ca devierea să aibă loc totdeauna de aceeași parte, în aceleași regiuni ale cerului. Dar cometa anului 1680 din 28 decembrie ora 8½ p.m., ora *Londrei*, se afla în $\text{II } 8^{\circ}41'$ cu latitudinea nordică de $28^{\circ}6'$, Soarele fiind în $\text{V } 18^{\circ}26'$. Și cometa anului 1577, în 29 decembrie se afla în $\text{V } 8^{\circ}41'$ cu latitudinea nordică de $28^{\circ}40'$, Soarele de asemenea fiind aproximativ în $\text{V } 18^{\circ}26'$. Și în ambele cazuri Pămîntul se afla în același loc și cometa apărea în aceeași parte a cerului; totuși în primul caz coada cometei (după observațiile mele și ale altora) devia cu un unghi de $4\frac{1}{2}$ grade de la opoziția Soarelui spre nord; iar în al doilea (după observațiile lui *T y c h o*) declinația era de 21 grade spre sud. Așadar, respingînd refracția cerurilor, mai rămîne să deducem fenomenele cozilor dintr-o materie oarecare ce reflectă lumina.

Dar faptul că cozile provin din capete și se ridică în regiunile opuse Soarelui se confirmă prin legile pe care ele le observă. Precum și aceea că fiind situate în planele orbitelor cometelor ce trec prin Soare, ele deviază de la opoziția Soarelui totdeauna de aceleași părți, pe care le apasă capetele progresînd pe acele orbite. Că unui spectator plasat în aceste plane îi apar în părți direct opuse Soarelui, deplasîndu-se însă spectatorul din aceste plane, deviația se simte puțin, și apare zilnic mai mare. Că deviația e mai mică, celelalte condiții fiind aceleași, atunci cînd coada e mai oblică față de orbita cometei, precum și cînd capul cometei se apropie mai mult de Soare; mai ales dacă unghiul de deviație se consideră aproape de capul cometei. Că afară de aceasta cozile ce nu deviază apar drepte, iar cele care deviază iau forma unei curbe. Curbura e mai mare cu cît deviația e mai mare, și e mai sensibilă cînd, celelalte condiții fiind egale, coada e mai lungă: căci în cele mai scurte curbura abia se poate observa. Că unghiul de deviație e mai mic lîngă capul cometei, mai mare lîngă extremitatea cealaltă a cozii, și aceasta decarece căda cu latura sa convexă privește părțile de la care are loc deviația, și care sînt pe linia dreaptă dusă de la Soare prin capul cometei. Și că cozile care sînt mai lungi și mai late, și strălucesc cu o lumină mai puternică, sînt ceva mai strălucitoare și la margine distincte spre laturile convexe decît spre cele concave. Prin urmare fenomenele cozii depind de mișcarea capului, nu însă de regiunea cerului în care se vede capul: și de aceea nu provin din refracția cerurilor, ci se nasc din capul care furnizează materia. Căci după cum în aerul nostru fumul unui corp arzînd se urcă în sus, și aceasta sau perpendicular dacă corpul e în repaus, sau oblic dacă corpul se mișcă în lături: tot astfel în ceruri, unde corpurile gravitează spre Soare, fumurile și vaporii trebuie să se urce dinspre Soare (după cum s-a spus mai sus) și sau să tindă în linie dreaptă în sus, dacă corpul fumegător este în repaus; sau în mod oblic dacă corpul progresînd părăsește neconținut locurile din care se urcau părțile de sus ale vaporilor. Și această oblicitate va fi mai mică cînd ascensiunea vaporilor e mai rapidă: anume în apropierea Soarelui și lîngă corpul fumegător. Dar din cauza variației oblicității colcana de vaporii se va curba: și fiindcă vapoarea în latura precedentă a coloanei e ceva mai recentă, astfel că acolo va fi și ceva mai densă, și de aceea va reflecta lumina mai bogat, și se va termina cu o margine mai distinctă. Aici nu adăug nimic despre agitațiile subite și nesigure ale cozilor, și despre figurile lor neregulate, pe care unii le descriu uneori; deoarece ele se nasc fie din schimbările aerului nostru și din mișcările norilor ce întunecă parțial cozile; fie poate din părțile Căii Laptelui, care se pot confunda cu cozile celor care trec pe dinaintea ei, și pot fi privite ca părțile lor.

Iar că vaporii, care sînt de ajuns să umple spații atît de imense, pot proveni din atmosferele cometelor, se explică prin rărimea aerului nostru. Căci aerul în apropierea suprafeței Pămîntului ocupă un spațiu de aproape 850 de ori mai mare decît apa de aceeași greutate, și deci o coloană cilindrică de aer înaltă de 850 picioare are aceeași greutate cu o coloană de apă de un picior și de aceeași lățime. Dar o coloană de aer ajungînd pînă la partea superioară a atmosferei este egală în greutate cu o coloană de apă înaltă de de circa 33 picioare; și de aceea dacă din coloana întreagă de aer se îndepărtează partea de jos de 850 picioare înălțime, partea superioară rămasă va fi egală în greutatea sa cu o coloană de apă înaltă de 32 picioare. De unde

(în baza regulei confirmate de multe experiențe, că compresiunea aerului este precum greutatea atmosferei apăsătoare, și că gravitatea e invers proporțională cu pătratul distanței locurilor de la centrul Pământului) făcînd calculul (potrivit corolarului XXII, Cartea a II-a) am aflat că aerul, dacă ne urcăm de la suprafața Pământului la înălțimea unui semidiametru pămîntesc, este mai rar decît la noi într-un raport cu mult mai mare, decît a întregului spațiu din interiorul orbitei lui Saturn față de o sferă descrisă cu un diametru de un deget. Și deci o sferă de aer de-al nostru, avînd lățimea de un deget, cu rărima pe care ar avea-o la înălțimea unui semidiametru terestru, ar umple toate regiunile planetelor pînă la sfera lui Saturn și cu mult dincolo. Prin urmare cum aerul la înălțimi și mai mari se rarefiază enorm de mult și coama sau atmosfera cometei, socotind-o de la centrul ei, este aproape de zece ori mai înaltă decît suprafața nucleului, cum coada se urcă și mai sus, va trebui ca să fie cît se poate de rară. Și cu toate că din cauza atmosferei foarte groase a cometelor, și marea gravitate a corpurilor spre Soare, și gravitatea particulelor de aer și de vapori, una către alta, s-ar putea ca aerul în spațiile cerești și în cozile cometelor să nu se rarefieze atît de mult; totuși din acest calcul e clar că, cantitatea foarte mică de aer și vapori e abundent suficientă pentru a produce toate acele fenomene ale cozilor. Căci și rărima importantă a cozilor se deduce din astrele care strălucesc prin ele. Atmosfera terestră strălucind în lumina Soarelui, prin grosimea sa de cîteva mile stinge complet și toate astrele și însăși Luna, pe cînd prin grosimea imensă a cozilor, iluminată la fel de lumina solară, astrele cele mai mici pot străluci fără vreo slăbire a clarității. Și de obicei strălucirea mai multor cozi nu e mai mare, decît a aerului nostru de unul sau două degete grosime reflectînd într-o cameră întunecoasă lumina unui fascicul de raze solare.

Putem cunoaște aproximativ în cît timp se ridică vaporii de la capul cometei la coada ei ducînd o dreaptă de la capătul cozii la Soare, și notînd locul unde dreapta taie traiectoria. Căci vaporii la capătul cozii, dacă dreapta e dusă de la soare, au început a urca de la cap, în timp ce capul era în locul de intersecție. Dar vaporii nu se ridică în linie dreaptă de la Soare, ci menținînd mișcarea cometei, pe care o avea înainte de urcarea lor, și compunîndu-se cu mișcarea de ascensiune, se urcă în mod oblic. De unde e mai verosimilă soluția, că dreapta, care taie orbita, e paralelă cu lungimea cozii, sau mai bine (din cauza mișcării curbilinii a cometei) că ea deviază de la linia cozii. În acest fel am aflat că vaporii care erau la capătul cozii la 25 ianuarie au început să se ridice de la capăt înainte de 11 decembrie, și deci pentru urcarea lor întreagă au trebuit mai mult de 45 de zile. Dar întreaga coadă, care a apărut la 10 decembrie s-a urcat în timpul celor două zile, care au trecut de la timpul periheliului cometei. Prin urmare vaporii la început în apropierea Soarelui se ridicau foarte repede, și după aceea au continuat să se urce cu o mișcare totdeauna întîrziată din cauza gravității; și urcîndu-se lungimea cozii se mărea: coada însă, tot timpul cît era vizibilă, consta aproape numai din vaporii care se urcaseră în timpul periheliului; și vaporii, care s-au urcat mai întîi și au compus capătul cozii, nu au dispărut decît cînd din cauza distanței foarte mari atît la Soarele luminos cît și la ochii noștri nu mai erau vizibili. Prin urmare nici cozile celorlalte comete, care sînt scurte, nu se urcă cu o mișcare rapidă și continuă de la capete și imediat după aceea dispar, ci sînt coloane permanente de vapori și exhalatii, propagate de la capete cu

o mișcare foarte înceată de mai multe zile, care, participînd la mișcarea pe care o au capetele la început, își continuă mișcarea prin ceruri împreună cu capetele. Și de aici iarăși deducem că spațiile cerești sînt lipsite de rezistență; deoarece în ele nu numai corpurile solide ale planetelor și cometelor, ci și vaporii foarte rari ai cozilor își efectuează în deplină libertate mișcările lor foarte rapide și le păstrează timp foarte îndelungat.

Urcarea cozilor din atmosferele capetelor și dirijarea lor progresivă în sens opus Soarelui *Kepler* le atribuie acțiunii razelor de lumină ce răpesc cu sine materia cozii. Și e logic să admitem că aerul foarte rar în spațiile foarte libere cedează acțiunii razelor, cu toate că substanțele mai dense din regiunile noastre nu pot fi deplasate în mod sensibil de razele solare. Altul e de părere că pot exista atît particule ușoare cît și grele, și că materia cozilor e ușoară, și din cauza micii greutatei ele se depărtează de Soare. Cum însă gravitatea corpurilor terestre este precum materia în corpuri, și deci conservîndu-se cantitatea de materie ea nu se poate nici mări nici micșora, presupun că acea urcare provine îndeosebi din rarefierea materiei cozilor. Fumul din horn se ridică sub impulsul aerului în care plutește. Aerul rarefiat de căldură se urcă, din cauza micșorării greutății sale specifice și duce cu sine fumul pe care-l conține. Pentru ce nu s-ar urca la fel de la Soare coada cometei? Căci razele solare nu acționează mediile, prin care pătrund, decît prin reflexie și refracție. Particulele reflectante încălzite prin acea acțiune încălzesc materia eterică în care sînt conținute. Această căldură pe care o primește o va rarefia, și din cauza micșorării prin rarefiere a greutății sale specifice, cu care mai înainte tindea spre Soare, va urca și se va duce, cu sine particulele reflectante din care se compune coada. Tot la urcarea vaporilor conduce și faptul, că ei se rotesc în jurul Soarelui și prin acea acțiune tind să se îndepărteze de Soare, pe cînd atmosfera Soarelui și materia cercurilor sau sînt în repaus, sau prin singura mișcare pe care o primesc de la rotația Soarelui, se rotesc mai încet. Acestea sînt cauzele ridicării cozilor în vecinătatea Soarelui, unde orbitele sînt mai curbe, și cometele se află în atmosfera mai densă și deci mai grea a Soarelui, și de aceea emit acum cozi cît se poate de lungi. Căci cozile, care se nasc atunci, păstrîndu-și mișcarea și gravitînd spre Soare, se vor mișca în jurul Soarelui pe elipse ca și capetele, și prin acea mișcare vor însoți totdeauna capetele și vor adera la ele în modul cel mai liber. Căci gravitatea vaporilor spre Soare nu va mai putea face ca după aceea cozile să se despartă de capete spre Soare, după cum nici gravitatea capetelor nu poate face, ca acestea să se îndepărteze de cozi. Prin gravitatea comună sau vor cădea simultan spre Soare, sau vor întîrzia împreună în urcarea lor; și deci gravitatea nu împiedica, ca cozile și capetele să ia foarte ușor o poziție reciprocă oarecare din cauzele descrise sau din altele oarecare, și, după aceea să le păstreze liber.

Așadar cozile, care se nasc în periheliile cometelor, se vor duce în regiuni foarte îndepărtate cu capetele lor, și sau de acolo după o serie lungă de ani, se vor reîntoarce la noi cu ele, sau mai degrabă, acolo rarefiate, vor dispărea cu încetul. Căci după aceea în coborîrea capetelor spre Soare vor trebui să se propage din capete cozi noi scurte cu o mișcare lentă, și apoi în periheliile acelor comete, care se coboară pînă la atmosfera Soarelui, să crească imens. Căci în acele spații foarte libere, vaporii se răresc și se dilată neconținut. Din care cauză orice coadă la extremitatea superioară este mai lată decît

lîngă capătul cometei. Se pare logic ca prin acea rarefiere vaporii încontinuu dilatați la urmă se împrăstie și curg în toate sensurile, apoi din cauza greutateii lor ei sînt atrași spre planete, și se amestecă cu atmosferele acestora. Căci după cum mările sînt absolut necesare pentru constituția acestui Pămînt, și anume pentru ca din ele prin căldura Soarelui să se producă vaporii de ajuns, care sau adunați în nori cad sub formă de ploaie, și să ude și să nutrească întreg pămîntul pentru a produce vegetațiile; sau condensați pe vîrfurile reci ale munților (după cum filozofează unii cu tot dreptul) să curgă în izvoare și fluvii: tot astfel pentru conservarea mărilor și umezelii în planete se pare că sînt necesare cometele, din exhalatiile și vaporii condensați ai cărora, orice lichid ce se consumă prin vegetație și putrefacție și se transformă în pămînt uscat, poate fi încontinuu înlocuit și refăcut. Căci toate vegetațiile cresc numai din lichide, apoi în mare parte se prefac prin putrefacție în pămînt arid, și încontinuu se depune nămol din fluidele putrede. Astfel masa pămîntului arid crește zilnic, și lichidele, dacă nu și-ar primi de undeva un supliment, ar trebui să descrească încontinuu și în sfîrșit să dispară. Mai mult, mi se pare că spiritul, care e partea cea mai mică dar cea mai subtilă și mai bună a aerului nostru, și e necesară vieții tuturor lucrurilor, ne vine îndeosebi din comete.

Atmosferele cometelor în căderea lor spre Soare alergînd spre cozi, se micșorează, și (desigur în partea care privește spre Soare) devin mai înguste: și la rîndul lor la depărtarea lor de Soare, cînd fug mai puțin spre cozi, se măresc; dacă *H e v e l i u s* a notat bine fenomenele. Apar însă foarte mici, cînd capetele încălzite la Soare se depărtează în cozile foarte mari și foarte strălucitoare, și nucleele sînt înconjurată în părțile cele de mai jos ale atmosferelor de un fum mai dens și mai negru. Căci orice fum produs de o căldură foarte mare de obicei e mai gros și mai negru. Astfel capul cometei, despre care am vorbit, la distanțe egale de Soare și Pămînt a apărut mai obscur după periheliu decît înainte. Căci în luna decembrie, de obicei se compara cu stelele de mărimea a treia, în luna noiembrie însă cu stele de mărimea întii și a doua. Și cei care au văzut-o în ambele epoci descriu cometa de la început mai mare. Căci unui tînăr oarecare din *Cambridge*, la 19 noiembrie, această cometă cu lumina sa oricît de plumburie și ștearsă, i se părea egală cu *Spica Fecioarei*, și lucea mai clar decît după aceea. Și lui *M o n t e n a r i* la 20 noiembrie st.v. i se părea cometa mai mare decît o stea de prima mărime, avînd o coadă de două grade lungime. Și *S t o r e r* în unele scrisori, care mi-au căzut în mîini, a scris că, capul ei, în luna decembrie cînd emitea coada cea mai mare și strălucitoare, era mic și în mărimea vizibilă rămînea mult în urma cometei, care apăruse în luna noiembrie înaintea răsăritului Soarelui. A cărei cauză am presupus a fi, că materia capului la început era mai bogată și cu încetul s-a consumat.

Se pare că din aceeași cauză, capetele altor comete, care au emis cozi foarte mari și strălucitoare, au apărut foarte obscure și mici. Căci la 5 martie st.n. anul 1669 ora șapte seara, *V a l e n t i n E s t a n c e l* fiind în *Brazilia*, a văzut o cometă aproape de orizont spre sud-vest, avînd un capăt foarte mic și abia observabil, iar coada peste măsură de strălucitoare, astfel că cei care stăteau pe litoral îi vedeau ușor forma reflectată de mare. Avea forma unei bare strălucitoare de o lungime de 23 grade, întinzîndu-se de la vest la sud, și aproape paralelă cu orizontul. Dar această mare strălucire

a durat numai trei zile, descrescînd apoi în mod remarcabil; și în timp ce strălucirea scădea coada creștea în mărime. De aceea se spune că și în *Portugalia* a ocupat aproape a patra parte a cerului (adică 45 grade) întinzîndu-se de la apus spre răsărit cu o mare strălucire; totuși nu a apărut întreagă, capul fiindu-i în aceste regiuni totdeauna ascuns sub orizont. Din creșterea cozii și din descrescerea strălucirii este evident că, capul s-a depărtat de Soare, și că a fost mai aproape de el la început, la fel cu cometa anului 1680. Și în cronica *Saxoniei* de asemenea se citește, că cometa anului 1106, *a cărei stea era mică și obscură (ca aceea a anului 1680) dar strălucirea cozii care ieșea din ea foarte clară și se întindea ca o bară foarte mare între est și nord*, după cum scrie și *Hevelius* după călugărul *Simeon* din *Durham*. A apărut la începutul lunii februarie, și apoi spre seară, spre sud-vest. De aici și din poziția cozii se deduce că capul era în vecinătatea Soarelui. *De la Soare*, scrie *Matei Parizianul*, *era depărtat de aproape un cot, de la ora a treia (mai corect a șasea) pînă la ora a noua emițînd din el o rază lungă*. Astfel era și cometa aceea foarte arzătoare, descrisă de *Aristotel* în Cartea I, Meteor 6 *al cărei cap în prima zi nu se vedea, din cauză că apusese înaintea Soarelui sau tocmai sub razele solare, dar în ziua următoare s-a văzut cît s-a putut. Căci a rămas o mică distanță în urma Soarelui, și imediat a apus. Din cauza strălucirii extraordinare (se înțelege a cozii) lumina dispersată a capului nu s-a văzut încă, dar în timpul următor (scrie Aristotel) cînd (coada) strălucea mai puțin, fața (capului) cometei a început a se vedea. Și strălucirea sa s-a extins pînă la a treia parte a cerului (adică, la 60°). A apărut însă în timpul iernii (an 4 al olimpiadei 101) și urcîndu-se pînă la cîngătoarea lui Orion acolo a dispărut*. Cometa anului 1618 care a ieșit din razele solare cu o coadă foarte mare, se părea că e egală cu stelele de prima mărime sau le întrece cu ceva, dar au apărut nu puține comete mai mari care au avut cozi mai scurte. Se spune că unele din ele erau egale cu Jupiter, altele cu Venus sau chiar cu Luna.

Am spus că cometele sînt un fel de planete ce se rotesc pe orbite foarte excentrice în jurul Soarelui. Și după cum dintre planetele fără coadă de obicei acelea sînt mai mici, care se învîrtesc pe orbite mai mici și mai apropiate de Soare, tot astfel pare a fi logic să admitem că și cometele, care în periheliile lor se apropie mai mult de Soare sînt în general mai mici, ca nu cumva prin atracția lor să acționeze prea mult Soarele. Las să se determine diametrii transversali ai orbitelor și timpurile periodice ale revoluțiilor, din compararea cometelor ce se întorc pe aceleași orbite după intervale lungi de timp. Între timp propoziția următoare poate da oarecare lumină în această cercetare.

PROPOZIȚIA XLII. PROBLEMA XXII

Să corectăm traiectoria aflată a cometei.

Operația 1. Să considerăm poziția planului traiectoriei, aflată prin propoziția de mai sus; și să alegem trei poziții de-ale cometei definite prin observații foarte precise, și depărtate cît se poate de mult una de alta; și fie *A* timpul dintre întâia și a doua, și *B* timpul dintre a doua și a treia. E convenabil însă ca într-unul din ele cometa să se afle în perigeu, sau cel puțin

nu departe de perigeu. Din aceste poziții aparente aflăm, prin operații geometrice, trei poziții adevărate în planul considerat al traiectoriei. Apoi prin acele poziții aflate, în jurul centrului Soarelui ca focar, prin operații aritmetice, efectuate conform propoziției XXI, Cartea I, să descriem o secțiune conică: și fie D și E ariile ei terminate prin razele duse de la Soare la pozițiile aflate; anume D aria dintre observația întâi și a doua, și E aria dintre a doua și a treia. Și fie T timpul întreg în care trebuie descrisă aria întreagă $D + E$ cu viteza cometei, potrivit propoziției XVI, Cartea I.

OPERAȚIA 2. Să mărim longitudinea nodurilor planului traiectoriei, adunînd la acea longitudine o mărime de $20'$ sau $30'$ pe care să o numim P : și să păstrăm înclinarea aceluia plan față de planul eclipticei. Apoi din cele trei poziții menționate ale cometei, să aflăm în acest nou plan trei poziții adevărate, ca mai sus; apoi și orbita trecînd prin acele poziții, și cele două arii descrise între observații, care fie d și e , precum și timpul întreg t , în car ar trebui descrisă aria întreagă $d + e$.

OPERAȚIA 3. Să menținem longitudinea nodurilor în prima operație, și să mărim înclinarea planului traiectoriei față de planul eclipticei, adunînd la acea înclinare o mărime de $20'$ sau $30'$, pe care să o numim Q . Apoi din observația celor trei poziții aparente menționate ale cometei să aflăm în acest nou plan cele trei adevărate, și orbita ce trece prin acele poziții, precum și cele două arii ale ei descrise între observații, care fie δ și ϵ , și timpul întreg τ , în care ar trebui descrisă aria întreagă $\delta + \epsilon$.

Fie acum C către 1 precum A către B , și G către 1 precum D către E , și g către 1 precum d către e , și γ către 1 precum δ către ϵ ; și fie S timpul adevărat între observația întâi și a treia; și observînd bine semnele $+$ și $-$ să aflăm numerele m și n , în așa fel, ca să avem $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$, și $2T - 2S$ egal cu $mT - mt + nT - n\tau$. Și dacă din prima operație, I reprezintă înclinarea planului traiectoriei față de planul eclipticei, și K longitudinea unuia din cele două noduri, $I + nQ$ va fi înclinarea adevărată a planului traiectoriei față de planul eclipticei și $K + mP$ longitudinea adevărată a nodului. Și în sfîrșit dacă în operația întâi, a doua și a treia, cantitățile R , r și ρ reprezintă parametrii traiectoriei, și cantitățile $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ respectiv laturile ei transversale aici: $R + mr - mR + n\rho - nR$ va fi parametrul adevărat, și $\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$ latura transversală a traiectoriei pe care o descrie cometa. Dar fiind dată latura transversă e dat și timpul periodic al planetei. Q.E.I.

De altfel timpurile periodice ale cometelor ce se învîrtesc, și laturile transverse ale orbitelor, nu se vor determina destul de exact decît prin comparația cometelor între ele, care apar în diverse timpuri. Dacă mai multe comete, după intervale egale de timp, se constată că au descris aceeași orbită, trebuie să conchidem că toate acestea sînt una și aceeași cometă, ce se rotește pe aceeași orbită. Și atunci în sfîrșit din timpurile revoluțiilor se vor da laturile transverse ale orbitelor și din aceste laturi se vor determina orbitele eliptice.

În acest scop, să calculăm deci traiectoriile mai multor comete, în ipoteza că ele sînt parabolice. Căci traiectoriile de acest fel totdeauna sînt aproximativ în concordanță cu fenomenele. Aceasta este evident, nu numai din traiectoria parabolică a cometei anului 1680, pe care am comparat-o mai sus

cu observațiile, ci și din aceea a cometei importante care a apărut în anii 1664 și 1665, și a fost observată de *Hevelius*. El a calculat din observațiile sale longitudinile și latitudinile acestei comete, dar mai puțin precis. Din aceleași observații, compatriotul nostru *Halley* a calculat din nou pozițiile acestei comete, și atunci în sfârșit, din pozițiile astfel aflate, a determinat traiectoria cometei. A aflat nodul ei ascendent în Υ $21^{\circ}13'55''$, înclinarea orbitei față de planul eclipticei $21^{\circ}18'40''$, distanța periheliului de la nod exprimată în orbită $49^{\circ}27'30''$. Periheliul în \odot $8^{\circ}40'30''$ cu latitudinea sudică heliocentrică de $16^{\circ}1'45''$. Cometa în periheliu la noiembrie $24^{\text{d}}11^{\text{h}}52^{\text{m}}$ p.m. în timpul egal al *Londrei*, sau $13^{\text{h}}8^{\text{m}}$ la *Danzig*, st.v., și parametrul parabolei 410 286, distanța mijlocie a Pământului la Soare fiind 100 000. Cu câtă precizie coincid pozițiile cometei calculate pe această orbită cu observațiile, se va vedea din tabloul calculat de *Halley* (p. 411).

În luna februarie, la începutul anului 1665, prima stea din Berbec, pe care în cele următoare o voi numi γ , era în Υ $28^{\circ}30'15''$ cu latitudinea nordică de $7^{\circ}8'58''$. A doua din Berbec era în Υ $29^{\circ}17'18''$ cu latitudinea nordică de $8^{\circ}28'16''$. Și o altă stea oarecare de mărimea a șaptea, pe care o voi numi *A*, era în Υ $28^{\circ}24'45''$ cu latitudinea nordică $8^{\circ}28'33''$. Cometa în februarie $7^{\text{d}}7^{\text{h}}30^{\text{m}}$ timpul de la *Paris* (adică februarie $7^{\text{d}}8^{\text{h}}37^{\text{m}}$ timpul de la *Danzig*) st. v. forma cu stelele γ și *A* un triunghi dreptunghi în γ . Și distanța cometei de la steaua γ era egală cu distanța stelelor γ și *A*, adică $1^{\circ}19'46''$ pe un cerc mare, și de aceea ea era de $1^{\circ}20'26''$ pe paralela latitudinii stelei γ . De aceea dacă din longitudinea stelei γ se scade longitudinea de $1^{\circ}20'26''$, va rămâne longitudinea cometei Υ $27^{\circ}9'49''$. *Auzout* din această observație a sa a situat cometa aproximativ în Υ $27^{\circ}0'$. Și din figura, prin care *Hooke* a schițat mișcarea ei, ea era atunci în Υ $26^{\circ}59'24''$. Luând media, am situat-o în Υ $27^{\circ}4'46''$. Din aceeași observație *Auzout* a fixat latitudinea cometei de 7° și $4'$ sau $5'$ nord. Mai corect ar fi trebuit să o fixeze la $7^{\circ}3'29''$, diferența latitudinii cometei și a stelei γ fiind egală cu diferența longitudinilor stelelor γ și *A*.

În februarie $22^{\text{d}}27^{\text{h}}30^{\text{m}}$, ora *Londrei*, adică februarie $22^{\text{d}}8^{\text{h}}46^{\text{m}}$ după *Danzig*, distanța cometei de la steaua *A*, după observația lui *Hooke* notată de el însuși pe figură, precum și după observațiile lui *Auzout* introduse în figură de *Petit*, era a cincea parte a distanței dintre steaua *A* și prima din Berbec, sau $15'57''$. Și distanța cometei de la linia ce unește steaua *A* și prima din Berbec era a patra parte a părții a cincea de mai sus, adică $4'$. Și deci cometa era în Υ $28^{\circ}29'46''$, cu latitudinea nordică de $8^{\circ}12'36''$.

În martie $1^{\text{d}}7^{\text{h}}0^{\text{m}}$ ora *Londrei*, adică martie $1^{\text{d}}8^{\text{h}}16^{\text{m}}$ ora *Danzigului*, cometa a fost observată aproape de-a doua stea din Berbec, distanța dintre ele fiind către distanța dintre prima și a doua din Berbec, adică $1^{\circ}33'$, precum 4 către 45 după *Hooke* sau precum 2 către 25 după *Gottignies*. De unde distanța cometei la a doua din Berbec era de $8'16''$, după *Hooke*, sau $8'5''$ după *Gottignies* sau în medie de $8'10''$. Dar după *Gottignies*, cometa trecuse pe lângă a doua din Berbec cu un spațiu de aproape a patra sau a cincea parte a drumului său efectuat într-o zi, adică cu aproape $1'35''$ (cu care e de acord *Auzout*) sau ceva mai mică anume cu $1'$ după *Hooke*. De aceea dacă la longitudinea primei stele a Berbecului se adună $1'$, și la latitudinea ei $8'10''$, vom avea longitudinea cometei Υ $29^{\circ}18'$, și latitudinea nordică de $8^{\circ}36'26''$.

Timpul aparent la Danzig	Distanțele observate ale cometei	Locurile observate	Locurile calculate pe orbită
decembrie d h m 3 18 29 $\frac{1}{2}$	de la Inima Leului 46 24 20 de la Spicul Fecioarei 22 52 10	Long. \approx 7 1 0 Lat. austr. 21 39 0	\approx 7 1 29 21 38 50
4 18 1 $\frac{1}{2}$	de la Inima Leului 46 2 45 de la Spicul Fecioarei 23 52 40	Long. \approx 16 15 0 Lat. austr. 22 24 0	\approx 6 16 5 22 24 0
7 17 48	de la Inima Leului 44 48 0 de la Spicul Fecioarei 27 56 40	Long. \approx 3 6 0 Lat. austr. 25 22 0	\approx 3 7 33 25 21 40
17 14 43	de la Inima Leului 53 15 15 de la Umărul drept al lui Orion 45 43 30	Long. Ω 2 56 0 Lat. austr. 49 25 0	Ω 2 56 0 49 25 0
19 9 25	de la Procyon 35 13 50 de la Steaua lucitoare din Făl- cile Balenei 52 56 0	Long. Π 28 40 30 Lat. austr. 45 48 0	Π 28 43 0 45 46 0
20 9 53 $\frac{1}{2}$	de la Umărul drept al lui Orion 40 49 0 de la steaua lucitoare din Făl- cile Balenei 40 4 0	Long. Π 13 3 0 Lat. austr. 23 41 0	Π 13 5 0 39 53 0
21 9 9 $\frac{1}{2}$	de la Umărul drept al lui Orion 26 21 25 de la steaua lucitoare din Făl- cile Balenei 29 28 0	Long. Π 2 16 0 Lat. austr. 33 41 0	Π 2 18 30 33 39 40
22 9 0	de la Umărul drept al lui Orion 29 47 0 de la steaua lucitoare din Făl- cile Balaurului 20 29 30	Long. Υ 24 24 0 Lat. austr. 27 45 0	Υ 24 27 0 27 46 0
26 7 58	de la steaua lucitoare a Berbecului 23 20 0 de la Aldebaran 26 44 0	Long. Υ 9 0 0 Lat. austr. 12 36 0	Υ 9 2 28 12 34 13
27 6 45	de la steaua lucitoare a Berbecului 20 45 0 de la Aldebaran 28 10 0	Long. Υ 7 5 40 Lat. austr. 10 23 0	Υ 7 8 45 10 23 13
28 7 39	de la steaua lucitoare a Berbecului 18 29 0 De la Galilicium 29 37 0	Long. Υ 5 24 45 Lat. austr. 8 22 50	Υ 5 27 52 8 23 37
31 6 45	de la Centura Andromedei 30 48 10 de la Palilicium 32 53 30	Long. Υ 2 7 40 Lat. austr. 4 13 0	Υ 2 8 20 4 16 25
ianuarie 1665 7 7 37 $\frac{1}{2}$	de la Centura Andromedei 25 11 0 de la Galilicium 37 12 25	Long. Υ 28 24 47 Lat. bor. 0 54 0	Υ 28 24 0 0 53 0
13 7 0	de la Capul Andromedei 28 7 10 de la Palilicium 38 55 20	Long. Υ 27 6 54 Lat. bor. 3 6 50	Υ 27 6 39 3 7 40
24 7 29	de la Centura Andromedei 20 32 15 de la Palilicium 40 5 0	Long. Υ 26 29 15 Lat. bor. 5 25 50	Υ 26 28 50 5 26 0
februarie 7 8 37		Long. Υ 27 4 46 lat. bor. 7 3 2	Υ 27 24 55 7 3 15
22 8 46		Long. Υ 28 29 46 lat. bor. 8 12 36	Υ 28 29 58 8 10 25
martie 1 8 16		Long. Υ 29 18 15 Lat. bor. 8 36 26	Υ 29 18 20 8 36 12
7 8 37		Long. Υ 0 2 48 Lat. bor. 8 56 30	Υ 0 2 42 8 56 56

În martie 7^d 7^h 30^m ora *Parisului* (adică martie 7^d 8^h 37^m ora *Danzigului*) după observațiile lui *Auzout* distanța cometei la a doua a Berbecului era egală cu distanța stelei a doua a Berbecului la steaua *A*, adică 52'29". Și diferența dintre longitudinea cometei și a stelei a doua a Berbecului era de 45' sau 46', sau în medie 45'30". Și deci cometa era în γ 0° 2'48". Din schema observațiilor lui *Auzout*, construită de *Petit*, *Hevelius* a dedus pentru latitudinea cometei 8° 54'. Dar gravorul a curbat drumul cometei spre sfârșitul mișcării ei în mod neregulat, și *Hevelius* în schema observațiilor lui *Auzout* construită de el a corectat curbura neregulată, și astfel a făcut ca latitudinea cometei să fie de 8° 55' 30". Și corectînd iregularitatea ceva mai mult, latitudinea poate deveni 8° 56', sau 8° 57'.

Această cometă s-a mai văzut la 9 martie, și atunci a trebuit situată în γ 0° 18', cu latitudinea boreală de circa 9° 3 $\frac{1}{2}$ '.

Această cometă s-a văzut timp de trei luni, și a descris aproape 6 semne, și a făcut într-o zi aproape 20 de grade. Cursul ei a deviat foarte mult de la un cerc mare, curbîndu-se spre nord; și mișcarea ei la sfârșit din retrogradă a devenit directă. Și cu toate că acest curs e atît de neobișnuit, teoria este de acord de la început pînă la sfârșit cu observațiile nu mai puțin precise, decît cum de obicei sînt de acord teoriile planetelor cu observațiile lor, după cum va arăta tabloul. Trebuie însă să scădem aproximativ două minute, cînd cometa a fost foarte rapidă; ceea ce se va efectua scăzînd 12 secunde din unghiul dintre nodul ascendent și periheliu sau formînd unghiul de 49°27'18". Paralaxa anuală a ambelor comete (atît a acesteia cît și a celei de mai sus) a fost importantă, și de aici se demonstrează mișcarea anuală a Pămîntului pe orbita mare.

Teoria se confirmă și prin mișcarea cometei, care a apărut în anul 1683. Aceasta a fost retrogradă pe o orbită, al cărei plan făcea un unghi aproape drept cu planul eclipticei. Nodul ascendent al acesteia (după calculul lui *Halley*) era în \mathbb{M} 23° 23'; înclinarea orbitei pe ecliptică 83° 11'; periheliul în \mathbb{I} 25° 29' 30"; distanța periheliului de la Soare 56 020, raza orbitei mari fiind de 100 000, și timpul periheliului în iulie 2^d 3^h 50'. Iar locurile cometei pe această orbită calculată de *Halley*, și comparate cu locurile observate de *Flemsted*, se află în tabloul următor:

1683 Timpul ecuatorial	Locul Soarelui	Longitudinea cometei calculate	Latitudi- nea N calculată	Longitudinea cometei observate	Latitudinea cometei observate	Diferența	
						Longitu- dinea	Latitu- dinea
d h m	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	' "	' "
iulie 13 12 55	Ω 1 2 30	Ω 13 5 42	29 28 13	Ω 13 6 42	29 28 20	+ 1 0	+ 0 7
15 11 15	2 53 12	11 37 48	29 34 0	11 39 43	29 34 50	+ 1 55	+ 0 50
17 10 20	4 45 45	10 7 6	29 33 30	10 8 40	29 34 0	+ 1 34	+ 0 13
23 13 40	10 38 21	5 10 27	28 51 42	5 11 30	28 50 28	+ 1 3	- 1 14
25 14 5	12 35 28	3 27 53	24 24 47	3 27 0	28 23 40	- 0 53	- 1 7
31 9 42	18 9 22	\mathbb{I} 27 55 3	26 22 52	\mathbb{I} 27 54 24	26 22 25	- 0 39	- 0 27
31 14 55	18 21 53	27 41 7	26 15 57	27 41 8	26 14 50	+ 0 1	- 2 7
august 2 14 56	20 17 16	25 29 32	25 16 19	25 28 46	25 17 28	- 0 46	+ 1 9
4 10 49	22 2 50	23 18 20	24 10 49	23 16 55	24 12 19	- 1 25	+ 1 30
6 10 9	23 56 45	20 42 23	22 47 5	20 40 32	22 49 5	- 1 51	+ 2 0

1693 Timpul ecuatorial	Locul Soarelui	Longitudinea cometei calculate	Latitudi- nea N calculată	Longitudinea cometei observate	Latitudinea cometei observate	Diferența	
						Longitu- dinea	Latitu- dinea
9 10 26	26 50 52	16 7 57	20 6 37	16 5 55	20 6 10	- 2 2	- 0 27
15 14 1	♍ 2 47 13	3 30 48	11 37 33	3 26 18	11 32 1	- 4 30	- 5 32
16 15 10	3 48 2	0 43 7	9 34 16	0 41 55	9 34 13	- 1 12	- 0 3
18 15 44	5 45 33	♋ 24 52 53	5 11 15	♋ 24 49 5	5 9 11	- 3 48	- 2 4
			Austr.		Austr.		
22 14 44	9 35 49	11 7 14	5 16 53	11 7 12	5 16 50	- 0 2	- 0 3
23 15 52	10 36 48	7 2 18	8 17 9	7 1 17	8 16 41	- 1 1	- 0 28
26 16 2	13 31 10	♌ 24 45 31	16 38 0	♌ 24 44 0	16 38 20	- 1 31	+ 0 20

Teoria se mai confirmă și prin mișcarea cometei retrograde, care a apărut în anul 1682. Nodul ascendent al acesteia (calculat de Halley) era în γ $21^{\circ} 16' 30''$. Înclinarea orbitei față de planul eclipticei $17^{\circ} 56' 0''$. Periheliul în $\approx 2^{\circ} 52' 50''$. Distanța periheliului la Soare 58 328, raza orbitei mari fiind 100 000. Și timpul egal al periheliului în septembrie $4^d 7^h 39^m$. Iar locurile calculate din observațiile lui Flamsteed, și comparate cu locurile calculate prin teorie, se află în tabloul următor:

1682 Timpul aparent	Locul Soarelui	Longitudinea calculată a cometei	Latitudinea calculată a cometei	Longitudinea cometei observate	Latitudinea N observată	Diferența	
						Longi- tudinii	Latitu- dinii
d h m	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	' "	' "
august 19 15 38	♍ 7 0 7	♌ 18 14 28	25 50 7	♌ 18 14 40	25 49 55	- 0 12	+ 0 12
20 15 38	7 55 52	24 46 23	26 14 42	24 46 22	26 12 52	+ 0 1	+ 1 50
21 8 21	8 36 14	29 37 15	26 20 3	29 38 2	26 17 37	- 0 47	+ 2 26
22 8 8	9 33 55	♍ 6 29 53	26 8 42	♍ 6 30 3	26 7 12	- 0 10	+ 1 30
29 8 20	16 22 40	♌ 12 37 54	18 37 47	♌ 12 37 49	18 34 5	+ 0 5	+ 3 42
30 7 45	17 19 41	15 36 1	17 26 43	15 35 18	17 27 17	+ 0 43	- 0 34
sep- 1 7 33	19 16 9	20 30 53	15 13 0	20 27 4	15 9 49	+ 3 49	+ 3 11
tembrie 4 7 22	22 11 28	25 42 0	12 23 48	25 40 58	12 22 0	+ 1 2	+ 1 48
5 7 32	23 10 29	27 0 46	11 33 8	26 59 24	11 33 51	+ 1 22	- 0 43
8 7 16	26 5 58	29 58 44	9 26 46	29 58 45	9 26 43	- 0 1	+ 0 3
9 7 26	27 5 9	♍ 0 44 10	8 49 10	♍ 0 44 4	8 48 25	+ 0 6	+ 0 45

Teoria se confirmă și prin mișcarea retrogradă a cometei, care a apărut în anul 1723. Nodul ascendent al acesteia (după calculele d-lui Bradley, profesor Savilian de astronomie la Oxford) era în γ $14^{\circ} 16'$. Înclinarea orbitei față de planul eclipticei $49^{\circ} 59'$. Periheliul în γ $12^{\circ} 15' 20''$. Distanța periheliului la Soare 998 651, raza orbitei mari fiind 1 000 000, și timpul egal al periheliului din septembrie $16^d 16^h 10^m$. Iar pozițiile cometei pe această orbită calculată de Bradley, și comparate cu pozițiile observate de el însuși și unchiul său Pound, și de Halley se află în tabloul următor.

Din aceste exemple e destul de evident, că mișcările cometelor sînt descrise prin teoria expusă de noi nu mai puțin precis, decît de obicei mișcările

1723 Timp ecuatorial	Longitudinea cometei observate	Latitudinea N observată	Longitudinea cometei calculate	Latitudinea N calculată	Diferența	
					Longitu- dinii	Latitu- dinii
d h m	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	"	"
octombrie 9 8 5	≈ 7 22 15	5 2 0	≈ 7 21 26	5 2 47	+ 49	- 47
10 6 21	6 41 12	7 44 13	6 41 42	7 43 18	- 50	+ 55
12 7 22	5 39 58	11 55 0	5 40 19	11 54 55	- 21	+ 5
14 8 57	4 59 49	14 43 50	5 0 37	14 44 1	- 48	- 11
15 6 35	4 47 41	15 40 51	4 47 45	15 40 55	- 4	- 4
21 6 22	4 2 32	19 41 49	4 2 21	19 42 3	+ 11	- 14
22 6 24	3 59 2	20 8 12	3 59 10	20 8 17	- 8	- 5
24 8 2	3 55 29	20 55 18	3 55 11	20 55 9	+ 18	+ 9
29 8 56	3 56 17	22 20 27	3 56 42	22 20 10	- 25	+ 17
30 6 20	3 58 9	22 32 28	3 58 17	22 32 12	- 8	+ 16
noiembrie 5 5 53	4 16 30	23 38 33	4 16 23	23 38 7	+ 7	+ 26
8 7 6	4 29 36	24 4 30	4 29 54	24 4 40	- 18	- 10
14 6 20	5 2 16	24 48 46	5 2 51	24 48 16	- 35	+ 30
20 7 45	5 42 20	25 24 45	5 43 13	25 25 17	- 53	- 32
decembrie 7 6 45	8 4 13	26 54 18	8 3 55	26 53 42	+ 18	+ 36

planetelor prin teoriile lor. Și de aceea orbitele cometelor se pot calcula prin această teorie și în sfârșit se poate ști timpul periodic al cometei ce se învîrtește pe o orbită oarecare, și atunci în sfârșit se vor cunoaște laturile transverse ale orbitelor eliptice și înălțimile afeliilor.

Cometa retrogradă, care a apărut în anul 1607, a descris o orbită, al cărei nod ascendent (după calculul lui Halley) era în \cap $20^{\circ} 21'$; înclinația planului orbitei față de planul eclipticei era de $17^{\circ} 2'$; periheliul era în $\approx 2^{\circ} 16'$; și distanța periheliului la Soare era 58680, raza orbitei mari fiind 100000. Și cometa era în periheliu în octombrie $16^d 3^h 50^m$. Această orbită aproximativ a coincis cu orbita cometei, care a apărut în anul 1682. Dacă cele două comete ar fi una și aceeași, această cometă își va face revoluția în timp de 75 ani,

și axa mare a orbitei va fi către axa mare a orbitei mari, precum $\sqrt[3]{75^2}$ către 1, sau aproximativ 1778 către 100. Și distanța afeliului acestei comete la Soare va fi către distanța medie a Pământului la Soare, aproximativ precum 35 către 1. Acestea fiind cunoscute nu va fi greu să determinăm orbita eliptică a acestei comete. Dar acestea toate vor fi astfel dacă cometa, după un timp de șaptezeci și cinci de ani, se va întoarce pe aceeași orbită. Se pare că celelalte comete se învîrtesc într-un timp mai îndelungat și se urcă mai sus.

De altfel cometele, din cauza numărului lor mare, și marea distanță a afeliilor la Soare, și lunga întârziere în afeliu, din cauza gravitațiilor lor reciproce, trebuie să se perturbe întrucîtva, și excentricitățile și timpurile lor de revoluție cînd se măresc întrucîtva, cînd se micșorează. De aceea nu trebuie să ne așteptăm ca aceeași cometă să se întoarcă precis pe aceeași orbită, și în aceleași timpuri periodice. E deajuns dacă nu intervin schimbări mai mari, decît acelea care provin din cauzele amintite.

Și de aici se explică, pentru ce cometele nu se cuprind în zodiac la fel cu planetele, și se îndepărtează de acolo și sînt purtate cu mișcări variate

în toate regiunile cerului. Anume cu scopul, ca în afeliile lor, unde se mișcă foarte încet, să fie cât mai îndepărtate una de alta, și să se atragă cât mai puțin una spre alta. Din această cauză cometele, care se coboară mai jos, și deci se mișcă foarte încet în afelii, trebuie să se urce mai sus.

Cometa care a apărut în anul 1680, era mai puțin depărtată de Soare în periheliul său decît cu a șasea parte a diametrului Soarelui; și din cauza vitezei foarte mari în acea regiune și a densității oarecare a atmosferei Soarelui, a trebuit să sufere oarecare rezistență, și oarecare întîrziere, și să se apropie mai mult de Soare: și la fiecare revoluție apropiindu-se de Soare, va cădea în sfîrșit pe corpul Soarelui. Dar și în afeliu unde se mișcă foarte încet, uneori poate fi întîrziată prin atracția altor comete, și apoi să cadă în Soare. Dar și stelele fixe, care cu încetul dispar în lumină și vaporii, se pot reface prin cometele ce cad în ele, și aprinse prin noua alimentație pot fi considerate ca stele noi. De acest gen sînt stelele fixe, care apar subit, și la început strălucesc foarte intens, apoi cu încetul dispar. Astfel a fost steaua din Scaunul *Cassiopeei* pe care a văzut-o Corneliu Gemma la opt noiembrie 1572 luminînd acea parte a cerului pe o noapte perfect senină; dar în noaptea următoare (noiembrie 9) a văzut-o mai strălucitoare decît toate stelele fixe, și abia rămînînd în urmă lui Venus cu lumina sa. Pe aceasta a văzut-o Tycho Brahe la unsprezece a aceleiași luni, cînd strălucea mai tare; și din acel timp a observat-o descrescînd cu încetul și dispărînd în timp de 16 luni. În luna lui noiembrie, cînd a apărut mai întîi, egala cu lumina sa pe Venus. În luna decembrie se vedea puțin micșorată egalînd pe Jupiter. În anul 1573, luna ianuarie era mai mică decît Jupiter și mai mare decît Sirius, cu care la sfîrșitul lui februarie și începutul lui martie a devenit egală. În luna aprilie și mai se vedea egală cu stelele de mărimea a doua, în iunie, iulie și august cu stelele de mărimea a treia, în septembrie, octombrie și noiembrie cu stelele de-a patra, în decembrie și în anul 1574, în luna ianuarie cu stelele de-a cincea, și în luna februarie, cu stelele de mărimea a șasea, și în luna martie a dispărut din ochi. Culoarea ei la început era clară alburie și strălucitoare, apoi gălbuie, și în luna martie a anului 1573, roșiatică la fel cu Marte sau steaua Aldebaran; în mai însă a luat o culoare alburie-albăstruie, pe care o observăm în Saturn, culoare pe care a păstrat-o pînă la sfîrșit, devenind totuși tot mai obscură. Astfel a fost și steaua din Piciorul drept al Șarpelui, pe care discipolii lui Kepler au observat-o că a început a se vedea în 30 septembrie st.v. a anului 1604, și prin lumina sa întrecea steaua Jupiter, deși în noaptea precedentă abia se observase. Dar din acel timp cu încetul a descrescut și în timp de 15 sau 16 luni a dispărut din ochi. Se spune că de o astfel de stea nouă neobișnuit de strălucitoare a fost îndemnat Hipparchus să observe stelele și să le treacă într-un catalog. Dar stelele fixe, care apar și dispar alternativ, și care cresc cu încetul, și prin lumina lor abia întrec vreodată stelele fixe de-a treia mărime, par a fi de alt gen, și învîrtindu-se se arată alternativ partea luminoasă și pe cea întunecată. Vaporii însă, care provin din Soare și din stelele fixe și din cozile cometelor, pot cădea din cauza gravității lor în atmosferele planetelor, și acolo să se condenseze și să se transforme în apă și în esențe umede, și apoi prin căldură lentă să se prefacă cu încetul în săruri și sulfuri, și tincturi, și nămol, și lut, și argilă, și nisip, și pietre, și corale, și alte substanțe terestre.

SCOLIE GENERALĂ

Ipoteza vârtejurilor întâmpină multe dificultăți. Pentru ca fiecare planetă cu o rază dusă la Soare să descrie arii proporționale cu timpul, timpurile periodice ale părților vârtejurii ar trebui să fie precum pătratele distanțelor la Soare. Pentru ca timpurile periodice ale planetelor să fie în raportul puterii $\frac{3}{2}$ a distanțelor la Soare, timpurile periodice ale părților vârtejurii ar trebui să fie în proporția puterii $\frac{3}{2}$ a distanțelor. Pentru ca vârtejurile mai mici din jurul lui Saturn, Jupiter și alte planete să-și păstreze rotațiile și să înoate liniștit în vârtejul Soarelui, timpurile periodice ale părților vârtejurii solar ar trebui să fie egale. Revoluțiile Soarelui și ale planetelor în jurul axelor lor, care ar trebui să fie în concordanță cu mișcările vârtejurilor se abat de la toate aceste proporții. Mișcările cometelor sînt foarte regulate, și observă aceleași legi cu mișcările planetelor, și nu pot fi explicate prin vârtejuri. Cometele sînt purtate prin mișcări foarte excentrice în toate părțile cerurilor ceea ce nu poate avea loc decît dacă eliminăm toate vârtejurile.

Proiectilele, în aerul nostru, suferă numai rezistența aerului. Îndepărtînd aerul, după cum se întîmplă în vidul lui Boyle, rezistența încetează, astfel că un fulg ușor și aurul solid cad cu aceeași viteză în acest vid. Și același este cazul spațiilor cerești, care sînt deasupra atmosferei terestre. În aceste spații, toate corpurile trebuie să se miște foarte liber; și de aceea planetele și cometele se învîrtesc neconținut pe orbite de gen și poziție date după legile expuse mai sus. Ce e drept, vor persevera pe orbitele lor prin legile gravitației, dar poziția primitivă regulată a orbitelor nu ar fi putut-o cîștiga prin aceste legi.

Cele șase planete principale se învîrtesc în jurul Soarelui pe cercuri concentrice cu Soarele, în aceeași direcție a mișcării, aproximativ în același plan. Zece Luni se învîrtesc în jurul Pămîntului, al lui Jupiter și al lui Saturn în cercuri concentrice, în aceeași direcție a mișcării, aproximativ în planele orbitelor planetare. Și toate aceste mișcări regulate nu-și au origina în cauze mecanice; deoarece cometele sînt duse liber pe orbite foarte excentrice, și în toate părțile cerurilor. Prin acest fel de mișcare cometele trec foarte repede și foarte ușor prin orbitele planetelor și în afeliile lor unde sînt mai încete și întîrzie timp îndelungat; sînt cît se poate de îndepărtate una de alta, pentru a se atrage reciproc cît mai puțin. Acest sistem foarte elegant

al Soarelui, planetelor și cometelor nu a putut să se nască decît din mintea și puterea unei ființe inteligente și puternice. Și dacă stelele fixe sînt construite de o minte asemănătoare vor fi supuse stăpînirii *Unuia*: îndeosebi fiindcă lumina stelelor fixe este de aceeași natură cu lumina Soarelui, și toate sistemele își trimit lumină reciproc. Și ca nu cumva sistemele stelelor fixe să cadă din cauza greutății lor unele în altele, el le-a așezat pe acestea la o distanță imensă unele de altele.

Acestea toate le guvernează nu ca sufletul lumii, ci ca Domnul universului.

Și din cauza stăpînirii sale de obicei se numește Domnul
a) Adică împărat universal. Dumnezeu a) Παντοκράτωρ.

Căci Dumnezeu este un cuvînt relativ și se referă la servitori: și Dumnezeirea este stăpînirea lui Dumnezeu, nu asupra corpului propriu, după cum înțeleg aceia pentru care Dumnezeu este sufletul lumii, ci asupra servitorilor. Dumnezeu suprem este o ființă eternă, infinită, absolut perfectă: dar o ființă oricît de perfectă fără stăpînire nu e Dumnezeu. Căci zicem Dumnezeul meu, Dumnezeul vostru, Dumnezeul lui Israel, Zeul Zeilor, și Domnul Domnilor; dar nu zicem eternul meu, eternul vostru, eternul lui Israel, eternul Zeilor: nu zicem infinitul meu sau perfectul meu. Aceste apostrofări nu se referă la servitori.

Cuvîntul Dumnezeu uneori b) însemnează domn: dar nu orice domn este dumnezeu. Dominația unei ființe spirituale constituie un Dumnezeu, una adevărată, unul adevărat, una supremă, unul suprem, una fictivă, unul fictiv. Și din stăpînirea adevărată urmează că un Dumnezeu adevărat este viu, inteligent și puternic; și din celelalte perfecțiuni este supremul sau cel mai perfect. Este etern și infinit, atotputernic și atotștiutor, adică durează, din etern în etern, este prezent din infinit în infinit, toate le guvernează; și toate le cunoaște, care sînt sau pot fi. Nu este eternitate și infinitate, ci etern și infinit: că nu este durată și spațiu, ci durează și e de față. Durează totdeauna și e de față pretutindenea, și existînd totdeauna și peste tot locul con-

stituie durată și spațiul. Cum fiecare particulă a spațiului este *totdeauna*, și fiecare moment indivizibil al duratei *pretutindenea*, desigur că creatorul și domnul tuturor lucrurilor nu va fi *niciodată nicăieri*. Orice suflet ce simte în diverse timpuri, și în diverse organe ale simțurilor și mișcărilor, este aceeași persoană indivizibilă. Există părți succesive în durată, coexistente în spațiu, dar nici de un fel în persoana omului sau în principiul lui cugetător: și cu atît mai puțin în substanța cugetătoare a lui Dumnezeu. Orice om, întrucît este un lucru ce simte, e unul și același om în timpul vieții sale în toate și în fiecare organ al simțurilor. Dumnezeu este unul și același Dumnezeu totdeauna și pretutindenea. Este omniprezent nu numai *virtual*, ci și substan-

c) Așa credeau cei vechi, ca Pitagora și Cicero: De natura deorum, Cartea I. Thales, Anaxagoras, Vergilius, Georgice, Cartea IV, v. 220

țial: căci virtutea nu poate exista fără substanță. În ea c) sînt cuprinse și se mișcă toate, dar fără afecțiune reciprocă. Dumnezeu nu suferă nimic prin mișcările corpurilor; ele nu suferă nici o rezistență din omniprezența lui Dumnezeu. E clar că supremul Dumnezeu există

și Eneida, Cartea VI, v. 721, *Philo*, Allegor: Cartea I la început. *Aratus* în Phaenon la început. Astfel și scriitorii bisericești ca *Paul* în Act. XVII, 27, 28, *Ioan* în Evang. XIV, 2, *Moise* în Deut. IV 39 și X, 14, *David* Psal. CXXXIX, 7, 8, 9, *Solomon* I, Reg. VIII, 27. Iov. XXII, 12, 13, 14, *Eremie* XXIII, 23, 24. Idolatrii credeau însă că Soarele, Luna și stelele, sufletelor oamenilor și alte părți ale lumii sînt părți ale supremului Dumnezeu și deci trebuie venerate dar în mod greșit.

în mod necesar: Și din aceeași necesitate este *totdeauna* și *pretutindenea*. De unde de asemenea totul este asemenea lui, întreg ochiul, întreaga ureche, întreg creierul, întreg brațul, toată puterea de simțire, înțelegere și acțiune, dar într-un fel mai puțin omenesc, într-un fel mai puțin truesc, într-un fel cu totul necunoscut nouă. După cum un orb nu are ideea culorilor, astfel noi nu avem idee de felurile, în care preînțeleptul Dumnezeu simte și înțelege toate. E cu totul lipsit de orice corp și figură truescă, și deci nu poate fi văzut, nici auzit, nici atins, și nici nu trebuie să-l adorăm sub nici o formă truescă. Avem idei despre atributele sale, dar nu cunoaștem de loc care e substanța unui lucru oarecare. Vedem numai figurile și culorile corpurilor, auzim numai sunetele, atingem numai suprafețele externe, mirosim numai mirosurile, și gustăm gusturile; substan-

țele intime nu le cunoaștem prin nici un simț, prin nici o acțiune reflexă; și cu mult mai puțin avem idee despre substanța lui Dumnezeu. Pe el îl cunoaștem numai prin proprietățile și atributele lui, și prin structurile foarte înțelepte și foarte bune ale lucrurilor și prin cauzele finale, și le admirăm din cauza perfecțiunilor; îl venerăm însă și ne închinăm lui din cauza stăpînirii. Căci îl adorăm ca servitori; și Dumnezeu fără stăpînire, providență și cauză finală nu este altceva decît fatalitate și natură. Din oarba necesitate metafizică, care totdeauna și pretutindenea e aceeași, nu se naște nici o variație a lucrurilor. Toată diversitatea tuturor lucrurilor zidite în locuri și timpuri, s-a putut produce numai din ideile și prin voința unei ființe ce există în mod necesar. Dar se spune în mod alegoric că Dumnezeu vede, aude, vorbește, rîde, iubește, dorește, dă, primește, se bucură, se supără, se luptă, fabrică, zidește, construiește. Căci tot ce se spune despre Dumnezeu se ia de la lucrurile omenești printr-o asemănare oarecare, ce e drept nu perfectă; dar totuși cu oarecare asemănare. Și acestea despre Dumnezeu, despre care a vorbi din fenomene, aparține filozofiei naturale.

Pînă acum am expus fenomenele cerurilor și ale mării noastre prin forța gravitației, dar încă nu am dat cauza gravitației. Această forță se naște dintr-o cauză oarecare, ce pătrunde pînă în centrul Soarelui și al planetelor, fără micșorarea puterii; și care acționează nu după mărimea *suprafețelor* particulelor asupra cărora acționează (după cum obișnuiesc cauzele mecanice), ci după cantitatea materiei *solide*: și a cărei acțiune se extinde în toate părțile la distanțe imense, descrescînd totdeauna în raportul pătratului distanțelor. Gravitatea spre Soare se compune din gravitațiile spre diversele particule ale Soarelui, și cu depărtarea de la Soare descresște precis în raportul pătratului distanțelor pînă la orbita lui Saturn, după cum e evident din repausul afeliilor planetelor, și pînă la ultimele afelii ale cometelor, dacă acele afelii sînt în repaus. Dar pînă acum nu am putut încă afla cauza acestor proprietăți ale gravitației și nu imaginez ipoteze. Căci orice nu se deduce din fenomene, trebuie numit *ipoteză*; și ipotezele fie metafizice, sau fizice, sau ale calităților oculte, sau mecanice, în *filozofia experimentală*, nu au loc. În această filozofie propozițiile se deduc din fenomene, și devin generale prin inducție. Astfel s-au cunoscut impenetrabilitatea, mobilitatea și impulsurile

corpurilor și legile mișcărilor și ale gravitației. Și e de ajuns ca gravitatea să existe în realitate, și să acționeze după legile expuse de noi, și e suficient pentru toate mișcărilor corpurilor cerești și ale mării noastre.

Ar fi locul să adaug cîte ceva despre spiritul subtil ce pătrunde prin corpurile grosolane, și se ascunde în ele; prin forța și acțiunile căreia particulele corpurilor se atrag reciproc la distanțe minime, și dacă se ating devin coerente; și corpurile electrice acționează la distanțe mai mari, atît respingînd cît și atrăgînd corpurile vecine; și lumina este emisă, se reflectă, se refractă, se difractă, și încălzește corpurile; și orice senzație se excită, și membrele animalelor se mișcă după voie, anume prin vibrațiile acestui spirit propagate prin firișoarele solide ale nervilor de la organele externe ale simțurilor la creier și de la creier în mușchi. Dar acestea nu se pot expune în puține cuvinte; și nici nu avem material experimental suficient, prin care trebuie determinate precis și arătate legile acțiunilor acestui spirit.

ISAAC NEWTON

Secolul al XVII-lea, care l-a dat pe *Newton*, reprezintă o epocă de înflorire a științelor cum nu a cunoscut înainte decât elenismul antic, iar după aceea veacul nostru. Transformările sociale și economice, descoperirile geografice, războiul etc. au pretins de la știință o cunoaștere mai adâncă a proprietăților corpurilor și a fenomenelor naturii. Dintre diversele ramuri de cunoștințe, acelea care erau în legătură mai strînsă cu necesitățile imediate ale industriei, agriculturii, perfecționării navigației, armelor de foc etc. — cum sînt mecanica, optica, matematica și astronomia — s-au dezvoltat în măsură cu mult mai mare decât electricitatea, magnetismul, științele naturale, a căror utilitate pe atunci nu era înțeleasă și care abia se nășteau. Este ușor de înțeles în acest fel că rezultatele cele mai uimitoare le-a obținut *Newton* tocmai în matematică, optică, mecanică și astronomie.

Matematica veacului al XVII-lea se poate mîndri cu invenția logaritmilor de către *Neper* și *Briggs* și cu geometria analitică a lui *Descartes*. Cea mai importantă realizare este însă calculul infinitezimal la care au contribuit în măsură egală *Newton* și *Leibniz*.

Optica acestui secol a cunoscut invenția lunetei și microscopului, a descoperit interferența, difracția și polarizarea luminii, viteza ei de propagare și legile refracției. Dar și aici *Newton* are o contribuție de primul rang: explicarea dispersiei luminii și stabilirea unei teorii a luminii, care avea să mențină supremația timp de mai bine de un secol față de teoria ondulatorie elaborată în același timp de către *Huygens*.

Mecanica lui *Galileu* și *Descartes* ne-au dat primele două legi fundamentale ale dinamicii, dar cel care a stabilit legea a treia și enunțînd precis cele trei legi a pus bazele dinamicii moderne a fost tot *Newton*.

În astronomie, lupta lui *Galileu* pentru triumful concepției lui *Copernic* a distrus vechea imagine a lui *Ptolemeu* despre lume, dar nici minunatele sale descoperiri astronomice, nici teoria vîrtejurilor lui *Descartes*, nici legile lui *Kepler* nu ne-au putut explica funcționarea mașinii universului. Prin descoperirea atracției universale, *Newton* a dat nu numai o lege simplă care să explice mișcarea corpurilor cerești, ci și o concepție mecanică a universului, care a stăpînit gîndirea oamenilor de știință pînă la începutul veacului al XX-lea.



Isaac Newton s-a născut la 5 ianuarie st. n. 1643 în localitatea Woolsthorpe, situată la cîțiva kilometri spre sud de orașelul Grantham (Lincolnshire, Anglia). Tatăl său, numit de asemenea Isaac, era un om « slab, extravagant și aprins », și mama sa Ana Ayscough o femeie harnică și econoamă, aveau acolo o mică moșioară. Tatăl a murit la etatea de 30 de ani, înainte de nașterea fiului său. În curînd mama lui *Newton* se mărită cu un preot din satul vecin, lăsînd pe micul Isaac în grija buniicii sale, care-l creșcu pînă la etatea de 15 ani.

Newton era un copil de constituție slabă și timid din fire. În loc să se joace cu copiii de etatea sa, el își fabrică singur jucăriile, în care începu să se manifeste geniul său inventiv. O moară mînată de un șoarece, un zmeu cu lanternă pentru a speria seara pe țărani, un cadran solar, un orologiu de lemn etc. indicau deja pe viitorul experimentator.

Asupra firii sensibile a lui Newton au lăsat urme adînci evenimentele politice desfășurate în Anglia în perioada copilăriei sale. Anglia trecea în acea epocă prin mari frămîntări interne. În anul nașterii lui Newton războiul civil era în plină desfășurare. Lupta dintre parlamentul care reprezenta interesele burgheziei în expansiune, și regele sprijinit de cler și nobilimea înaltă duse la decapitarea lui Carol I în 1649, cînd Newton abia împlinise 6 ani. Energia lui Cromwell readuse ordinea în interior și restabili prestigiul extern al Angliei, dar el muri în 1658. Fiul său nu fu în stare să continue opera marelui bărbat de stat, astfel că în 1660 avu loc restaurația, urcîndu-se pe tron Carol al II-lea.

La etatea de 12 ani Newton fu trimis la școala din Grantham, unde intră în gazdă la apotecarul Clark. Programul școlii din Grantham nu era atît de încărcat încît să nu rămînă elevilor timp și pentru distracții. Newton își petrecea timpul liber în farmacia gazdei sale unde căpătă gust pentru chimie, pe care o cultivă toată viața cu mult entuziasm. Cărțile vechi ce se găseau în biblioteca farmacistului îi serviră la lărgirea orizontului științific.

În 1656 muri soțul al doilea al mamei lui Newton, Barnabath Smith, astfel că ea se întoarse la moșia dela Woolsthorpe. Simțind în curînd lipsa unui bărbat care să conducă gospodăria, reținu de la școală pe Isaac. Nu peste mult însă constată că acesta nu avea nici o atracție pentru cultivarea pămîntului. În loc să vadă de treburile gospodăriei, copilul se ocupa de probleme mecanice. Astfel în septembrie 1658, pe timpul unei furtuni groaznice, pe Isaac nu-l interesau pagubele pe care aceasta le pricinuia edificiilor, ci se puse să măsoare forța vîntului. La insistențele unchiului său după mamă W. Ayscough, fu decis ca Newton să fie trimis înapoi la școală la Grantham, unde rămase pînă în 1661. În această epocă se pare că Newton simți o afecțiune deosebită pentru Miss Storey, fiica apotecarului Clark. Idila s-a întrerupt prin plecarea lui Newton din Grantham, dar relațiile dintre ei au rămas cordiale toată viața.

Terminînd studiile la Grantham cu rezultate splendide, Newton fu admis în iunie 1661 la Trinity College din Cambridge. Acest colegiu avea să-l adăpostească pe Newton, ca elev, și apoi ca profesor, timp de 35 de ani, și aici avea el să facă cele mai mari descoperiri și să publice lucrările care l-au făcut nemuritor și au ridicat prestigiul Universității din Cambridge.

În acel timp, ca și azi, învățămîntul superior din Anglia se rezema pe colegii, în care profesorii și studenții duceau o viață comună, locuind și studiind în interiorul instituției, aproape izolați de lumea dinafară. Studenții trebuiau să plătească o anumită taxă de întreținere și de studii; Newton însă nu dispunea de suma necesară, de aceea a fost primit cu condiția să facă anumite servicii.

În momentul intrării sale în colegiu, Newton cunoștea foarte puțin matematicile; nu citise decît *Logica* lui Sanders ce se predă ca un fel de introducere în matematici. Cît de străin era atunci de matematici rezultă din propria lui mărturisire că vizitînd ca student în anul întîi tîrgul din octombrie și găsind o carte de astrologie, constată că nu o înțelege din cauza lipsei de cunoștințe de geometrie și trigonometrie. Cumpără deci *Elementele* lui Euclid, care însă i se părură atît de ușoare încît le dădu puțină atenție.

Învățămîntul matematicilor la Trinity College în primii doi ani de studenție a lui Newton era la un nivel foarte puțin ridicat; în acești ani nu se predau decît matematicile elementare. De aceea împins de dorința de a se instrui el nu se mărgini la cursuri, ci citea tot ce-i cădea în mînă, la început fără alegere, pe încetul însă se dedică cu totul matematicii. Consultă cu predilecție pe marii matematicieni greci și contemporani. Se spune că mai tîrziu cînd a ajuns la renume, s-ar fi exprimat astfel: « Dacă am putut vedea ceva mai departe decît alții, aceasta

se datorește faptului că m-am ridicat pe umeri de giganti ». Se pare că cea dintâi carte cu conținut matematic pe care a citit-o la Cambridge a fost *Optica* lui K e p l e r. Urmă apoi *Clavis mathematica* a lui O u g t h r e d și mai ales *Geometria* lui D e s c a r t e s, înțelegerea căreia îi cauză unele dificultăți. Îl interesează apoi operele lui V i é t e, ale lui V a n S c h o o t e n și în special *Arithmetica infinitorum* a lui W a l l i s, profesor la Oxford. În felul acesta cunoștințele sale de matematici sporiră considerabil, fără însă a avea o direcție bine precizată. Cel care avea să-i îndrumeze pașii în cercetările matematice era I s a a c B a r r o w.

I s a a c B a r r o w (1630—1677) a fost nu numai un mare matematician, ci și un excelent profesor. În 1663 B a r r o w fu numit profesor la catedra de matematici a Universității din Cambridge, unde avu norocul să-l aibă ca elev pe N e w t o n. Această întâlnire a fost fericită pentru dezvoltarea matematicilor și decisivă pentru geniul matematic al lui N e w t o n.



Teoria binomului și calculul infinezimal. B a r r o w avea obiceiul ca la cursul de geometrie și de optică să expună și cercetările sale originale. Acestea au apărut în 1669 sub titlul *Lectiones Opticae et Geometricae* și înainte de tipărire au fost revăzute de N e w t o n. În aceste lecții B a r r o w sugerează o metodă nouă de a determina ariile și a trasa tangenta la o curbă, probleme care sînt stîns legate de calculul infinezimal. În partea de optică B a r r o w se ocupă de formarea imaginilor în oglinzi și lentile și explică în mod simplu dispersia luminii în curcubeu. Influența considerabilă a acestor lecții asupra lui N e w t o n se relevă prin aceea că atît în calculul infinezimal cît și în optică el a ajuns la rezultate de importanță fundamentală.

În ianuarie 1665 N e w t o n obținu titlul de bacalaureat în arte, fără ca geniul său creator să se fi manifestat sub o formă oarecare în exterior. Aceasta se explică atît prin firea închisă a lui N e w t o n, care nu exterioriza ceea ce se întîmpla în interior, cît și prin obiceiul foarte răspîndit pe atunci printre savanți de a nu-și publica descoperirile pînă nu rezolvă problemele ce pot fi deslegate prin noua descoperire.

Primele descoperiri matematice ale lui N e w t o n se referă la seriile de puteri, care în acea epocă prezentau un mijloc important de a extinde noțiunea de funcție. Înainte de aceea, pe timpul lui D e s c a r t e s, se cunoșteau numai funcțiile algebrice, în care y se calcula în funcție de variabila x prin operații algebrice. Seriile de puteri dădeau posibilitatea de a defini noi funcții; ele nu erau altceva decît o generalizare a noțiunii de polinom.

Aprofundînd teoria seriilor N e w t o n a generalizat formula binomului $(1+x)^r$. cunoscută pentru r întreg și pozitiv, pentru orice exponent r rațional, pozitiv sau negativ. Plecînd de la seria binomului el află prin integrare dezvoltarea în serie a lui arc sin x , apoi aplicînd metoda aproximațiilor succesive îi reușește să invertească o serie. Prin această metodă din seria logaritmică află seria exponențială, iar din seria lui arc sin x ajunge la seria lui sin x și cos x . N e w t o n se mulțumi însă cu enunțarea teoremei binomului și cu rezultatele obținute în cazurile particulare menționate, demonstrația ei generală și riguroasă putînd fi dată abia în veacul al XIX-lea de către A b e l.

N e w t o n nu a publicat această descoperire matematică decît în 1711 în *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, dar a menționat-o încă în 1676 în două scrisori adresate lui L e i b n i z. Aceeași tăcere o păstră și în ce privește cea mai mare descoperire matematică a veacului al XVII-lea, calculul infinezimal.

Ideea calculului infinezimal N e w t o n o avea deja în ultimul an de studenție la Cambridge. În vara anului 1665 însă izbucni ciuma și părăsi orașul retrăgîndu-se la Woolsthorpe. Cea mai mare parte a anilor 1666—1667 o petrecu în liniștea de la țară. Aici deveniră mature în mintea lui cele trei mari descoperiri ale sale: calculul infinezimal, gravitația universală și compunerea luminii. Deși în *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* din 1687 se găsesc cîteva teme referitoare la chestiuni infinezimale, metoda infinezimală a lui N e w t o n a

fost publicată abia în *Tractatus de quadratura curvarum* din 1704 și în opera postumă *Methodus Fluxionum et Seriarum infinitarum* din 1736.

Ideea calculului infinitezimal o găsim în antichitate în mod implicit, la Archimede care a folosit un raționament infinitezimal la aflarea cvadraturii unui segment de parabolă. Construcția calculului infinitezimal a durat aproape întreg secolul al XVII-lea. Printre matematicienii de seamă care s-au ocupat cu probleme de integrare și diferențiere amintim aici pe Galileu, Cavalieri, Descartes, Torricelli, Roberval, Wallis etc. Cei care au adus contribuția cea mai de seamă la fundamentarea calculului infinitezimal înaintea lui Newton și Leibniz au fost Fermat, Torricelli și Barrow.

Fermat a introdus noțiunea de derivată prin 1637 și în același timp avea și noțiunea de integrală pe care a folosit-o la aflarea cvadraturii unui segment de dreaptă de ordin superior $y=x^n$. Cu toate că el știa să ducă tangenta la aceeași curbă, nu a putut descoperi caracterul invers al celor două operații: de integrare și derivare.

Din fragmentele rămase de la Torricelli rezultă că acesta cunoștea cvadrarea curbelor parabolice și hiperbolice și știa să ducă tangente la acestea, iar în cazuri particulare recunosc caracterul invers al acestor operații. Dar nici Torricelli, nici mai târziu Barrow nu au fost în stare să exploateze complet aceste fapte fiindcă ei operau în mod geometric, iar nu analitic. Cel dintâi care a văzut problema inversiunii celor două calcule, integral și diferențial, a fost Newton.

Newton numește noul calcul metoda directă și inversă a fluxiunilor, operații pe care azi le numim derivare și integrare. El caracterizează în felul următor modul său de a concepe metoda fluxiunilor: « Liniile se descriu și deci se nasc nu prin alăturarea părților, ci prin mișcarea continuă a punctelor; suprafețele prin mișcarea liniilor, solidele prin mișcarea suprafețelor; unghiurile prin rotația laturilor; porțiunile de timp prin fluxul continuu; și tot astfel celelalte cantități... Prin urmare, considerând că aceste cantități care cresc în timpuri egale și se nasc prin creștere în timpuri egale, devin mai mari sau mai mici după cum e mai mare sau mai mică viteza cu care cresc sau se generează, caut o metodă de a determina cantitățile din vitezele mișcărilor sau creșterilor prin care se nasc și numind aceste viteze ale mișcărilor sau creșterilor *fluxiuni*, iar cantitățile generate *fluente*, am ajuns în mod treptat la problema fluxiunilor în anii 1665 și 1666».

Newton notează cantitatea fluentă cu x , iar fluxiunea corespunzătoare cu \dot{x} . Aceasta la rîndul ei are și ea o fluxiune pe care o înseamnă cu \ddot{x} , ... Numește momentul unei fluente x cantitatea infinit de mică cu care aceasta crește într-un interval infinit de mic și o exprimă prin ox ; aceasta în notația modernă se notează cu dx .

Cu ajutorul celor de mai sus, Newton consideră două feluri de probleme. Întîia constă în a găsi fluxiunea unei cantități fluente date, sau în general « fiind dată relația dintre fluente să se afle relația fluxiunilor lor », problemă echivalentă cu derivarea. Pentru a rezolva această problemă el consideră două variabile legate printr-o ecuație algebrică $f(x, y) = 0$. Înlocuind pe x, y cu binomii $x + x_0, y + y_0$, determină raportul fluxiunilor necunoscute dezvoltînd în serie pe $f(x + \dot{x}_0, y + \dot{y}_0) = 0$ și ținînd seama că punctul x, y aparține curbei $f(x, y) = 0$, deci partea independentă de o dispăre. Împărțind termenii ce rămîn cu o și anulînd pe o obține raportul fluxiunilor care în notația modernă se scrie $\dot{y} : \dot{x} = dy : dx$.

A doua problemă este inversa celei dintîi și se cere ca din fluxiune să se determine fluenta sau în general « fiind dată o ecuație cuprinzînd relația dintre fluxiunile cantităților, să se găsească relațiile dintre aceste cantități sau fluente, una față de alta ». Această metodă este echivalentă fie cu o integrare sau cu *metoda cvadraturii*, cum o numea Newton, fie cu o ecuație diferențială, pe care el o numea *metoda inversă a tangentelor*. Newton arată că derivata unei arii, limitată de o curbă dată, de axa absciselor și de două ordonate, față de abscisă e ordonata variabilă. De aici deduce că aflarea ariei echivalează cu găsirea funcției

primitive. Prin aceasta el stabilește în mod neîndoielnic caracterul invers al derivării și integrării. El aplică noul calcul la aflarea de maxime și minime, tangente, rectificări de curbe etc. De asemenea, rezolvă ecuații diferențiale de diferite ordine fie prin cvadraturi, fie prin schimbări de variabile sau alte procedee.

Nepublicarea la timp a marilor sale contribuții în domeniul calculului infinitezimal din partea lui Newton l-a dus mai târziu la o aspră polemică cu Leibniz privitor la prioritatea asupra acestui calcul.

Cercetările de optică. Întors în 1667 la Cambridge, Newton se dedică în mod special cercetărilor optice. Problemele de optică l-au interesat și mai înainte. Astfel în 1664, ca student, făcu observații asupra halourilor. La studiul compunerii luminii a fost condus căutând să înlăture aberația cromatică a lentilelor, care produc margini irizate ale imaginilor formate în telescoapele cu refracție, singurele întrebuințate pe atunci. Pentru a putea înlătura acest defect, el își propuse să facă un studiu experimental complet al dispersiei luminii. « În acest scop — povestește Newton — în anul 1666 (pe când mă ocupam cu cizelarea lentilelor avînd altă formă decît cea sferică), mi-am procurat o prismă triunghiulară pentru a studia cu ea celebrele fenomene ale culorilor ».

Experiențele au fost întrerupte din cauza ciumei timp de aproape doi ani, iar rezultatele au fost publicate abia în 1672 în *Philosophical Transactions* sub forma unei scrisori către Oldenburg, secretarul Societății regale din Londra. În această scrisoare istorisește că « întunecînd camera mea și făcînd o mică spărtură în obloane pentru a permite să treacă o cantitate suficientă de lumină solară, am așezat prisma la intrarea ei în așa fel ca să poată fi refractată pe peretele opus. La început era o adevărată distracție să privești lumina vie și intensă a culorilor produsă acolo; dar după un răstimp observînd-o cu mai mare atenție am fost surprins să o văd sub forma unui oblong; căci potrivit legii refracției mă așteptam să fie circulară ». Iar mai departe: « Comparînd lungimea acestui spectru colorat cu lățimea lui, l-am aflat de aproape cinci ori mai mare, o disproporție atît de extravagantă încît îmi excită o curiozitate neobișnuită să caut de unde poate proveni ».

Încercînd să explice fenomenul, Newton emise diverse ipoteze, care însă fură contrazise de experiențe. Felul în care procedă pentru a elimina ipotezele neverificate de experiență și pentru a ajunge la cunoașterea fenomenului, constituie un model de procedare științifică și e caracteristic pentru mentalitatea lui Newton. « Începui apoi — scrie el — să suspinez dacă nu cumva razele, după ce trec prin prismă, se propagă în linii curbe și din cauza curburei lor mai mari sau mai mici tind spre diversele părți ale peretelui. Presupunerea mea se întărea, aducîndu-mi aminte că adesea am văzut cum o minge de tenis lovită cu o rachetă oblică, descrie o astfel de linie curbă. Căci dîndu-i-se prin această lovitură atît o mișcare circulară cît și una progresivă, părțile ei din direcția în care se întîlnesc mișcările trebuie să apese și să lovească aerul din vecinătate mai mult decît pe celălalt și acolo produce o reluctanță și o reacțiune a aerului proporțional mai mare. Și din aceeași cauză, dacă razele de lumină ar fi corpuri sferice și prin trecerea lor oblică dintr-un mediu în altul ar cîștiga o mișcare circulară, ele ar suferi o rezistență mai mare de la eterul înconjurător de partea în care se întîlnesc mișcările și de aceea încontinuu ar fi deviate spre cealaltă. Dar cu tot temeiul plauzibil al acestei ipoteze, cînd am procedat la examinarea ei, nu am putut să observ în ea nici un fel de curbă. Și afară de aceea (ceea ce era de ajuns pentru scopul urmărit) am observat că diferența dintre lungimea imaginii și diametrul orificiului prin care trece lumina era proporțională cu distanța ei. Înlăturarea treptată a acestor ipoteze m-a condus în sfîrșit la un *experimentum crucis*, care a fost următorul: am luat două paravane și am așezat unul din ele imediat înapoia prisme de la fereastră, astfel ca lumina să poată trece printr-o deschidere făcută în el în acest scop și să cadă pe celălalt paravan pe care l-am așezat la o distanță de aproape 12 picioare, făcînd mai întîi o mică deschidere și în el, pentru ca o

parte din această lumină incidentă să treacă prin ea. Apoi am pus o altă prismă înapoia paravanului al doilea ».

Învîrtind prisma întâia în jurul axei sale trecu pe rînd fiecare culoare prin deschiderea paravanului al doilea, făcînd să cadă pe prisma a doua și notă locul fiecărei culori pe paravanul al doilea. Observă astfel că culoarea roșie e mai puțin deviată, iar cea violetă mai mult.

« Și astfel aflai că adevărata cauză a lungimii acestei imagini nu e alta decît că lumina nu e asemenea sau omogenă, ci constă din raze uniforme, unele din ele fiind mai refrangibile decît altele ».

Mai tîrziu completează această experiență cu alta în care lumina după ce a fost refractată prin întâia prismă în așa fel, ca să formeze o bandă dreaptă pe perete, trece prin a doua prismă a cărei muchie era perpendiculară pe cea dintîi. Lățimea spectrului rezultat nu creștea prin o a doua refracție, dar spectrul devenea oblic, culorile care aveau cea mai mare deviație la prima refracție, sufereau deviația mai mare și la a doua. Din aceste experiențe deduse că lumina solară și în general lumina albă se compune din raze de toate culorile, astfel de culori fiind « proprietățile naturale și înăscute » ale luminii, iar nu cauzate de prismă. « Aceluiși grad de refrangibilitate îi corespunde aceeași culoare și aceleiași culori totdeauna îi corespunde același grad de refrangibilitate ».

Prin aceste experiențe Newton a arătat în mod neîndoielnic că lumina albă e compusă dintr-o infinitate de culori. Natura culorilor nu e o proprietate a corpurilor, ci a luminii însăși. El caracterizează culorile prin refrangibilitatea lor, ceea ce s-a dovedit ulterior că nu este exact, deoarece indicele de refracție e o însușire a corpurilor iar nu a luminii.

În 1667 Newton luă ultimele grade universitare și se stabili la Cambridge. În cei doi ani ce urma a revăzu cursul lui Barrow, care apărură în 1669 sub titlul de *Lectioes Opticae et Geometricae*. În octombrie 1669 Barrow renunță la catedra de matematici în avoarea lui Newton, care o ilustră pînă în 1696. În 1670 el începu să expună într-un curs sistematic de analiză prin serii infinite descoperirile sale din acest domeniu, care apărură ca appendice la *Optica* sa din 1704.

Studiul dispersiei i-a sugerat lui Newton ideea că ea este o cauză mai importantă a imperfecției lunetelor decît aberația de sfericitate. Constată că dacă printr-o prismă trece lumina albă, razele roșii au un focar mai îndepărtat decît cele violete astfel că punînd în calea lor o a doua lentilă ele nu mai pot fi reunite ca să ne dea o imagine clară. Punînd într-o prismă lichidă una de sticlă, deduse că dispersia luminii în spectru este aceeași indiferent de substanța din care este făcută prisma sau lentila. Cu această ocazie însă nu a fost suficient de precaut trăgînd dintr-o singură experiență concluzia că aberația cromatică nu se poate înlătura, prin urmare nu se pot construi lunete perfecte. Din acest motiv abandona încercările de perfecționare a lunetelor și trecu la construirea telescopului cu reflexie. « Văzînd atunci — scrie el — că perfecționarea telescopului de lungime dată prin refracție este irealizabilă, inventai un telescop cu reflexie, folosindu-mă în loc de obiectiv de o oglindă metalică ».

Ideea unui telescop cu reflexie îi fu sugerată lui Newton de *Optica promota* a lui James Gregory, apărută în anul 1663. Gregory însă nu a construit telescopul imaginat de el. Newton modifică planul și construi unul care deși avea numai 6 degete lungime și 1 deget diametru, avea o putere măritoare de vreo 30—40. El își descrie instrumentul într-o scrisoare din februarie 1669 adresată prietenului său Est. Societatea Regală aflînd de noul instrument ceru să-i fie prezentat. Newton construi un al doilea telescop mai mare, pe care-l trimise secretarului Oldenburg în decembrie 1671. Instrumentul fu prezentat Societății Regale în ședința din 11 februarie 1672, stîrnind un entuziasm deosebit. Telescopul se păstrează și azi în colecția de aparate ale Societății Regale. Ca o consecință a construirii telescopului său, Newton fu ales membru al acestei instituții în luna ianuarie 1672. În același an se publică în *Philosophical Transactions* schema și descrierea instrumentului.

La 6 februarie 1672, abia la o lună după alegerea sa ca membru, Newt on trimise Societății Regale o dare de seamă asupra experiențelor sale de optică și a teoriei dispersiei, care apărură în *Philosophical Transactions*. Ea reprezintă începutul unei serii de controverse științifice cu diverși savanți ai epocii, ca Pardies, Linus, Lucas, Hooke și Huygens.

Ignace Gaston Pardies susținea împotriva lui Newton că prelungirea imaginii Soarelui în spectrul solar provine din cauza incidenței diferite a razelor, pe când Francis Linus afirmă că ea e cauzată de norii albi de pe cer și nu poate avea loc când cerul e senin. Obiecție cu mult mai serioasă ridică Anton Lucas, care repetind experiențele lui Newton află că lungimea spectrului nu este de 5 ori, ci numai de 3,5 ori mai mare decât imaginea Soarelui. Newton răspunde că aceasta provine din cauză că unghiul prisme cu care a experimentat Lucas este prea mic; dacă acesta ar întrebuința o prismă de un unghi de $66-67^\circ$, lungimea spectrului ar fi mai mare. De aici se vede că Newton era atât de convins de invariabilitatea dispersiei încât nu repetă experiențele cu alte prisme de natură diferită pentru a se convinge de adevărul afirmațiilor lui Lucas. În acest fel din cauza unei inadvertențe a lui Newton corectarea aberației cromatice pentru a obține lentile acromatice suferi o amânare de aproape un secol.

Meditând asupra naturii luminii Newton ajunse la concluzia că ea constă din particule materiale extrem de mici, care se propagă din corpul luminos în linie dreaptă în toate direcțiile cu o viteză extraordinară. Spre deosebire de această teorie numită corpusculară, Hooke și mai târziu Huygens au elaborat o teorie ondulatorie susținând că lumina e formată din unde ce se mișcă în eter. Atât teoria culorilor cât și cea a naturii luminii a lui Newton au provocat criticele lui Hooke și Huygens. În ce privește natura culorilor Hooke susținea că nu există decât două culori fundamentale, roșu și violet, din amestecul cărora provin toate celelalte și că inegalitatea refracției este cauzată de descompunerea și slăbirea vibrațiilor eterului, pe când Huygens afirma că lumina albă se compune din cele două culori fundamentale galben și albastru.

Într-o scrisoare din 11 iunie 1673 către Oldenburg, Newton răspunde criticilor arătând că două culori fundamentale nu sînt de ajuns să explice toate culorile și că teoria culorilor este independentă de natura luminii. În ce privește teoria lui Huygens asupra luminii, Newton o considera ca insuficientă din cauză că ea nu putea da o explicație simplă a propagării în linie dreaptă. El scrie: « Mie mi se pare imposibilă însăși ipoteza fundamentală, anume că undele sau vibrațiile unui fluid pot, la fel cu razele de lumină, să se propage în linie dreaptă fără o neîtreruptă și extravagantă săritură și îndoire în mediul în repaus, când ele se termină în el... Mă îndoiesc dacă aici experiența și demonstrația sînt de acord ».

Discuțiile asupra luminii l-au amărît atât de mult pe Newton, care avea o mare de publicitate și controverse, încît într-o scrisoare către Oldenburg se plînge împotriva criticilor exprimîndu-și dorința de a se lăsa de filozofie. « Văd că omul trebuie sau să se hotărască să nu producă nimic nou, sau să devină un sclav al descoperirii ca să o apere ». În anul 1763 își dădu chiar demisia de la Societatea Regală pe motivul că nu poate achita cotizația de membru; Oldenburg însă îl convinse să și-o retragă intervenind ca Newton să fie dispensat de plata ei.

O altă problemă de optică pe care a rezolvat-o Newton a fost aceea a lamelor subțiri. Fenomenul a fost cercetat mai întîi de Robert Boyle în 1663 și a fost studiat mai amănunțit de către Hooke, care într-o comunicare făcută în 1672 la Societatea Regală arată că el se observă și la lamele subțiri de mica, precum și atunci cînd apăsăm una pe alta două plăci de sticlă. El ajunse la rezultatul că culorile observate depind de distanța dintre cele două plăci, dar nu a putut arăta în ce fel și nici să dea o explicație a fenomenului.

Influențat de aceste experiențe, Newton consideră problema dintr-un punct de vedere mai matematic. El puse pe o sticlă plană o lentilă cu o rază de 50 de picioare și le apăsă puțin

una pe cealaltă. Prin acest mijloc observă că se obțin inele colorate concentrice, atât prin transparență cât și prin reflexie, unele fiind complementarele celorlalte. Astfel prin transparență se obțin inele cu centru luminos, iar prin reflexie inele cu centrul întunecat. El făcând experiențe nu numai cu lumină albă ci și cu lumină monocromatică, în care caz obține o serie de inele alternativ luminoase și întunecate. Măsurând razele inelelor luminoase și întunecate constată că la cele luminoase pătratele razelor sînt în raportul $1:3:5:7\dots$, iar la cele întunecate în raportul $0:2:4:6:\dots$. Umplînd spațiul dintre sticlă și lentilă cu apă, află că raza inelelor se contractă în raportul de 8 pe 7. De aici deduce că grosimea stratului de apă se raportează către a celui de aer care produce aceleași culori precum $7^2:8^2 = 49:64$, adică aproximativ precum $3:4$, prin urmare în raportul indicelui de refracție al apei și al aerului.

Fenomenul inelelor colorate îl îndeamnă pe Newton să-și completeze teoria luminii atribuind particulelor facultatea de a-și varia periodic proprietățile și anume în așa fel că într-un moment dat ele se reflectă ușor la o suprafață, în alt moment se refractă ușor. El numi această însușire «fits» (fr. accès) și admise că ele se succed cu atât mai repede cu cât particulele luminoase sînt mai mici, adică cu cât ne apropiem mai mult de violet. Cu ajutorul acestei ipoteze suplimentare îi reuși să dea o explicație inelelor, dar își dădu seama că ea nu e satisfăcătoare. Într-adevăr este greu de precizat în ce condiții se găsesc particulele în starea de a fi ușor reflectate și cînd se găsesc în starea de a fi ușor refractate. Pentru a explica aceasta el își imaginează că particulele luminoase produc oscilații în corpurile pe care cad. Vibrațiile fiind mai rapide decît razele, ele măresc sau micșorează alternativ iuțeala razelor producînd astfel «fits»-urile. Imposibilitatea de a putea explica în mod simplu fenomenele de interferență constituie unul din neajunsurile teoriei lui Newton.

În 1676 Newton publică o lucrare asupra culorilor naturale ale corpurilor în care afirmă că ele depind de mărimea și distanța dintre particulele din care sînt alcătuite corpurile și distanță comparabilă cu grosimea lamelor din experiențele sale. În această teorie el explică transparența corpurilor, admițînd că particulele constitutive ale corpurilor și distanțele dintre ele sînt atât de mici încît ele nu pot reflecta lumina. Pentru a explica culoarea albastră a cerului el presupune că particulele de apă din aer au o astfel de mărime încît fac să predomine culoarea albastră.

Lucrările asupra culorilor lamelor subțiri l-au atras pe Newton într-o polemică vie cu Hooke, ceea ce-l amări atât de mult încît promise că pînă ce va trăi acesta nu va mai publica nimic privitor la optică, promisiune pe care a și ținut-o. În urma nereușitei momentane a teoriilor sale optice și din cauza criticilor ce i s-au adus, el părăsi aceste studii revenind la problema gravitației.



Gravitația universală. Este caracteristic pentru personalitatea lui Newton că toate ideile sale științifice s-au ivit în prima lui tinerețe, dar datorită firii sale meditative și rezervate el nu și-a publicat operele decît foarte tîrziu. Aceasta o confirmă și istoria descoperirii legii gravitației sau a atracției universale.

Voltaire povestește că Newton plimbîndu-se în grădină absorbit în gînduri asupra cauzei gravitației văzu un măr căzînd din pom, ceea ce-l conduse să se întrebe care sînt limitele forței gravitaționale și cît de înalt ar trebui să fie pomul pentru ca mărul să nu mai cadă la pămînt și a ajuns la rezultatul că ar trebui să-i ajungă vîrfurile pînă la lună fără ca acțiunea gravitației să înceteze. Povestirea lui Voltaire cu tot aspectul său de verosimilitate nu poate fi adevărată din cauza că ideea gravitației au avut-o înaintea lui Newton și alți oameni de știință ca Leonardo da Vinci, Copernic, Kepler etc. Meritul incontestabil al lui Newton este însă că a dus la bun sfîrșit munca începută de alții și a clarificat o idee pe care alții înaintea lui au avut-o numai în mod vag.

Cu mult mai verosimile sînt detaliile pe care le dă Pemberton, care-l cunoscuse pe Newton în ultimii ani ai vieții sale și care-l ajută la scoaterea ediției a III-a a *Principiilor*.

«Plimbându-se singur prin grădină — scrie P e m b e r t o n — medită asupra forței gravitației; oare aceasta nu se micșorează în mod sensibil la distanțele cele mai mari de la centul Pământului pînă la care nu ne putem urca, nici pe vîrfurile edificiilor celor mai înalte, i se păru rezonabil să conchidă că această forță trebuie să se extindă cu mult mai departe decît se credea de obicei; pentru ce nu pînă la Lună se întreabă el? Dar dacă este așa mișcarea trebuie să fie influențată de ea; poate de aceea este reținută pe orbita ei ».

Izvorul cel mai autentic desigur este însuși N e w t o n, care-și reamintește astfel de importanța descoperire: « În același an (1666) am început să mă gîndesc că gravitația se întinde pînă la orbita Lunii și aflînd cum se exprimă forța cu care o sferă ce se învîrtește în interiorul altei sfere apasă asupra suprafeței acesteia, din legea lui Kepler că timpurile periodice ale planetelor sînt în raportul puterii $3/2$ a distanțelor de la centrele orbitelor lor, am dedus că forțele care țin planetele pe orbite trebuie să fie în raport invers cu pătratele distanțelor lor de la centrele în jurul cărora se învîrtesc; prin urmare am comparat forța necesară să țină Luna pe orbita sa cu forța gravitației pe suprafața pământului și am aflat că ea corespunde cu multă aproximație ».

În posesia acestei legi N e w t o n căută să o verifice în cazul Pământului și a Lunii. Făcu ipoteza că greutatea la suprafața Pământului este cauzată de aceeași forță gravitațională care menține Luna pe orbita ei și că potrivit legii de mai sus accelerația căderii corpurilor la suprafața Pământului și aceea a Lunii sînt invers proporționale cu pătratul distanțelor de la centrul Pământului. Dacă acest lucru se verifică înseamnă că legea forțelor invers proporționale cu pătratul distanțelor este adevărată.

În acea epocă nu se cunoștea raportul razei Pământului față de distanța Lunii de la Pământ. De asemenea nu se cunoșteau rezultatele diverselor măsurări asupra razei pămîntești, a cărei valoare era necesară pentru determinarea accelerației Lunii spre Pământ. Abia în 1684 a aflat de măsurările precise ale lui P i c a r d, făcute în Franța, și astfel a fost în stare să verifice legea.

Astronomul A d a m s mai aduce un motiv care ar explica întîrzierea publicării legii gravitației universale și anume dificultatea întîmpinată în calculul atracției unei pături sferice sau a unei sfere de pături omogene asupra unui punct exterior. Abia după rezolvarea acestei probleme care nu i-a reușit decît prin 1685 se putea pune problema publicării legii gravitației universale.

Împrejurarea care l-a silit pe N e w t o n să iasă din rezerva sa obișnuită și să-și comunice marea descoperire a fost discuția ce s-a ivit privitor la legea atracției invers proporționale cu pătratul distanței între trei fizicieni de seamă din Anglia: R. H o o k e, C h r. W r e n și E d m. H a l l e y.

R o b e r t H o o k e (1635—1703), unul din fondatorii Societății Regale, începuse să se ocupe cu problema gravitației cam în același timp cu N e w t o n. În 1666 prezintă acestei societăți un memoriu asupra gravitației în care arată că variația acestei forțe cu altitudinea s-ar putea măsura cu ajutorul unui pendul. În 1674 H o o k e emise ideea gravitației universale concepînd gravitația ca pe o radiație, de unde urmează că forța gravitației e proporțională cu suprafața sferei atinse de această iradiație, adică invers proporțională cu pătratul distanței.

În 1680 H o o k e i-a propus să determine traiectoria unei particule ce se mișcă în apropierea unui centru spre care este atras cu o forță invers proporțională cu pătratul distanței. Răspunsul lui N e w t o n fu că aceasta este o spirală, H o o k e însă îi atrase atenția că ea este o elipsă, avînd unul din focare în centrul de atracție. N e w t o n reamintindu-și de această discuție scrie: « Și în acest fel corectîndu-mi spirala mă făcu să aflu teorema cu ajutorul căreia mai tîrziu am examinat elipsa ».

N e w t o n dădu o soluție generală problemei puse de H o o k e demonstrînd că un corp ce se mișcă sub influența unei forțe invers proporționale cu pătratul distanței de la un

centru fix descrie o elipsă, parabolă sau hiperbolă, și invers un corp ce se mișcă pe o elipsă, parabolă, sau hiperbolă este atras spre un centru fix cu o forță invers proporțională cu pătratul distanței corpului de la acel centru. Mai arată că raza vectoare a unui mobil ce se mișcă pe o orbită centrală descrie arii egale în timpuri egale. Demonstrând și acest lucru, Newton, după cum scrie într-o scrisoare din 1686, a «întrerupt calculele, trecînd la alte studii și așa a rămas timp de cinci ani». După trecerea celor cinci ani intrară în scenă Wren și Halley.

Christian Wren (1632—1723), arhitect, a găsit legea atracției invers proporționale cu pătratul distanței căutînd să determine traiectoria unei planete din condițiile inițiale și din forța gravitațională.

Edmund Halley (1656—1742), astronom și prieten al lui Newton, află în 1682 că dacă admitem că planetele descriu în jurul Soarelui orbite circulare din legea a treia a lui Kepler se poate deduce că forța centripetă este în raport invers cu pătratul distanței planetei de la Soare. El însă nu putu să rezolve problema inversă de a găsi traiectoria unui corp atras spre un centru fix cu o forță invers proporțională cu pătratul distanței, de aceea propuse această problemă lui Hooke și lui Wren. Acesta din urmă recunoscă că nu poate da soluția, pe cînd Hooke răspunse că cu ajutorul forței invers proporționale cu pătratul distanței «toate legile mișcărilor cerești pot fi demonstrate și că el a făcut aceasta». Ca urmare a acestor discuții Wren oferă o carte de valoare aceluia din cei doi savanți care va rezolva problema în decurs de două luni. Răspunsul lui Halley fu negativ, iar Hooke susținu din nou că el «o posedă, dar vrea să o țină ascunsă cîtva timp, pentru ca alții încercînd și nereușindu-le să-i poată aprecia valoarea cînd o va publica»; dar n-a publicat-o niciodată.

Văzînd că nu se ajunge la nici un rezultat, Halley, care învățase să-l aprecieze pe Newton, în august 1684 se duse la Cambridge și-i puse întrebarea: ce traiectorie ar descrie o planetă sub acțiunea unei forțe invers proporțională cu pătratul distanței? Newton răspunse imediat: o elipsă. La cererea lui Halley de a-i comunica demonstrația, Newton răspunse că nu o mai are, dar i-o va trimite la Londra în curînd. După trei luni Halley avu demonstrația lui Newton. Entuziasmul lui Halley era fără margini și hotărî să-l convingă pe Newton să-și publice descoperirea. În acest scop călători din nou la Cambridge, unde află cu plăcere că Newton a terminat un mic tratat intitulat: *De motu corporum*, în care se ocupă cu mișcarea centrală și în particular cu forțele invers proporționale cu pătratul distanței. Halley îl făcu să promită că va trimite manuscrisul la Societatea Regală pentru a-și asigura prioritatea și înștiință Societatea despre aceasta în ședința din 10 decembrie 1684. Manuscrisul ajunsese la Londra în februarie 1685 însoțit de o scrisoare a lui Newton în care menționează că pregătește un tratat mai mare asupra aceluiași subiect.

Newton putea acum să anunțe pregătirea unei lucrări mai mari asupra gravitației fiindcă la începutul anului 1685 îi reuși să demonstreze că o sferă formată din pături omogene atrage un punct material exterior ca și cînd întreaga ei masă ar fi concentrată în centrul sferei. Considerînd planetele ca puncte materiale în care este concentrată întreaga lor masă, el putu enunța legea atracției universale: două planete se atrag cu o forță proporțională cu masele lor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele. În posesia acestei legi, Newton, în aprilie 1685, începu redactarea marii opere pe care o termină în timp de 18 luni, cu toate că în același timp făcea și cercetări de chimie. În munca sa avu sprijinul lui John Flamsteed, astronom la Cambridge și un excelent observator al fenomenelor cerești, care-i comunica cele mai noi și precise observații asupra orbitei lui Saturn, a mișcării sateliților lui Jupiter și Saturn, a mareelor etc.

Cartea întâi fu terminată în primăvara lui 1685, a doua în vara aceluiași an, pe cînd redactarea celei de-a treia se sfîrși abia în anul următor. La 21 aprilie 1686 Halley anunță la Societatea Regală că «dl Isaac Newton are aproape gata de tipar un incomparabil tratat asupra mișcării». În sfîrșit, la 28 aprilie fu prezentat în ședință manuscrisul intitulat *Philosophiae*

Naturalis Principia Mathematica. El nu cuprindea decât Cartea I, totuși prezentarea stîrni entuziasmul adunării, cu excepția lui H o o k e, care își revendică prioritatea. N e w t o n nu era de față, astfel că H a l l e y reuși să aplaneze conflictul ce se născu după aceasta între cei doi mari fizicieni. Ca rezultat al stăruințelor lui H a l l e y, prin scrisoarea din 14 iulie 1686 N e w t o n se învoi ca să se insereze în locul potrivit în carte că legea forței invers proporționale cu pătratul distanței a fost descoperită atît de el, cît și în mod independent de H o o k e, W r e n și H a l l e y.

Societatea Regală hotărî publicarea imediată a *Principiilor* și însărcină pe H a l l e y cu îngrijirea tipăririi. Acesta însă în curînd își dădu seama că Societatea nu dispune de fonduri suficiente și ca apariția cărții să nu sufere întîrziere, deși el însuși nu era bogat și avea și familie, completă din al său suma ce lipsea. În acest fel datorită spiritului de jertfă al lui H a l l e y, care nu cruță nici o oboseală făcînd el însuși corecturile de tipar, adunînd date astronomice, convingîndu-l pe N e w t o n să nu renunțe la publicarea Cărții a III-a, apărură în 1687 *Principiile matematice ale filozofiei naturale*, unul din cele mai de seamă monumente ale gîndirii omenești.

În timpul imprimării *Principiilor* N e w t o n luă parte la un incident politic important pentru viața universitară a Angliei. Carol al II-lea muri în anul 1685 și se urcă pe tron fratele său Iacob al II-lea, un mare protector al catolicilor. Nu peste mult timp regele impuse Universității din Oxford acceptarea numirii într-un post important academic a unei persoane fără nicio calitate decât aceea de a fi catolic. În februarie 1687 regele pretinse Universității din Cambridge să confere titlul de «magister artium» unui călugăr benedictin, fără a-i pretinde jurămîntul reglementar către universitate. Vicecancelarul Universității refuzînd executarea decretului regal fu chemat în fața Înaltei Curți din Westminster împreună cu reprezentanții Universității. Curtea era prezidată de celebrul J e f f r e y s, un jurist excelent, dar un om brutal. Imediat reduse la tăcere pe vicecancelar și nu lăsă să vorbească nici unul din cei opt reprezentanți ai Universității, printre care se afla și N e w t o n, ci-i dojeni cu cuvintele: «În ce vă privește pe D-voastră, cei mai mulți sînteți teologi. De aceea mergeți acasă reamintindu-vă cuvintele din Scriptură: iar de acum înainte să nu mai păcătuți ca să nu vi se întîmple ceva mai rău». Ca urmare a conflictului, vicecancelarul fu destituit, dar Universitatea nu execută nici după aceea decretul regelui.

Munca excesivă depusă de N e w t o n la redactarea *Principiilor* i-a măcinat mult energia și l-a obosit. La sfatul prietenului său H a l l e y întrerupse pentru un timp activitatea științifică. În 1689, după «revoluția glorioasă» care-l detronă pe Iacob al II-lea, N e w t o n fu trimis de Universitatea din Cambridge ca reprezentant al său în parlamentul din Londra, demnitate pe care o menținu pînă la dizolvarea acestuia în februarie 1690, fără însă a lua cuvîntul la dezbateri. Se povestește că o singură dată atrase atenția ușierului să închidă un geam ca să nu răcească oratorul de la tribună. Istoricul M a c a u l a y scrie despre el: «În mulțimea membrilor tăcuți se vedea fruntea majestoasă și fața meditativă a lui I s a a c N e w t o n; el stătea acolo în măreția sa modestă, prieten neîmbulzit, dar neșovăitor al libertății cetățenești și religioase».

În timpul deputăției sale, N e w t o n își dădu seama că în vieme ce oameni fără nici o valoare ocupă situații înalte și slujbe bine retribuite, situația sa materială nu e de invidiat. Acest fapt îl enervă atît de mult încît le reproșă prietenilor săi cu influență P e p y s, președinte al Societății Regale, M o n t a g u e, L o c k e etc. că nu se interesează de soarta lui.

O altă cauză a deprimării lui N e w t o n a fost moartea mamei sale. În tot timpul vieții, N e w t o n i-a purtat o afecțiune deosebită, iar în decursul bolii ce o chinuia a îngrijit-o cu mult devotament stînd noaptea de veghe lîngă căpătîiul ei și alinîndu-i suferințele. Probabil că acest eveniment i-a mărit inclinația pe care deja o avea în mare măsură pentru studiul teologiei.

Cu toate acestea el continuă preocupările sale științifice. În 1692 publică în volumul al II-lea al *Algebrei* lui Wallis, câteva propoziții referitoare la calculul fluxiunilor, ține corespondență cu Leibniz asupra problemelor de matematici și discută cu Bentley probleme teologice.

În această perioadă însă starea sănătății lui Newton devine îngrijorătoare. Singurătatea vieții de la Cambridge îl făcu tot mai nervos și dădu adesea semne de slăbiciuni fizice. Într-o scrisoare din 1692 către Locke scrie: «adorm prea des lângă foc. . . astfel că atunci când v-am scris nu am dormit o oră pe noapte timp de două săptămîni, iar vreme de cinci zile nici o clipită». Cu ocazia unei vizite la episcopul de Canterbury începu să înșire cuvinte neînțelese de cei prezenți. În curînd vestea despre îmbolnăvirea lui Newton se răspîndi nu numai în Anglia, ci și pe Continent, unde se zvoni că ar fi înnebunit. Această deprimare sufletească însă nu dură mult, fiindcă prietenii săi îl forțează să se odihnească cîtva timp, după care își recîștigă liniștea și puterea de muncă.

Încă în 1691 Newton începu redactarea unei lucrări asupra mișcărilor Lunii, cărora le-a dat totdeauna o atenție deosebită. Mișcările acestui satelit al planetei noastre l-a preocupat ani de-a rîndul și starea sa nervoasă s-a agravat și din cauza acestei probleme dificile. De multe ori se plîngea lui Halley că ea îi cauzează dureri de cap. El nu numai a formulat precis problema Lunii, dar i-a dat cel dintîi o soluție aproximativă. A arătat că din cauza atracției Soarelui linia apsidelor descrie o mișcare progresivă, iar cea a nodurilor una retrogradă. Dificultatea problemei constă tocmai în influența Soarelui, astfel că ea a condus la problema celor trei corpuri, care în generalitatea ei nu a fost soluționată pînă în prezent.

În 1694 a ajuns ministru de finanțe al Angliei Charles Montague, elev al lui Newton și președinte în acea vreme al Societății Regale. În această calitate își propuse să facă o reformă monetară, pentru ducerea la îndeplinirea căreia crezu că ajutorul lui Newton ar fi foarte prețios. Profitînd de faptul că postul de controlor al Monetăriei Statului era vacant interveni la rege ca el să fie dat lui Newton. La 19 noiembrie al aceluiași an îi comunică lui Newton numirea în termenii următori: «Postul este foarte potrivit pentru D-voastră. . . El reprezintă cinci sau șase sute de fonți pe an și ocupația nu cere mai mult timp decît ați putea dispune. Doresc să veniți imediat ce veți putea. . . Cred că veți putea avea o locuință aproape de mine». Newton acceptă postul care înaintea lui era considerat ca o sinecură, dar pe care el îl luă în serios. Rezultatul activității sale a fost că după trei ani redresarea monetară a Angliei fu desăvîrșită. Ca recompensă Newton fu numit în 1699 director al Monetăriei Statului, situație foarte bine retribuită și pe care o păstră tot timpul vieții sale.

Prin mutarea la Londra, felul de viață al lui Newton luă o întorsătură importantă. El nu se căsătorî, dar își aranjă un cămin comod și lipsit de griji. Sarcina menajului o încredință nepoatei sale de soră Ecaterina, care s-a achitat în chip splendid de rolul primit. Newton începu să joace un rol de primul rang în societatea londoneză.

Cu toate că preocupările lui Newton erau de altă natură de cît pui științifică, geniul său nu încetă să dea dovezi de strălucire. Una din acestea este soluționarea problemei brachistocronei. Problema a fost pusă de Jean Bernoulli sub forma următoare: Fiind date două puncte *A* și *B* în așa fel, ca dreapta ce le unește să nu fie nici verticală nici orizontală, să se găsească traiectoria descrisă de o particulă sub influența gravitației în așa fel ca ea să ajungă din *A* în *B* în timpul cel mai scurt. Problema a fost enunțată în *Acta Eruditorum* din Leipzig ca o sfidare a matematicienilor din Europa. Newton rezolvă problema într-o după masă și arată că traiectoria este o cicloidă. Soluția pe care a dat-o era atît de elegantă încît Bernoulli văzînd-o a exclamat: «recunosc leul după ghiare».

În 1699 regele Franței Ludovic al XIV-lea îi oferî o pensie, pe care însă o refuză. În schimb acceptă alegerea sa ca membru străin al Academiei de Științe, alături de Leibniz, frații Bernoulli și Olaf Roemer. În același an se decise să renunțe la catedra de la

Cambridge, fiind înlocuit de matematicianul W. W h i s t o n , pînă în 1701, cînd N e w t o n părăsi definitiv această catedră. Totuși el nu rupse definitiv legăturile sale cu Universitatea, care în același an îl trimise din nou ca reprezentant al ei în parlamentul din Londra pînă la dizolvarea acestuia în 1702.

Ca preocupări științifice din această epocă amintim o încercare din 1699 de reformă a calendarului, și o descriere a sextantului inventat de el pe care o trimise lui H a l l e y în 1700. În 1701 publică o lucrare asupra scărilor de temperatură în care se găsesc două legi descoperite de el. Întîia poartă numele de *legea de răcire a lui Newton* și spune că viteza de răcire a unui corp este în fiecare moment proporțională cu diferența dintre temperatura proprie și aceea a mediului înconjurător. A doua spune că temperatura unei substanțe în tot timpul topirii și a fierberii rămîne constantă.

În 1703, N e w t o n obține cea mai înaltă distincție științifică fiind numit președinte al Societății Regale. El păstrează această funcție onorifică pînă la moarte spre gloria instituției și a științei engleze. O ultimă și importantă distincție obține în 1705 cînd regina Ana a Angliei îi conferă titlul de nobil.

În această perioadă a vieții, N e w t o n se ocupă mai ales cu editarea operelor sale. În 1703 murind H o o k e , N e w t o n își publică în limba engleză *Optica*, scrisă încă din 1675, dar tipărită abia în 1704. Ea fu tradusă în latinește de S a m u e l C l a r k și apărut în această limbă în 1706. *Optica* cuprinde în deosebi descoperirile autorului în domeniul luminii, fiind descrise experiențele lui N e w t o n din 1666 asupra spectrului solar și teoria sa despre lumină.

Publicîndu-și *Optica* după ce H o o k e nu mai era în viață el se credea la adăpostul criticilor. La sfîrșitul cărții anexă însă două lucrări de cuprins pur matematic. Întîia, intitulată *Tractatus de quadratura curvarum* cuprinde în realitate teoria fluxiunilor aplicată la calcularea ariilor închise de curbe, iar a doua cu titlul *Enumeratio linearum tertii ordinis* este un studiu despre curbele de gradul al treilea. Publicarea primei lucrări avea să-l ducă la o discuție aprigă cu L e i b n i z asupra priorității calculului infinitesimal.

În 1707, W. W h i s t o n publică sub titlul *Arithmetica universalis* cursul de algebră pe care N e w t o n îl ținuse la Cambridge și pe care W h i s t o n îl avea în manuscris încă din anul 1685 cînd îl audiase. Cartea a apărut fără învoirea lui N e w t o n . În 1711 se tipărește o altă carte a lui N e w t o n intitulată *Methodus differentialis* care cuprinde metode de calcul care nu și-au pierdut încă actualitatea.

În același timp N e w t o n era preocupat și de scoaterea celei de-a doua ediții a *Principiilor*. În vederea retipăririi el făcuse o serie de note marginale pe unul din exemplarele proprii și în 1708 îl trimise lui B e n t l e y care solicita retipărirea; acesta însă nu putu să se achite de această sarcină. N e w t o n însuși avea alte ocupații, așa că chestiunea rămase în suspensie. Ea s-ar mai fi amînat dacă în anul următor nu și-ar fi luat această sarcină un tînăr matematician de la Cambridge, R o g e r C o t e s , profesor de astronomie și filozofie la acea universitate. Deși în etate de abia 25 de ani C o t e s se dovedește un excelent matematician. În 1709 N e w t o n îi trimise prin W h i s t o n exemplarul corectat și completat pentru tipar. C o t e s nu se mulțumi însă numai cu o simplă retipărire, ci la îndemnul lui B e n t l e y și cu învoirea lui N e w t o n se apucă să reediteze întreaga operă. Pregătirile tipăririi durară patru ani, în decursul cărora avu loc o vastă corespondență între N e w t o n și C o t e s . În sfîrșit *Principiile* reapărură în 1713 adăugite cu părți noi și puse la punct cu ultimele descoperiri fizice și astronomice. Noua ediție era precedată și de o prefață a lui C o t e s , care arăta și atitudinea filozofică a operei.

C o t e s muri în 1716 în etate de abia 41 de ani. După epuizarea ediției a doua, N e w t o n căută un alt matematician potrivit pentru a scoate o a treia ediție. Astfel găsi pe doctorul P e m b e r t o n , care începuse să studieze *Principiile* ca student la medicină, ceea ce-l determină să se ocupe cu matematicile. N e w t o n recunoscu în unele

lucrări pe care i le prezentă tânărul medic puterea de creație a acestuia în matematici și-i încredință sarcina scoaterii celei de-a treia ediții a mării sale opere. La fel ca și Cotes, Pemberton nu a fost un simplu editor. El discută cu Newton fiecare pasaj și scoase o ediție complet revizuită. Datorită entuziasmului lui Pemberton această ultimă ediție a *Principiilor* din timpul vieții lui Newton apărură în 1726, împreună cu un frumos portret al lui Newton în etate de 83 de ani, datorit pictorului Vanderbank.

Ajungând la etatea de 80 de ani, sănătatea lui Newton începu să lase de dorit. În 1722 suferi de o afecțiune de vezică, o putu însă stăpîni repede ținînd o dietă strictă. Peste doi ani suferi de piatră la vezică, iar în 1725 trecu peste o pneumonie. Toate acestea nu-l împiedică de la lucru și pregăti pentru tipar o lucrare de cronologie intitulată *The Chronology of Ancient Kingdoms Amended*. Nu avu însă timp să o vadă tipărită, căci se îmbolnăvi din nou din cauza pietrii la vezică, de astă dată însă fără remediu. La 10 martie 1727 prezidă pentru ultima dată o ședință a Societății Regale. Chinurile boalei care urmară le suferi cu mult curaj și în momentele fără durere își recăpătă buna dispoziție. La 26 martie starea sa păru că se îmbunătățește, dar în dimineața zilei de 31 martie 1727 își dădu sfîrșitul în etate de 84 de ani, 2 luni și 21 de zile. A fost înmormîntat cu onorurile cuvenite unui rege în abația Westminster. În 1731 i s-a ridicat un monument cu o inscripție ce se termină cu cuvintele: «să se felicite muritorii, că a existat o astfel și atît de mare podoabă a genului omenesc». La Cambridge în hall-ul de la Trinity College i s-a ridicat o statuie de marmură, executată de Roubilliac, pe soclul căruia se poate citi: «Cel care a întrecut prin geniu neamul omenesc».



Portretul lui Vanderbank ni-l înfățișează pe Newton ca pe un bătrîn venerabil cu părul alb-argintiu și o înfățișare gînditoare. El nu a fost nicicînd slab, iar către bătrînețe părea chiar corpulent. Nepotul său Humphrey Newton care i-a fost asistent și secretar între anii 1683 și 1689 îl descrie ca «foarte blînd, liniștit și modest, fără să pară vreodată mînios, de gîndire adîncă, avînd o comportare plăcută, agreabilă și simpatică». Cursul îl dicta repede timp de o jumătate de oră. Auditori la curs avea puțini, uneori nici unul. Atunci se întorcea repede la lucrul său, căruia îi dedica tot timpul, fără răgaz și fără distracții. «Mîncă foarte puțin, aproape nimic, uneori uita de tot de mîncare, astfel că mergînd în camera lui, găseam alimentele neatînse... Rareori se culca înainte de orele două sau trei, uneori chiar pe la cinci sau șase, dormind patru sau cinci ore, mai ales primăvara și toamna, cînd obișnuia să stea vreo șase săptămîni în laboratorul său, cu focul arzînd aproape neînterupt ziua și noaptea, el veghind o noapte și eu alta, pînă ce-și termina experiențele de chimie. Nu pot spune că l-am văzut vreodată bînd vin sau bere, decît la masă, dar și atunci foarte puțin. Foarte rar venea la masă în sufragerie, cu excepția festivităților, dar și atunci, dacă nu i s-ar fi atras atenția, s-ar fi dus complet neîngrijit, desculț și cu părul nepieptănat... Dădea multă atenție grădinii, care i se părea că nicicînd nu e în ordine și în care rareori făcea o plimbare sau două, nesuferind să vadă în ea vre-o buruiană. În schimb se plimba prin laborator. În cameră se plimba atît de mult, încît s-ar fi crezut că a fost educat la Atena printre elevii lui Aristotel».

Din cele de mai sus se vede că Newton se cufunda uneori atît de adînc în meditațiile sale că nu-l preocupa ceea ce se întîmplă în jurul său. Au rămas o mulțime de anecdote în legătură cu firea sa distrată. Astfel se povestește că întorcîndu-se o dată călare de la Grantham, la poalele unei coline se dădu jos de pe cal spre a-l conduce pe jos; ajungînd în vîrfurile colinei și voind să se urce din nou pe cal, constată că a rămas cu frîul în mînă, pe cînd calul eliberîndu-se a luat-o singur înainte. În ocaziile rare cînd își rupea din timp și invita oaspeți, dacă i se întîmpla să-i părăsească pentru a merge să aducă vin sau din alte motive, aceștia îl găseau după cîtva timp preocupat de vre-o problemă, uitîndu-și cu totul de oaspeți și de datoriile sale de patron al casei. Una din cele mai răspîndite este următoarea anecdotă. Într-o

zi voind să fiarbă un ou, pentru ca acesta să nu fie prea tare scoase orologiul din buzunar pentru a observa timpul de fierbere. În loc însă de a introduce oul în vasul cu apă fierbinte puse orologiul și se uită la ou ca să vadă când va fi fiert orologiul.

N e w t o n era un om conștiincjos și religios, ducînd o viață morală; unul din contemporanii săi îl caracterizează ca «sufletul cel mai curat» pe care l-a cunoscut. Era însă de o sensibilitate extraordinară față de critici și în materie de știință nu suferea critici sau contraziceri. Aceasta l-a condus la discuții aprinse și inutile cu L e i b n i z și F l a m s t e e d etc., discuții în care nu-și cruța adversarii. În toiul acestor polemici F l a m s t e e d l-a caracterizat, în mod injust, ca «perfid, ambițios, extrem de sgîrcit cu laudele și intolerant la contraziceri».

N e w t o n s-a bucurat de un prestigiu științific incontestabil atît în timpul vieții, cît și după moarte. Rivalul său L e i b n i z spunea că opera matematică a lui N e w t o n este mai valoroasă decît tot ce s-a creat înaintea lui. În timpul revoluției franceze cînd se discutau proiecte de ameliorare a speciei umane L a g r a n g e spunea celor din jurul său: «Vreți să vedeți spiritul omenesc în adevăr mare? Intrați în cabinetul unui N e w t o n descompunînd lumina și dezvelind sistemul lumii».

B i o t, care a studiat cu multă atenție operele lui N e w t o n, îl caracterizează în felul următor: «ca geometru și ca experimentator N e w t o n este fără egal; prin unirea celor două feluri de genii în cel mai înalt grad, el este incomparabil».

În aprecierea operei sale științifice cu toate că era conștient de valoarea ei, N e w t o n se arăta foarte modest. El își atribuia succesele în cea mai mare parte operei înaintașilor săi în știință, iar o dată s-a exprimat că dacă a văzut mai departe decît alții, aceasta e din cauza că s-a ridicat pe umeri de giganți. Cea mai frumoasă și cea mai potrivită caracterizare însă sînt cuvintele pe care nu cu mult înaintea morții le-a spus lui S p e n c e r: «Nu știu cum voi apare înaintea lumii, dar mie însumi mi se pare că am fost ca un copil care se juca pe malul mării și distrîndu-mă din cînd în cînd am găsit o pietricică mai netedă sau o scoică mai frumoasă decît de obicei, în timp ce marele ocean al adevărului zace nedescoperit înaintea mea».

VICTOR MARIAN

BIBLIOGRAFIA OPERELOR LUI NEWTON

1687

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Auctore Is. Newton. Trinit. Coll. Cantab. Socio Matheseos Professore Lucasiano, et Societatis Regalis Sodali, Londini. 4°.

1704

Opticks: or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light. Also two Treatise of the Species and Magnitudes of Curvilinear Figures. 1. Enumeratio linearum tertii ordinis. 2. Tractatus de quadratura curvarum. London.

1706

Optice: sive de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus et Coloribus Lucis. Libri III. Latine reddidit Samuel Clarke, A.M.; accedunt Tractatus II ejusdem Authoris de Speciebus et Magnitudine Figurarum Curvilinearum, Londini. 4°.

1707

Arithmetica universalis sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber. Londini. 4°.

1711

Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones ac Differentias cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis, Londini. 4°.

1713

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica; Editio II, auctior et emendatior. Cantabrigiae. 4°.

1714

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, auctore Isaaco Newtono, equite aurato. Editio ultima, auctior et emendatior. Amstelodami. 4°.

1717

Opticks: or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light, 2d Edition, London. 8°.

1719

Optice: sive de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus et Coloribus Lucis. Libri III. Latine reddidit Samuel Clarke, A.M. Editio secunda, auctior. Londini. 4°.

1720

Universal Arithmetick: or a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution, translated by Joseph Raphson, F.R.S., and revised and corrected by Samuel Cunn. London. 4°.
Traité d'Optique sur les Réflexions, Refractions, Inflexions, et les Couleurs de la Lumière, traduit de l'Anglais par M. Costes. Sur la Seconde Edition, augmentée par l'Auteur. A Amsterdam.

1721

Opticks; or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light, 3rd Edition, corrected. London. 8°

1722

Traité d'optique sur les Réflections, Réfractions, Inflexions, et les Couleurs de la Lumière, traduit par Coste, sur la seconde Edition angloise, augmentée par l'auteur. Seconde Edition française, Paris. 4°.

Arithmetica Universalis; sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber. Editio II, in qua multa immutantur et emendantur, nonnulla adduntur. Londini. 4°.

1723

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Editio ultima, cui accedit Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones ac Differentias: cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis. Amstelodami. 4°.

1726

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Editio tertia aucta et emendata. Londini. 4°.

1728

Optical Lectures Read in the Publick Schools of the University of Cambridge, Anno Domini 1669. By the late Sir Isaac Newton, Then Lucasian Professor of the Mathematicks. Translated into English out of the Original Latin. London.

Universal Arithmetick; or a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. Translated by Joseph Raphson, F.R.S. and revised and corrected by Samuel Cunn. Second Edition, very much corrected. London.

The Chronology of Ancient Kingdoms Amended, with short Chronicle from the First Memory of Things in Europe, to the Conquest of Persia by Alexander the Great. London. 4°.

Sir Isaac Newton's Chronology Abridged by Himself. London. 4°. *De Mundi Systemate Liber*, Londini. 4°.

1729

Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World. Translated into English by Andrew Motte. 2 vol. London. 8°.

Isaaci Newtoni, Eq. Aur. In Academia Cantabrigiensi Matheseos olim Professoris Lucasiani Lectiones Opticae. Annis 1769, 1770 et 1771. In Scholis publicis habitae: Et nunc primum ex MSS, in lucem editae. Londini. 4°.

1730

Opticks: or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light, fourth Edition, corrected. London. 8°.

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Editio IV, Donick, Londini, 2 vol. 8°.

1731

De Mundi Systemate Liber; Opus diu integris suis Partibus desideratum in usum Juventutis Academicæ. Editio secunda, Londini. 4°.

1732

Arithmetica Universalis: sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber. Editio nova. Lugduni Batavorum. 4°.

1733

Observations upon the Prophecies of Holy Writ, particularly the Prophecies of Daniel, and the Apocalypse of St. John. London.

1736

Methodus Fluxionum et Seriarum Infinitarum. London.

The Method of Fluxions, and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines, translated from the Latin Original not yet made publick: with a Perpetual Comment, consisting of Annotations, Illustrations, and Supplements, by John Colson, F.R.S. London. 4°.

1737

Ad Danielis prophetae vaticinia, nec non Sancti Joannis apocalypsin observationes. Opus postumum. Ex anglica lingua in Latinam convertit et adnotationibus quibusdam et indicibus auxit Guilelmus Luderman, Amstelodami. 4°.

1739-42

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Auctore Isaaco Newtono, Ec. Aurato. Perpetuis Commentariis illustrata, communi Studio P.P. Thomae Le Seur et Francisci Jacquier, Ord. Min. Genevae. T. I. 1739, T. II. 1740, T. III. 1742.

1740

Optice: sive de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus et Coloribus Lucis. Libri III. Latine reddidit Samuel Clarke, A.M. cum indice copiosissimo. Lausannae et Genevae, 4°.

Optice: sive de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus et Coloribus Lucis. Libri III, cui accedunt ejusdem *Lectiones Opticae*, et Opuscula omnia ad Lucem et Colores pertinentia, interprete Samuele Clarke. Graecii. 4°.

La Méthode des Fluxions et de Suites infinies, par M. le Chevalier de Newton, traduite par Jean Louis Leclerc, Comte de Buffon, Paris. 4°.

1741

Arithmetica Universalis sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber. Amstelodami, 2 vol. 4°.

1744

Opuscula Mathematica, Philosophica et Philologica, collegit partimque Latine vertit ac recensuit Johannes Castillioneus, Jurisconsultus, Lausannae, 3 vol. 4°.

1745

Two Treatise of the Quadrature of Curves, and Analysis by Equations of an Infinite Number of Terma, explained; containing the Treatises translated into English, with large Commentary, in which the Demonstrations are supplied where wanting, the Doctrine illustrated, etc., by John Steward, Prof. Mathematicks, Aberdeen. 4°.

1752

Arithmetica Universalis, sive de Compositione et Resolutione Arithmetica. Commentata, illustrata et aucta, auctore A. Loochi. Mediolanum Marellum.

1759

Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle, par feu Madame la Marquise du Chastellet. Paris. 2 vol. 4°.

1760

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Perpetuis Commentariis illustrata, communi Studio P.P. Thomae Le Seur et Francisci Jacquier, Ord. Min. Editio altera, longe accuratior et emendatior. Coloniae Allobrogum. 3 vol. 4°.

1769

Universal Arithmetick: or a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. The whole illustrated and explained in a Series of Notes, by Theaker Wilder, D.D., T.C.D. London. 8°.

1773

Opera omnia optica. Continens: *Optices libri tres;* accedit ejusdem *Lectiones Opticae*, et *Opuscula omnia ad Lucem et Colores pertinentia.* Sumpta ex Transactionibus Philosophicis, Ed. II. Patavina. Padua. 4°.

1777

Mathematical Principles of Natural Philosophy, Translated, and illustrated with a Commentary, by Robert Thorp, D.D. Archdeacon of Northumberland. London roy. 4°.

1779-85

Opera quae exstant Omnia, Commentariis illustrabat Samuel Horsley, R.S.S. 5 vol. Londini. 4°.

1787

Optique de Newton, Traduction nouvelle, faite par M*** (Jean Paul Marat) sur la dernière Edition originale. Dédiée au Roi, par M. Beauzée, Editeur de cet Ouvrage, l'un des Quarante de l'Académie Française. 2 vol. Paris. 8°.

1794

Opuscula Mathematica Philosophica et Philologica, Lausanne, 3 vol. 4°.

1801

The Mathematical Principles of Natural Philosophy, translated by Andrew Motte, with Newton's System of World; new Edition, with Life, carefully revised and corrected by William Davis, 3 vol. London, 8°.

1802

Mathematical Principles of Natural Philosophy, translated, and illustrated with a Commentary, by Robert Thorp, D.D., Archdeacon of Northumberland, Second Edition, London. 4°.
Arithmétique Universelle, traduite du Latin, avec des Notes explicatives, par Noël Beaudoux, 2 vol. Paris. 4°.

1803

The Mathematical Principles of Natural Philosophy, translated by Andrew Motte, with Newton's System of World; new Edition, with Life, carefully revised and corrected by William Davis. 3 vol. London. 8°.

1822

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Editio nova, summa cura recensita. Glasgae, 4 vol. roy. 8°.

1830

An Historical Account of two Notable Corruptions of Scripture in a Letter to a Friend. London.

1833

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Editio Secunda Glasgoviensis, summa cura recensita J.M.F. Wright. Glasgae. 2 vol. 8°.

1841

An Historical Account of two Notable Corruptions of Scripture in a Letter to a Friend. London.

1850

The Mathematical Principles of Natural Philosophy. translated by Andrew Motte, with Newton's System of World, and Life, by N.W. Chittenden, New York. 8°.

1854

Mathematical Principles of Philosophy. Sections I, II, III with Notes and Illustrations, also Problems, principally intended as Examples of Newton's Methods, by Percival Frost, Pr.F.R.S. London 8°.

1860

Enumeration of Lines of the Third Order, Generation of Curves by Shadows, Organic Description of Curves, and Construction of Equations by Curves, translated from the Latin, with Notes and Examples, by C.R.M. Talbot, M.P., F.R.S.

1863

Mathematical Principles of Natural Philosophy. Sections, I, II, III, with Notes and Illustrations, also Problems, principally intended as Examples of Newton's Method, by Percival Frost, Pr., F.R.S. Second edition enlarged. London. 8°.

1871

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Reprint of the third Edition, for Sir William Thomson and Hugh Blackburn, Professors of Natural Philosophy and Mathematics in the University of Glasgow. Glasgow. 4°.

1872

Sir Isaac Newtons Mathematische Principien der Naturlehre. Mit Bemerkungen und Erläuterungen herausgegeben von Prof. Dr. I. Ph. Wolfers. Berlin. 4°.

1889

Mathematical Principles of Natural Philosophy. Sections I, II, III, with Notes and Illustrations, also Problems, principally intended as Examples of Newton's Methods, by Percival Frost, Pr., F.R.S. Third Edition. London. 8°.

1883

Mathematical Principles of Natural Philosophy. Sections I, II, III, with Notes and Illustrations, also Problems, principally intended as Examples of Newton's Methods, by Percival Frost, F.R.S., Fourth Edition. London. 8°.

1900

Mathematical Principles of Natural Philosophy. With Notes and Illustrations, also Problems, principally intended as Examples of Newton's Methods, by Percival Frost, Pr., F.R.S. Fifth Edition. London. 8°.

1915

Matematicheskie Naceala Naturalnoi Filosofii. Perevod Akad. A.N. Krilova. Petrograd. *Zameceaniia na Knigu Proroka Daniila i apokalipsis sv. Ioanna.* Petrograd. (Traducătorul e necunoscut).

1925

Principii di Filosofia Naturale. Teoria della Gravitazione, Con note critiche sullo sviluppo dei concetti della meccanica. Per cura di F. Enriques e Ugo Forti.

1927

Optika ili Traktat ob Otrajeniiakh, Prelomleniiakh, Izghivaniiah Tsvetah Sveta. Perevod 3-go angliiskogo izdaniia 1721 g. s primeceaniiami S.I. Vavilova. Moskva-Leningrad.

1932

Newton's Principia, 2 deelen Met 39 afbeeldingen tusschen tekst en 1 portrait. Beth H. I. E.

1934

Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of World. Translated into English by Andrew Motte in 1729. The translation revised and supplied with an historical and explanatory appendix, by Florian Cajori, Berkeley, California.

1936

Matematicheskie Naceala Naturalnoi Filosofii. Sobranie Trudov Akademika A.N. Krilova. t. VII. Moskva.

1937

Matematicheskie Raboti. Metod Fluksii i Beskonecinih Piadcv e Prilozheniem ego k gheometrii Krivin. Perevod s latinskogo D.D. Morduhai-Boltovskogo.

1946

Lekții po Optike. Perevod, Kommentarii i Redakția Akademika S.I. Vavilova. Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR.

1954

Optika ili Traktat ob Otrajeniakh, Prelomleniiakh, Izghivaniiah, i Tsvetah Sveta. Perevod s tretvego angliiskogo izdaniia 1721 g. s primeceaniiami S.I. Vavilova. Izdanie vtoroe, prosmotrennoe G.S. Landsbergom. Moskva. 8°.

ADNOTĂRI

p. 11. *Prefața la ediția I*, scrisă de *New t o n* expune scopul și programa lucrării. În concepția sa rostul cercetării naturii este « să reducă fenomenele naturale la legi matematice ». Deci scopul cărții este « cultivarea matematicii întrucît ea privește filozofia ». De aceea el spune că nu se ocupă cu cele cinci puteri: pîrghia, scripetele, roata cu sul, planul înclinat și șurubul care formau preocupările celor vechi, ci cu forțele naturii, cum este greutatea, forțele elastice și în general forțele de atracție și de respingere. Acestui mod de tratare a mecanicii îi dă numele de *principiile matematice ale filozofiei*, numire care justifică și titlul cărții. Fiindcă « orice dificultate a filozofiei constă în a găsi din fenomenele de mișcare forțele naturii și din aceste forțe să demonstrăm celelalte fenomene », el își propune rezolvarea acestei probleme în cartea I și a II-a, determinînd din fenomenele observate forțele centrale, iar în a III-a să descrie cu ajutorul acestora sistemul lumii. *New t o n* însă merge și mai departe și-și exprimă dorința ca « și celelalte fenomene naturale să se poată deduce din principiile mecanice prin același fel de a demonstra ».

Deosebit de importantă este concepția lui *New t o n* că « geometria se bazează pe practica mecanică și nu este altceva decît acea parte a mecanicii universale care tratează și demonstrează arta de a măsura precis ». Reluînd această idee profundă, *E i n s t e i n* (1879 — 1955) își construiește dinamica sub forma de geometrie a unui spațiu-timp curbat de materie.

p. 12. *Societatea Regală*. Este vorba de vestita *Royal Society*, cea mai veche societate științifică ce există și azi. Ea s-a dezvoltat din *Invisible College* din Londra, înființat în 1645 și a fost întemeiată de matematicianul *J o h n W a l l i s* (1616—1703), lordul *B r o u n c k e r* (1620—1684), arhitectul *C h r i s t i a n W r e n* (1632—1723) și fizicianul *R o b e r t B o y l e* (1627—1691). Societatea s-a constituit formal la 1660 și a fost recunoscută legal la 15 iulie 1662, cu sediul în Londra.

p. 12. În prima ediție a *Principiilor* prefața nu poartă iscălitura lui *New t o n* și nici data. În ediția a II-a găsim însă la sfîrșitul prefeței: « Dabam Cantabrigiae, e Collegio S. Trinitatis, Maii, 1686 » și semnătura « *I s. N e w t o n* ».

p. 13. *Prefața autorului la ediția a II-a*. Apariția *Principiilor* l-au făcut pe *New t o n* celebru. Atît importanța cărții, cît și faptul că ea s-a tipărit într-un număr mic de exemplare au adus cu sine epuizarea ei rapidă. În 1691 cartea nu se mai găsea pe piață. Aceasta l-a îndemnat pe *New t o n* să se gîndească la o nouă ediție. În acest scop el a făcut o mulțime de note marginale pe unul din exemplarele ce le posedă. Cu toate acestea apariția ediției s-ar fi amînat multă vreme, dacă nu s-ar fi găsit cineva care să se ocupe cu editarea ei, cum

făcuse H a l l e y cu ediția I. Cel care i-a solicitat lui N e w t o n permisiunea să retipărească *Principiile* pe cheltuiala și sub îngrijirea sa a fost episcopul R i c h a r d B e n t l e y, profesor la Cambridge și rector la Trinity College. N e w t o n își dădu învoirea, dar tocmai atunci B e n t l e y ajunsese în conflict cu universitatea din Cambridge astfel că nu se mai putu ocupa cu această chestiune. Pentru ca totuși apariția cărții să nu se amâne prea mult el îi recomandă lui Newton pe R o g e r C o t e s (1682—1716), profesor la Cambridge.

N e w t o n primi cu plăcere oferta tânărului matematician și-i trimise în 1709 un exemplar adnotat și cuprinzând adăugirile pe care le credea necesare, încredințînd lui C o t e s facerea corecturilor. C o t e s însă nu s-a mulțumit cu rolul de corector, ci s-a apucat să revadă cu un ochi critic întreaga operă. Refăcînd cu atenție toate calculele și citind șir cu șir cartea, el găsi o seamă de greșeli, asupra cărora atrase atenția lui N e w t o n. Analizînd demonstrațiile cerea încontinuu lămuriri de la N e w t o n, astfel că o vastă corespondență avu loc între ei. După patru ani, în 1713, ediția a II-a apăru revăzută temeinic și completată, cuprinzînd noi descoperiri și experiențe și expunînd mai pe larg unele capitole. Adăsurile mai importante sînt menționate în prefețele acestor ediții. Ne putem da seama cît de numeroase sînt aceste adăsururi și schimbări din observația următoare a lui W. W. R o u s e B a l l (*An Essay on Newton's Principia*. London, 1893, p. 74): «Posed în manuscris o listă de adăsururile și schimbările făcute în ediția a doua; schimbările sînt foarte numeroase; de fapt am aflat că din cele 494 de pagini ale primei ediții, 397 sînt mai mult sau mai puțin modificate în ediția a II-a. Schimbările mai importante sînt: noua prefață a lui C o t e s, propozițiile asupra rezistenței fluidelor, Cartea a II-a, secțiunea VII, propozițiile 34—40; teoria lunii în Cartea a III-a; propoziția despre precesiunea echinocțiilor, Cartea a III-a, propoziția 39; și propoziția despre teoria cometelor, Cartea a III-a, propozițiile 41 și 42».

Unele schimbări mai importante din cele din urmă două ediții față de întia vor fi menționate în notele ce urmează.

p. 4 *Prefața editorului la ediția a II-a.* La îndemnul lui B e n t l e y, C o t e s nu s-a mulțumit cu revizia din punct de vedere științific a *Principiilor*, ci și-a propus să apere filozofia lui N e w t o n atît împotriva cartezienilor, cît și împotriva atacurilor leibnizienilor. De aceea a cerut lui N e w t o n învoirea de a scrie o prefață, a cărei necesitate o menționează în scrisoarea sa către acesta din 18 februarie 1713: «Cred că ar fi potrivit ca pe lîngă o apreciere a cărții și a îmbunătățirii sale să adăugăm cîte ceva îndeosebi în ce privește felul de filozofare întrebuintat și prin care acesta se deosebește de al lui D e s c a r t e s și al altora, adică demonstrînd mai întîi principiul folosit. Aș dori nu numai să afirm aceasta, ci să o și evidențiez printr-o scurtă deducere a principiului gravitației din fenomenele naturii într-un mod popular ca să poată fi înțeles de cititorii obișnuiți și să poată servi în același timp ca o exemplificare pentru ei a metodei întregii cărți» (*Edleston, Correspondance of Sir Issac Newton and professor Cotes*. London, 1850, pp. 151, 154). El voia deci să combată atît teoria vîrtejurilor lui D e s c a r t e s, cît și să apere teoria gravitației împotriva atacurilor lui L e i b n i z, care-l învinuia pe N e w t o n că reintroduce în filozofie «calitățile oculte» ale lui A r i s t o t e l. C o t e s nu amintește în prefață numele lui L e i b n i z, dar face aluzie la el prin cuvintele «al altora».

C o t e s își începe prefața comparînd cele trei feluri de a trata fizica: a lui A r i s t o t e l, a lui D e s c a r t e s și a lui N e w t o n, arătînd defectele primelor două și avantajul celei de-a treia. Fizica lui A r i s t o t e l, care nu putu rezista atacurilor decisive ale lui G a l i l e u nu-și mai avea pe timpul lui N e w t o n decît foarte puțini adepți întîrziati. Ea a fost înlocuită pe încetul de fizica lui D e s c a r t e s, care a început să se răspîndească pe continent imediat după ce au apărut *Principia Philosophiae* (1644) ale acestuia. D e s c a r t e s explica mișcarea corpurilor cerești cu ajutorul unui fluid universal, care ocupă întreg spațiul și în

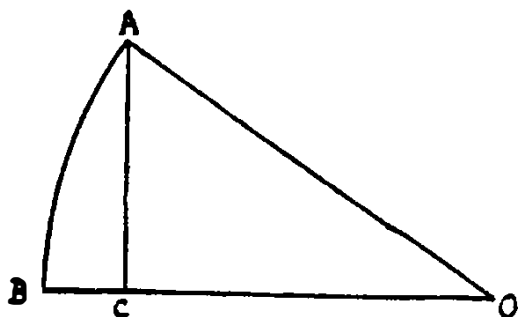
vîrtejurile căruia se rotesc corpurile cerești. Această teorie a vîrtejurilor se pîdea pe timpul apariției ediției a II-a a *Principiilor* lui New t o n și în Anglia. Ea avea avantajul de a fi simplă și intuitivă, fiindcă oricine își poate imagina fără dificultate rotația astrelor în aceste vîrtejuri « la fel ca o corabie fără pînze și fără vîsle ». Acestei imagini fizica lui New t o n îi opunea concepția contrară că astrele se mișcă în vid susținute de forța gravitațională ce emană de la materie și a cărei cauză nu se cunoaște. Acest fel de a vedea nu putea fi înțeles de majoritatea cititorilor care nu erau familiarizați cu gîndirea matematică abstractă și care se lăsau ușor convinși de leibnizieni că se încearcă introducerea din nou în fizică a calităților oculte. Nu numai Leibniz respingea ideea forțelor de atracție universală, ci și lui Huygens i se părea prea îndrăzneță, scriindu-i în această privință lui Leibniz: « Mă mir că dl. New t o n s-a trudit să edifice pe o ipoteză atît de puțin probabilă și de îndrăzneță o întreagă teorie a acțiunilor corpurilor cerești ».

Teoria lui Descartes a fost răspîndită îndeosebi prin *Traité de Physique* a lui Rohault, apărută în 1671. Această carte a fost tradusă în latinește de Theophile Bonet și tipărită la Geneva în 1674, apoi la Londra în 1682. Samuel Clarke din Cambridge, « prieten și elev al lui New t o n », scoase în 1697 o nouă ediție a cărții lui Rohault, cu titlul *Physica*. Ediția din 1710 a acestei traduceri cuprindea note adiționale în care Clarke explica teoria lui New t o n în așa fel că în realitate notele erau o respingere a textului. Sub această formă cartea putea fi utilizată atît de cartesieni care întrebuițau textul lui Rohault, cît și de newtonieni, care foloseau notele lui Clarke. În 1730 a apărut ultima ediție în englezește a cărții lui Clarke.

Se pare că teoria lui New t o n cîștigă teren chiar în Anglia numai cu încetul, datorită notelor lui Clarke. O privire clară asupra răspîndirii ideilor lui New t o n în Anglia nu se poate avea din cauză că părerile contemporanilor sînt contradictorii. În această privință e interesantă observația lui Voltaire, care a vizitat Anglia în 1727 și care a devenit unul din cei mai mari admiratori și adepți a lui New t o n: « Un francez care sosește la Londra găsește o mare schimbare în filozofie, ca și în alte lucruri. El lasă lumea plină și o află goală. La Paris vedeți universul compus din vîrtejuri și materie subtilă, la Londra nu vedem nimic de acest fel ». (*Éléments de la philosophie de Newton*, Paris, 1738). În alt loc, același Voltaire scrie însă că deși New t o n a mai trăit 40 de ani după apariția *Principiilor*, totuși la moartea sa nu avea în Anglia mai mult de 40 de aderenți. Pe continent teoria lui Descartes s-a menținut pînă pe la mijlocul veacului al XVIII-lea, cînd a fost înlocuită prin teoria lui New t o n, astfel că în 1743 D'Alembert putea scrie în celebra *Dynamique* că secta lui Descartes a dispărut complet.

Leibniz, urmînd în această privință pe Descartes, nu admitea nici vidul, nici atracția universală și nici greutatea. În privința vidului el scrie: « Toți aceia care sînt pentru vid, se lasă conduși mai mult de imaginație, decît de rațiune. Cînd eram tînăr eu încă admiteam vidul și atomii, dar rațiunea m-a îndepărtat de ele ». În privința atracției universale, îi scrie lui Huygens: « În ce privește cauza pe care New t o n o atribuie marelor, eu sînt tot atît de puțin de acord cu ea ca și cu toate celelalte teorii ale sale. pe care el le stabilește în baza principiului atracției, care mi se pare absurd ». Referitor la greutate, Leibniz se exprimă astfel: « Atît mercurul, cît și apa sînt mase de materie grea poroasă prin care pătrunde multă materie fără greutate și care nu rezistă în mod sensibil, cum este în aparență aceea a razelor de lumină și a altor fluide insensibile... fiindcă e o ficțiune curioasă a considera totul ca materie grea ».

p. 16. Prefața lui Cotes. *Simus versus*. În principii se întîlnesc cîteva expresii matematice, care azi nu se mai întrebuițează și care nu pot fi traduse textual în romînește, fiindcă terminologia noastră matematică s-a format după ce acestea ieșiseră din uz. Un astfel de termen



este *sinus versus*, care nu are echivalent românesc și pe care a trebuit să-l păstrăm în traducere. Se numește *sinus versus* partea din raza cercului cuprinsă între arc și sinusul lui. Fie OB raza cercului, AC sinusul arcului AB ; deci BC este *sinus versus*-ul. Spre deosebire de acesta raza BO se numește *sinus totus*. Diferența dintre *sinus totus*, adică raza cercului și *sinus versus* se numea *sinus complementi*, adică cosinus.

Pentru a nu înmulți în mod inutil numărul adnotărilor dăm aici o listă a termenilor întrebuințați de *Newton* împreună cu echivalentul lor modern pe care l-am întrebuințat în traducere:

duplicata ratio = pătratul raportului;

subduplicata ratio = rădăcina pătrată a raportului;

triplicata ratio = cubul raportului;

ratio dimidiata = raportul rădăcinii pătrate;

subtriplicata ratio = rădăcina cubică a raportului;

quadruplicata ratio = puterea a patra a raportului;

sesquuplicata ratio = puterea $3/2$ a raportului;

subsesquuplicata ratio = puterea $2/3$ a raportului;

sesquialtera ratio = raportul de $3/2$.

reciprociter in subduplicata ratio = în raport invers cu rădăcina pătrată. Termenul *proportio* fiind folosit de *Newton* în unele cazuri în înțelesul de raport, iar nu de proporție, l-am tradus în acele cazuri cu acel termen. Pentru expresia *ex aequo perturbata* nu am găsit termen modern corespunzător, de aceea l-am tradus prin expresia *prin înmulțirea celor două proporții*, care corespunde sensului expresiei latinești.

Termenii geometrice neuzitați azi i-am tradus astfel:

latus rectum = parametru;

latus transversum = latura transversală, adică axa mare a unei conice;

latus quadratum = latura al cărei pătrat, sau rădăcina pătrată;

latus cubicum = latura al cărei cub, sau rădăcina cubică;

latus quadrato-quadratum = rădăcina a patra.

Mai amintim aici că *Newton* întrebuințează termenul *trapezum* în sensul lui *Euclid* (*Elemente*, I, def. 22), înțelegând prin el orice patrulater care nu este pătrat, dreptunghi, romb sau romboid, deci poate fi trapez sau trapezoid. De asemenea, cuvântul *bisectoare* este întrebuințat de *Newton* uneori în alt sens decât cel de azi, ceea ce de altfel reiese din text.

p. 16. *Natura gravitației*. Din considerațiile sale asupra gravitației universale, *Cotes* ajunge la concluzia că «gravitatea aparține tuturor corpurilor», considerînd-o drept o proprietate generală a corpurilor la fel cu extinderea, mobilitatea și impenetrabilitatea. În această privință *Cotes* este în dezacord cu *Newton*, care totdeauna a fost împotrivă acestui fel de a vedea. Astfel într-o scrisoare adresată lui *Bentley*, *Newton* scrie: «De multe ori vorbiți despre gravitate ca de ceva esențial și inerent materiei. Vă rog să nu-mi atribuiți această noțiune, deoarece cauza gravității este ceva ce eu nu am pretenția să cunosc, și deci ar cere mult timp ca să o studiem» (*Works of Richard Bentley*, vol. 3. London, 1838, pp. 210–11). Iar într-o altă scrisoare: «Nu se poate concepe ca materia brută, neînsuflețită să poată, fără mijlocirea a ceva ce nu e material, acționa și afecta altă materie fără contact reciproc, cum s-ar întâmpla dacă gravitatea, în sensul lui *Epicur*, ar fi esențială și inerentă ei. Și aceasta e un motiv pentru care doream să nu-mi atribuiți o gravitate înnăscută. Faptul

că gravitatea ar fi înăscută, incertă și esențială pentru materie, astfel că un corp poate acționa asupra altuia la distanță prin vid, fără mijlocirea unui corp oarecare, asupra căreia și prin care acțiunea și forța sa pot fi transportate de la unul la altul, este pentru mine o absurditate atât de mare, încât eu cred că nici un om, care în chestiuni de materie are o facultate competentă de gândire, nu poate să o admită. Gravitatea trebuie să fie cauzată de un agent acționând în mod constant după anumite legi; dar am lăsat la aprecierea cititorilor mei dacă acest agent este material sau imaterial».

De altfel însuși Cotes mai târziu și-a dat seama că afirmația sa a fost prea cutezătoare, de aceea într-o scrisoare adresată lui Samuel Clarke, referindu-se la acest pasaj din prefață spune: «În acest pasaj scopul meu nu era să susțin că gravitatea este ceva esențial materiei, ci mai vîrtos să afirm că sîntem ignoranți în ceea ce privește proprietățile fundamentale ale materiei și că în ce privește cunoștințele noastre gravitatea poate pretinde tot atât de bine acest titlu ca și celelalte însușiri pe care le-am amintit. Căci eu prin proprietăți esențiale înțeleg acele însușiri fără de care nu poate exista nici una din celelalte aparținînd aceleiași substanțe; și nu voi încerca să arăt că ar fi imposibil ca vreuna din celelalte proprietăți ale corpurilor să existe fără extindere».

Acțiunea la distanță. Lui Cotes i se atribuie și faimoasa *actio in distans* potrivit căreia un corp acționează asupra altuia, situat la o distanță oarecare de el, direct, fără intervenția vreunui mediu ce s-ar găsi între masele atractive. Este adevărat că în prefața sa Cotes nu vorbește de vreo acțiune la distanță, nici nu spune că spațiul interstelar ar fi vid, dar arată că mișcările planetelor nu pot avea loc decît dacă se elimină materia subtilă a vîrtejurilor lui Descartes. Mai departe afirmă că dacă spațiul dintre stele este plin cu o materie fluidă aceasta nu are inerție, deci cei care admit materia fluidă «prin cuvinte înlătură vidul în realitate îl repun».

În nici un caz ideea acțiunii la distanță nu se poate atribui lui Newton, care în repetate rînduri se declară împotriva ei, ca în scrisoarea menționată mai sus către Bentley. Răspîndirea ideii unei atari acțiuni se datorește în mare parte lui S. Clarke, care în adnotările ultimei ediții a tratatului de fizică a lui Rohault enunță că imensul spațiu interstelar este lipsit de orice fel de materie. Mai târziu acțiunea la distanță a fost interpretată și în sensul că acțiunea unui corp asupra altuia, de exemplu atracția sau respingerea, se transmite instantaneu, ceea ce iarăși e contrar felului de a vedea a lui Newton.

În veacul al XVIII-lea, acțiunea la distanță a fost adoptată și în explicarea fenomenelor electrice. Astfel Ch. A. Coulomb admitea că sarcinile electrice se atrag sau se resping printr-o acțiune la distanță. Faraday a ajuns cel dintîi la ideea că această concepție e greșită și că acțiunile electrice și magnetice sînt acțiuni moleculare care se propagă din aproape în aproape între particulele în contact ale unui mediu izolat, pe care el l-a numit dielectric. Maxwell a arătat apoi că această acțiune are loc în timp.

p. 20. *Orbita cea mare.* Copernic în cartea sa *De revolutionibus orbium coelestium*, 1543, Lib. I. Cap. VII, numește orbita Pămîntului în jurul Soarelui «orbita cea mare», nu fiindcă ea ar fi cea mai mare, ci din cauza importanței sale pentru astronomie. În același sens este folosită această numire de Kepler și apoi de Cotes și Newton.

p. 22. *Alfons al X-lea de Castillia* (1226—1284) a fost un protector al științelor și mai ales al astronomiei. La observatorul său de lângă Toledo a adunat un mare număr de astronomi, în mare parte arabi, care au pregătit *Tablele astronomice* apărute în 1252. Se spune că după ce astronomii i-au explicat sistemul lumii al lui Ptolemeu, găsindu-l prea complicat, s-ar fi exprimat: «Dacă D-zeu mi-ar fi cerut părerea cînd a creat lumea, i-ași fi dat sfaturi

mai bune», ceea ce era cît pe aci să-l facă să-și piardă tronul. La această exigență a lui *Alfons* face aluzie *Cotes*, vrînd să spună că însuși regele *Alfons* ar fi mulțumit cu sistemul lui *Newton*.

p. 23. *Rolul lui Bentley*. În scrisoarea sa din 1713 către *Newton* în privința prefeței sale *Cotes* amintește numai pe cartesieni și face aluzie la leibnizieni, pe care vrea să-i combată. El nu amintește pe materialști pe care-i atacă mai ales la sfîrșitul prefeței numindu-i «hoardă impie». Pentru a înțelege atacul vehement al lui *Cotes* împotriva materialștilor e necesar să menționăm rolul pe care l-a avut *Bentley* în scoaterea acestei ediții și mai ales scopul pe care-l urmărea prin aceasta. Ca om al bisericii *Bentley* își propusese să combată cu argumente științifice ateismul care se răspîndise în cercurile aristocratice engleze după «revoluția glorioasă» din 1688. Drept ocazie foarte bună pentru începerea luptei împotriva ateismului a servit testamentul lui *R. Boyle*, care a lăsat o sumă de 50 de funți sterlingi preotului care va ține opt predici «pentru apărarea credinței creștine împotriva necredincioșilor notorii... fără ca prin aceasta să atingă vreo problemă religioasă discutabilă». La aceasta s-a angajat *Bentley* care, pentru a-și duce la bun sfîrșit misiunea i-a cerut lui *Newton* argumente pentru a putea dovedi că lumea nu este eternă, ci a fost creată de o ființă exterioară care o și menține. Același scop l-a avut în vedere cînd l-a îndemnat să scoată ediția a doua a *Principiilor* oferind ajutorul material necesar. Lui *Bentley* nu-i convenea că ediția întâia a fost editată de ateul *Halley* și de aceea nu cruță nici o jertfă ca ediția a doua să fie scoasă sub controlul și directivele sale. De aceea, îi încredință lui *Cotes* revizia cărții ca să îndepărteze din ea orice urmă de materialism pentru ca ea să se prezinte «ca o cetate fortificată împotriva atacului ateștilor», astfel ca să nu se poată lua «din alt loc mai bine decît din această tolbă săgețile împotriva hoardei impii».

p. 24. *Prefața autorului la ediția a treia*. *Henry Pemberton* (1694—1771) a fost profesor de medicină la Gresham College în Londra și membru al Societății Regale. Admirator al lui *Newton* a îngrijit scoaterea ediției a III-a a *Principiilor* și a scris *View of sir Isaac Newton's philosophy*, London, 1728.

James Pound (m. 1724) a fost preot la Wansted în Essex și membru al Societății Regale. A făcut observații astronomice importante îndeosebi asupra planetelor Jupiter și Saturn.

Kirch Gottfried (1639—1710) elev al lui *Hevelius*, a ajuns în 1700 astronom la nou înființata Academie de Științe din Berlin. În această calitate în 1706 a înființat un observator astronomic unde a făcut observații importante. Observațiile sale asupra cometei din 1680 de care amintește *Newton*, au apărut mai întîi în Germania, apoi în Anglia. Amintim aici numai *Observationes insignis cometae sub finem 1680 visi Coburgi Saxoniae habitae*, lucrare apărută în *Philosophical Transactions* din 1714.

James Bradley (1692—1762), profesor de astronomie la universitatea din Oxford, a ajuns după moartea lui *Halley* astronom la Greenwich, apoi membru al Societății Regale. A fost unul din cei mai de seamă astronomi dela începutul veacului al XVIII-lea. Lui i se datorește între altele descoperirea aberației astronomice în 1729 și o explicație a nutației. Este cunoscută de asemenea formula sa empirică pentru corecția refracției.

p. 27. *Definiții*. În expunerea *Principiilor* *Newton* folosește metoda deductivă sau sintetică deși modul în care a ajuns la rezultatele cuprinse în ele a fost în primul rînd cel analitic sau inductiv. În această privință el adoptă procedeul întrebuițat de autorul *Elementelor*, care pornind de la definiții, axiome și postulate expune elementele geometriei într-o înlănțuire logică riguroasă. De aceea *Newton* întrebuițează forma de expunere antică, geometrică neglijînd geometria analitică a lui *Descartes*, ca și trigonometria și calculul fluxiunilor pe care în epoca redactării cărții sale îl stăpînea pe deplin.

Analogia între *Principiile* lui *New t o n* și *Elementele* lui *E u c l i d* nu este însă numai formală. În adevăr *New t o n* nu a păstrat numai forma de expunere a lui *E u c l i d* ci, la fel ca autorul *Elementelor*, a încercat să pună pe aceleași baze solide întreg edificiul mecanicii, cum a făcut *Euclid* cu geometria. Încercări de a stabili bazele diverselor părți ale fizicii în același fel cu ale geometriei s-au făcut deja în antichitate. Însuși *E u c l i d* a încercat acest lucru cu optica, dar fără succes. Abia mai târziu i-a reușit lui *A r c h i m e d e* să precizeze legile fundamentale ale staticii după modelul geometric.

În *Principiile* sale *New t o n* face același lucru pentru dinamică. La fel ca *E u c l i d* și *A r c h i m e d e* el își începe cartea cu definiții, al căror număr este de opt și în care precizează noțiunile fundamentale ale dinamicii, ca masa, cantitatea de mișcare și diversele feluri de forțe. Acestea le urmează o *scolie*, adică o observație sau comentariu privind cele enunțate, în care-și propune să lămurească noțiunile de timp, spațiu și mișcare absolută și relativă. Vin apoi cele trei axiome ale mișcării, cunoscute în general sub numirea de legile lui *New t o n*, iar după acestea șase corolare.

La fel ca în cazul *Elementelor* lui *E u c l i d*, definițiile și axiomele lui *New t o n* au format obiectul unor studii profunde și unele din ele au fost criticate. S-au făcut și încercări de a le înlocui cu altele. Cu toate acestea și azi, după aproape trei secole fenomenele macrocosmice obișnuite sînt studiate tot în baza mecanicii lui *New t o n*.

În ce privește definițiile lui *New t o n* li s-a adus obiecțiunea că nu sînt alese cu destulă grijă, nefiind potrivit să se definească masa cu ajutorul densității, forța prin intermediul acțiunii și să se introducă noțiunea de forță de inerție, care ar fi o noțiune scolastică de prisos. Ne vom ocupa de aceste critici în notele ce urmează.

p. 27. *Definiția I.* Noțiunea de masă diferită de cea de greutate s-a folosit de către unii fizicieni înaintea lui *New t o n*; Amintim aici pe *K e p l e r* care folosește termenul de *moles* pentru masă, iar pe cel de *pondus* pentru greutate. *H u y g e n s* discutînd forța centripetă arată că dacă mai multe particule se mișcă pe același cerc avînd viteze egale, forțele centripete sînt între ele precum greutatea lor, sau precum cantitățile lor solide, înțelegînd prin cantități solide masele. *New t o n* este însă acela care a definit-o și a precizat-o cel dintîi.

New t o n consideră masa ca o mărime determinată de cantitatea de materie a unui corp și o definește cu ajutorul noțiunii de densitate și volum, dar fără să definească nici materia nici densitatea. Prin urmare, pe lângă folosirea noțiunii geometrice de volum, el introduce două noțiuni fizice noi, pe cea de materie și pe cea de densitate, pe care le consideră drept noțiuni cunoscute.

Referitor la noțiunea de materie *A. N. K r î l o v* remarcă: «Ce este materia nu se poate defini prin cuvinte; se pot aduce numai exemple că lemnul, fierul, hîrtia pe care scriu cu creionul și altele sînt materie; se pot arăta proprietățile materiei atît de importante pentru chimie ca și pentru fizică, spunînd: se numește materie fiecare din cele 92 de corpuri simple și izotopii lor, sau atomii și moleculele lor și de asemenea orice corp compus sau amestecul unor astfel de corpuri cu corpurile simple sau cu altele compuse» (*A. N. K r î l o v, Niuton i ego znacenie mirovoi nauke, în Isaac Niuton, pod redakții akademika S. I. Vavilova, Moscova-Leningrad, 1943 p. 1*).

Definiția masei cu ajutorul densității a fost criticată de *E. M a c h*, care scrie: «În ce privește concepția de masă, observăm că formularea lui *New t o n*, care definește masa ca o cantitate a materiei unui corp, definită de produsul dintre volum și densitate, este nenorocoasă. Deoarece nu putem defini densitatea decît ca masa unității de volum, ne aflăm într-un cerc vicios» (*Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, ed. VIII, Leipzig, 1921, p. 188). *A. N. K r î l o v* observă că din acest cerc vicios «totuși se iese cu ușurință definind densitatea ca un număr abstract, care arată raportul dintre greutatea corpului și greutatea unui volum de apă egal cu al

corpului la temperatura de 4°C. Acest număr se determină prin așa-numita cântărire hidrostatică; el nu depinde nici de volumul corpului nici de accelerația forței gravitaționale și este o constantă absolută care caracterizează corpul» (loc.cit.).

H. C r e w aduce în această privință următoarele precizări: « Pe vremea lui N e w t o n densitatea și greutatea specifică erau întrebuițate ca sinonime și densitatea apei era luată în mod arbitrar ca unitate. Cele trei unități fundamentale întrebuițate... erau densitatea, lungimea și timpul, în loc de masa noastră, lungimea și timpul. Într-un astfel de sistem este și natural și logic admisibil să definim masa în funcție de densitate » (*The Rise of modern Physics*, Baltimore, 1928, p. 124). Criticii lui M a c h i se mai poate răspunde că N e w t o n fiind atomist nu a înțeles prin densitate masa unității de volum, ci particulele cuprinse în unitatea de volum. El știa că dacă un volum de gaz se comprimă la jumătate, masa acestuia rămâne aceeași. Prin urmare a tras concluzia naturală că masa unui corp este determinată de numărul de particule care-l compun. Este evident că această definiție nu ne prezintă masa ca o măsură a inerției ca la D e s c a r t e s: ea este o măsură invariabilă a materiei.

Dar N e w t o n nu numai că definește masa, ci ne dă imediat un mijloc experimental de a o măsura, prin greutatea unui corp. El însuși a făcut măsurări cu ajutorul pendulului și a aflat că ea este proporțională cu greutatea.

M a c h critică definiția masei dată de N e w t o n și chiar încearcă să o înlocuiască cu alta. El spune: «Adevărata definiție a masei poate fi dedusă numai din relațiile dinamice ale corpurilor», ajungând la următoarea definiție: «se numesc corpuri de mase egale, două corpuri care acționînd unul asupra altuia își comunică accelerații egale și opuse». În general, după M a c h raportul maselor a două corpuri ce acționează unul asupra celuilalt este dat de raportul invers al accelerațiilor reciproce. În acest fel M a c h consideră masa numai ca un coeficient al unei ecuații, neglijînd multiplele forme în care apare masa.

Această tendință de a elimina orice ipoteză prealabilă din definiția masei a condus la o tendință spre formalism. Pe această cale s-a ajuns la definiția masei cu ajutorul legii a doua a lui N e w t o n ca raportul dintre forță și accelerație, noțiunea de forță fiind cunoscută din statică prin mijlocirea greutății. În această definiție masa nu mai poate fi interpretată ca o cantitate de materie primind o semnificare energetică. În teoria relativității această masă energetică nu mai rămîne constantă ca masa lui N e w t o n, ci inerția ei crește cu viteza corpului ajungînd la valoarea infinită cînd viteza acestuia se apropie de viteza luminii.

Mai amintim că N e w t o n consideră masa sub două aspecte: atît ca un conglomerat de particule materiale ce opun o rezistență schimbării stării de mișcare (*masa de inerție*), cît și ca un număr de particule ce exercită o forță asupra corpurilor vecine (*masa atractivă*).

În *Principii* se întrebuițează adesea cuvîntul *corp* în sensul de *masă*, iar termenul de *loc* în înțelesul de *poziție*.

p. 27. *Definiția II.* Definiția cantității de mișcare este aceeași ca la D e s c a r t e s. În plus N e w t o n menționează proprietatea aditivă a acesteia, ceea ce neglijează în cazul masei.

p. 27. *Definiția III.* *Forța ce rezidă în materie* este *forța de inerție*. Inerția este proprietatea fundamentală a materiei și o mărime ce nu are inerție nu este materie, în sensul lui N e w t o n. Această definiție scoate în evidență noțiunea de masă ca o măsură a inerției.

p. 26. *Definiția IV.* N e w t o n definește aici forța în mod dinamic considerînd ca dată definiția statică cunoscută din antichitate sub forma de presiune sau tensiune. Cele două definiții se pot pune de acord prin mijlocirea principiului inerției și a legii a doua a lui N e w t o n.

Față de definiția newtoniană definiția metafizică a lui Leibniz, nu prezintă nici un progres, dimpotrivă aceasta din urmă înseamnă un pas înapoi spre fizica peripateticiană: « Prin forță sau putință (potentia) eu nu înțeleg posibilitatea sau simpla proprietate, care nu e decât posibilitatea de a acționa imediat, și ea însăși e ceva mort, ci înțeleg prin ea un lucru intermediar între putință și acțiune, care cuprinde în sine o tendință, un act, o entelechie, fiindcă forța trece de la sine în acțiune dacă nu o împiedică nimic » (Leibniz, *Philosophische Schriften*, herausgeben von Gerhardt, Bd. IV, Berlin, 1880, p. 472).

Urmind întru cîtva pe Leibniz, Lagrange dă o definiție mai clară a forței, indicînd și felul cum trebuie măsurată: « În general se înțelege prin forță sau putință (puissance) cauza, oricare ar fi ea, care imprimă sau tinde să imprime mișcare corpului la care e presupusă aplicată; și de asemenea forța sau putința trebuie evaluată prin cantitatea de mișcare imprimată. În starea de echilibru forța nu are efect actual; ea nu produce decât o simplă tendință spre mișcare, dar trebuie totdeauna măsurată prin efectul pe care l-ar produce dacă nu ar fi oprită » (*Mécanique analytique*, Paris, 1788, t.I, Première partie, Section I).

p. 30. *Scolie*. În scolia ce urmează după definiții Newton explică sensul ce-l atribuie noțiunilor de timp, spațiu, loc, și mișcare, pe care le împarte în absolute și relative. Aceste noțiuni au fost obiectul de cercetare nu numai al fizicienilor ci și al filozofilor, atît înainte cît și după Newton. Definițiile date de Newton au fost analizate îndeosebi în epoca mai nouă și au condus la concepția modernă despre spațiu și timp.

Newton consideră spațiul și timpul ca fiind obiective, punîndu-se în această privință pe poziție materialistă. Împrumutînd însă de la Gassendi concepția de spațiu absolut separat de materie și pe cea de timp absolut independent de materie dă acestor categorii caracter metafizic. Plecînd de la faptul că orice mișcare (mecanică) este o schimbare continuă a poziției, care nu poate avea loc decât într-un timp ce variază și el în mod continuu, Newton concepe spațiul absolut ca un mediu imaterial, invariabil, imobil și invizibil, iar timpul ca ceva ce se scurge în mod continuu. Euler a remarcat dificultățile ce le întîmpină aceste definiții, totuși ele au fost acceptate de materialistii francezi din veacul al XVIII-lea, ca și de majoritatea fizicienilor din acea epocă. Astfel Laplace concepe spațiul în felul următor: « Să ne imaginăm un spațiu nelimitat, imobil și penetrabil pentru materie; față de părțile acestui spațiu real sau ideal raportăm prin gînd poziția corpurilor » (*Mécanique céleste*, Paris, 1805, vol. IV).

Kant se ridică împotriva ideilor materialiste despre spațiu și timp considerîndu-le ca forme ale cunoașterii cărora nu li se atribuie decât o realitate transcendentă. El considera aceste categorii ca anterioare și independente de experiență, deci ca noțiuni date *a priori*.

Un progres important pentru dezvoltarea ideilor materialiste asupra spațiului și timpului reprezintă geometria neeuclidiană a lui Bolyai și Lobachevski. Mai ales savantul rus a legat proprietățile geometrice ale spațiului de cele fizice ale materiei. Lobachevski nu numai că a combătut concepțiile idealiste ale lui Kant, ci a infirmat și ideile metafizice ale geometriei euclidiene și mecanicii newtoniene despre spațiu și timp. În acest fel s-a pregătit calea spre concepția modernă materialist-dialectică despre spațiu și timp, potrivit căreia spațiul și timpul sînt formele de bază ale existenței materiei. Nu există timp și spațiu separate de materie; spațiul și timpul deosebit de materie sînt o abstracție goală.

În strînsă legătură cu problema spațiului și timpului este cea a mișcării absolute și relative.

Încă în antichitate școala din Elea (Parmenide, Zenon etc.) și-a pus problema studierii noțiunii de mișcare în sine. După cum observă Enriques (*La relatività del movimento nell' antica Grecia*, în *Periodica di matematiche*, serie IV, vol. I, No. 2, 1912), negarea existenței mișcării de către eleați, care susțineau că o săgeată nu se mișcă în aer, nu este altceva decât o afirmare a relativității mișcării. Pe de altă parte, atomiștii (Leucip, Democrit din Abdera) susțineau existența unei mișcări absolute față de vid.

În evul mediu problema mișcării absolute și relative a fost reluată de Nicolaus de Cusa, care referă mișcarea la sferă stelelor fixe, și de Osiander care în prefața cărții lui Copernic *De revolutionibus orbium coelestium*, 1543, afirmă că teoria lui Copernic e o pură ipoteză matematică ce ilustrează relativitatea geometrică a mișcării. Mai târziu Galileu revine la concepția lui Democrit admițând mișcarea absolută față de vid. Existența vidului este fundamentală pentru legea inerției fiindcă mișcarea uniformă și în linie dreaptă pentru un sistem apare curbă în general referită la alt sistem de corpuri. Relativitatea mișcării e susținută mai ales de către Descartes, care neagă existența vidului. El consideră mișcarea drept o variație relativă a distanței dintre două corpuri.

Newton scoate în evidență deosebirea dintre mișcarea de translație și cea de rotație. La fel ca Galileu el recunoaște relativitatea mișcării de translație susținând că mișcarea absolută de translație nu cade sub simțurile noastre și nici nu poate fi determinată din mișcarea relativă. Newton crede însă că se poate determina mișcarea absolută a corpurilor în rotație. El consideră două sfere legate una de cealaltă cu o sfoară, care se învârtesc în jurul centrului lor comun de greutate. Din tensiunea firului se poate afla « atît cantitatea, cît și direcția acestei mișcări circulare în orice spațiu gol imens cînd nu se află nimic extern sau sensibil la care să se refere mișcarea sferelor ». Newtonienii au conchis de aici că mișcarea de rotație fiind absolută, Newton a fost condus să deducă relativitatea spațiului, fiindcă altfel acesta ar avea o structură dublă, anume relativă pentru mișcarea rectilinie, și absolută pentru mișcarea de rotație.

Controversa în jurul mișcării absolute și relative s-a continuat și după apariția *Principiilor*. Referitor la această chestiune a avut loc o vastă corespondență între Huygens și Leibniz, începută în 1694. Huygens admite de la început numai mișcarea relativă ca reală, pe cînd Leibniz mai întîi se pare că admite mișcarea absolută și abia mai târziu își modifică părerea. În tot cazul, în scrisoarea sa către Clarke, din 1715, Leibniz se ridică împotriva spațiului și a mișcării absolute; în baza principiului stabilit de el al rațiunii suficiente: « Spațiul este ceva absolut uniform și fără lucrurile ce se găsesc în el un punct al spațiului nu diferă de altul. De aici urmează că, admițînd că spațiul este în sine însuși ceva dincolo de ordinea lucrurilor între ele, nu poate exista o cauză pentru care Dumnezeu, păstrînd pozițiile reciproce ale corpurilor, să fi așezat corpurile în spațiu într-un anumit mod și nu altfel, și pentru care toate acestea nu s-au făcut invers, de exemplu, ca un schimb de la răsărit la apus. Dar dacă spațiul nu e altceva decît această ordine sau raport și propriu-zis nu e nimic fără corpuri, decît posibilitatea ca corpurile să fie situate, cele două stări, una care există și cealaltă presupusă inversată, nu diferă de loc între ele ».

Ideile lui Newton despre mișcarea absolută au fost însușite îndeosebi de Euler, care acceptă drept axiomă că « orice corp, chiar în lipsa altor corpuri, se află fie în repaus fie în mișcare, adică în repaus absolut și în mișcare absolută » (*Teoria motus corporum solidorum*, Cap. I). De asemenea el postulează spațiul absolut: « Cine neagă spațiul absolut ajunge în mare încurcătură. Deoarece el se simte constrîns să abandoneze repausul și mișcarea absolută ca o vorbă deșartă fără înțeles, nu e numai forțat să părăsească legile mișcării, dar chiar să afirme că nu există nici un fel de legi ale mișcării ».

Kant merge și mai departe și încearcă să arate că trebuie să existe undeva în univers un corp central, al cărui centru de greutate este punctul cardinal de referință al mișcării tuturor corpurilor: « Dacă în spațiul infinit, în care s-au format toți Sorii din Calea Laptelui, luăm un punct, în jurul căruia, nu știu din ce cauză, s-a început formarea naturii din haos, acolo va trebui să se formeze masa cea mai mare și un corp de o atracție enormă, care prin aceasta e în stare să silească toate sistemele în formație pe o sferă imensă din jurul său, să cadă spre el ca spre un centru, și să creeze în jurul său exact același sistem, după cum a

făcut în mic aceeași substanță elementară, care a format planetele în jurul Soarelui» (*Naturgeschichte des Himmels*).

Ideea că ar fi posibilă punerea în evidență a mișcării absolute de rotație a dus la experiența pendulului lui Foucault (1850), considerată de contemporani ca o demonstrație a rotației absolute a pământului. Abia mai târziu E. Mach a arătat că această experiență nu relevă decât mișcarea relativă față de stelele fixe, iar nu față de vid.

Către sfârșitul veacului al XIX-lea problema fixării unui sistem de referințe al mecanicii deveni acută. Reech enunță că legea inerției nu e nici principiu, nici nu provine din experiență ci e pur și simplu o convenție. El vrea să pună bazele unei statici relativiste « fără ca să trebuiască vreodată invocată nici ipoteza rigidității corpurilor, nici aceea a unei stări absolute de mișcare rectilinie uniformă în spațiu » (*Cours de Mécanique*, 1852). Mai târziu J. M. C. Duhamel se exprimă astfel: « Mișcarea absolută admisă în general pînă aici este o pură himeră, fondată pe o altă himeră, aceea a unui spațiu etern și absolut, care face din timp o ființă eternă independentă de orice creație » (*Méthodes dans les sciences de raisonnement*, Paris, 1870, IV, p. 454).

Aproape în același timp C. Neumann relevă că principiul inerției pretinde existența unui corp absolut rigid situat într-un loc bine determinat și invariabil, față de centrul căruia trebuie să referim toate mișcările: « fie-mi permis să numesc acest corp pe scurt corpul alfa. Ar trebui apoi să adăugăm că prin mișcarea unui corp nu înțelegem schimbarea locului său față de pământ sau soare, ci variația poziției sale față de acel corp alfa » (*Über die Prinzipien der Galilei-Newton'schen Theorie*, Leipzig, 1870).

E. Mach în cartea sa *Die Mechanik in ihrer Entwicklung, historisch-kritisch dargestellt*, 1883, supune unei critici severe noțiunea de mișcare și ajunge la concluzia că întocmai după cum nu putem deosebi mișcarea de translație absolută de cea relativă, la fel nu putem face distincție între mișcarea de rotație absolută și cea relativă: « O rotație relativă față de stelele fixe dă naștere într-un corp la forțe de îndepărtare de la axă. Dacă rotația nu e relativă față de stelele fixe, aceste forțe de îndepărtare nu există ».

La sfârșitul veacului trecut problema mișcării relative și absolute ajunse într-o fază decisivă, devenind dintr-o problemă de mecanică una generală de fizică. Pe deoparte experiențele lui Faraday au arătat că fenomenele de inducție electromagnetică nu pot fi explicate decât considerînd mișcarea ca relativă, pe de altă parte căutarea unui corp alfa a dus la ideea de a considera drept un astfel de corp eterul material al lui Newton, Huygens și Hooke, prin care se propagă lumina, sau eterul nematerial al lui J. C. Maxwell și H. R. Hertz, prin care se propagă toate fenomenele electromagnetice. Unii fizicieni considerau eterul ca fiind în repaus, Pământul și corpurile cerești deplasîndu-se prin el fără să-l antreneze, pe cînd alții, ca G. Stokes susțineau că el este antrenat de corpurile cerești la fel ca apa prin care plutește un vapor. Experiența trebuia să decidă care din aceste două păreri e justă. În adevăr dacă Pământul nu duce cu sine eterul, trebuie să se poată constata existența unui vînt eteric. Experiența a fost făcută la Cleveland (Ohio) de către Michelson și Morley în 1887, cu ajutorul interferometrului. Rezultatul experienței a fost că nu se poate observa nici un fel de vînt eteric, prin urmare dacă eterul există, el este antrenat de Pământ în mișcarea sa. Acest rezultat negativ a fost considerat ca nesatisfăcător de lumea științifică de atunci, fiindcă admitînd eterul în mișcare nu se poate explica fenomenul aberației luminii descoperit de Bradley în 1725. Totuși experiența lui Michelson-Morley era atît de precisă, încît rezultatul ei nu se putea nega.

Pentru a explica rezultatul negativ al experienței lui Michelson și Morley în 1895, Fitzgerald din Dublin și independent de el H. A. Lorentz din Leida au emis ipoteza că un corp ce se află în mișcare de translație se contractă în direcția mișcării sale. Utilizînd această idee Albert Einstein pune bazele relativității restrînse, negînd existența eterului

ca o ipoteză de prisos, precum și mișcarea absolută ca neavînd bază experimentală. Teoria lui E i n s t e i n pleacă de la două axiome. Întîia este că viteza luminii în vid este constantă și independentă de starea de mișcare a sursei. A doua, care exprimă propriu-zis principiul relativității restrîns, se poate exprima astfel: dacă un sistem de referință se mișcă față de un altul cu o mișcare rectilinie și uniformă, fenomenele fizice au loc în ambele sisteme după aceleași legi. În această teorie însă fiecare sistem își are timpul său, deci timpul este relativ, iar nu absolut cum îl credea N e w t o n. Relațiile dintre distanțele și timpurile unui sistem de referință față de un altul ce se mișcă cu o mișcare relativă, rectilinie și uniformă sînt date de formulele cunoscute sub numirea de transformările lui L o r e n t z.

p. 37. *Legea I.* Enunțul legii I a mișcării nu este exact același în toate trei edițiile lui N e w t o n ale *Principiilor*. În ediția întîia (1687) și a doua (1713) enunțul e următorul:

Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

În ediția a treia (1726) enunțul e acesta:

Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Această lege, numită de obicei legea inerției a fost formulată mai întîi de G a l i l e u în celebrele sale cărți *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, Firenze, 1632, și *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Leida, 1638; în cazul mișcării corpurilor de pe Pămînt, apoi în formă generală și abstractă de către D e s c a r t e s în *Principia Philosophiae*, Amsterdam, 1644. Ea a fost generalizată pentru mecanica cerească de către N e w t o n și enunțată, la fel ca celelalte două, sub o formă foarte precisă și prudentă. El nu putea să-i dea decît o formulare relativă, fiindcă starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă sînt respectiv în funcție de starea de mișcare a sistemului de referință. Prin urmare legea inerției nu e valabilă în mod riguros decît pentru un sistem de referință în repaus absolut. Un astfel de sistem însă nu există, fiindcă nici un corp din natură nu se găsește în repaus absolut. Din acest motiv legea inerției a dat loc la multe discuții.

A. E i n s t e i n supunînd acest principiu unei critici pîofunde se exprimă în felul următor asupra valabilității lui: «După cum știm legea fundamentală a mecanicii lui G a l i l e u - N e w t o n cunoscută sub numirea de legea inerției se exprimă astfel: un corp destul de îndepărtat de alte corpuri perseverează în starea sa de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă. Această lege ne lămurește nu numai asupra mișcării corpurilor, ci și asupra corpuilor de referință sau a sistemelor de coordonate admisibile în mecanică, ce pot fi întrebuintate în descrierile mecanice. Corpuri, asupra cărora legea inerției poate fi aplicată cu mare aproximație sînt stelele fixe vizibile. Dacă folosim un sistem de axe de coordonate legat de pămînt, orice stea fixă descrie față de el în decursul unei zile (siderale) un cerc de o rază enormă, în contrazicere cu enunțul legii inerției. Dacă admitem această lege, trebuie să referim mișcările numai la sisteme de coordonate față de care stelele fixe nu efectuează mișcări de rotație. Un sistem de coordonate, a cărui stare de mișcare este astfel, încît față de el e valabilă legea inerției îl numim sistem de coordonate galilean. Numai pentru un sistem de coordonate galilean sînt valabile legile mecanicii lui G a l i l e u - N e w t o n» (*Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*. Gemeinverständlich, 1921, ed. 13, p. 7).

N e w t o n admitea că mișcarea accelerată absolută poate fi constatată cu ajutorul forțelor de inerție. Enunțul legii inerției ar avea deci valabilitate absolută dacă s-ar putea constata mișcarea absolută a unui sistem accelerat. Potrivit teoriei relativității generale acest lucru e imposibil, fiindcă toate sistemele de referință indiferent de starea lor de mișcare sînt echivalente, pentru formularea legilor naturii. Pentru formularea legii inerției în această teorie trebuie să înlocuim spațiul tridimensional al lui E u c l i d cu un spațiu-timp cu patru dimen-

siuni care este curbat de masele pe care le conține. Într-un astfel de spațiu neeuclidian un punct material descrie o *linie geodezică* prin care se înțelege linia cea mai scurtă între două puncte din acest spațiu.

p. 37. *Legea II.* Enunțul legii a doua este același în toate trei edițiile *Principiilor*:

Lex II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

E de observat că aici prin «*motus*», *New t o n* nu înțelege mișcarea, ci cantitatea de mișcare, deci forța f este definită ca variația cantității de mișcare, adică a produsului dintre masa m și viteza v . Fiindcă în concepția lui *New t o n* masa rămâne neschimbată, avem formula de definiție a forței $f = \frac{d}{dt}(mv) = m \frac{dv}{dt} = ma$, unde a este accelerația.

Remarcăm însă că în cazul masei variabile chiar definiția lui *New t o n* $f = \frac{d}{dt}(mv)$ rămâne valabilă.

Formularea limpede și precisă a principiilor dinamicii de către *New t o n* constituie încoronarea nenumăratelor eforturi făcute de-a lungul veacurilor pentru a explica, plecând de la legi simple, fenomenele complicate ale mișcării corpurilor. În antichitate aceste eforturi sînt sintetizate în doctrina lui *Aristotel* care poate fi rezumată astfel:

1. Pentru ca un corp să poată fi menținut în stare de mișcare este necesar ca asupra lui să acționeze în permanență o forță. Dacă forța este constantă mișcarea corpului va fi uniformă.

2. Forța ce acționează asupra unui corp este proporțională cu viteza acestuia.

Ideile lui *Aristotel* s-au menținut în evul mediu, făcîndu-li-se unele corectări. Astfel prin mecanica lui *Aristotel* era greu de explicat cum își păstrează un proiectil în aer starea de mișcare. În acest scop prin veacul al IV-lea s-a admis ipoteza că forța cu care lansăm proiectilul comunică acestuia un «impuls» (*impetus*) care întreține mișcarea pînă ce acesta se consumă complet.

O idee vagă despre principiul inerției aflăm abia la *Nicolaus de Cusa* care admite că o sferă perfect netedă aruncată de-a lungul unui plan orizontal de asemenea neted își continuă mișcarea pînă la infinit, apoi la *Kepler*, care concepe inerția ca o tendință a materiei de a-și păstra starea de repaus.

Galileu a enunțat cel dintîi primele două legi ale mișcării, în cazul particular al corpurilor grele. El ajunge la principiul inerției observînd că o sferă ce cade fără frecare pe un plan înclinat se urcă pe un alt plan înclinat pînă la aceeași înălțime. De aici trage concluzia că pe un plan orizontal sfera s-ar mișca la infinit. De asemenea enunță că un proiectil, dacă ar putea fi sustras acțiunii greutății, și-ar continua mișcarea în linie dreaptă la infinit. Tot el definește forța drept o cauză a accelerației, înțelegînd prin forță greutatea. *Descartes* a enunțat legea întîia, dar a doua era pentru el neclară.

Meritul lui *New t o n* este că a generalizat enunțurile lui *Galileu* și a considerat drept forță care produce accelerație nu numai greutatea, ci orice cauză care schimbă starea de mișcare a unui corp producînd accelerație, cum ar fi atracția planetelor de către Soare și între ele, forțele electrice, magnetice etc. În definiția ce o dă *New t o n* forțele se măsoară prin accelerația pe care o produc. Raportul dintre forța și accelerația unui corp este *masa de inerție* a corpului. Spre deosebire de aceasta raportul dintre greutatea corpului și accelerația lui în cădere liberă se numește *masa gravitațională* a acestuia. Experiența a arătat că masa de inerție și cea gravitațională sînt proporționale între ele.

Ma ch critică formularea primelor două legi ale lui *New t o n* obiectînd că cea dintîi este cuprinsă în a doua. În adevăr din formula $f = m \frac{dv}{dt} = ma$ rezultă că dacă $f = 0$,

atunci și $m \frac{dv}{dt} = a = 0$, deci corpul asupra căruia nu acționează nici o forță urmează legea inerției. Critica lui *M a c h* însă este neîntemeiată fiindcă, după cum observă *E n r i q u e s*: «pentru a înțelege adevăratul spirit al construcției newtoniene, trebuie să admitem că legea a doua avea pentru el un sens imediat, exprimând o relație între trei concepții definite în mod independent: forța, masa și accelerația, și că numai în dezvoltarea ulterioară a doctrinei acest sens se poate extinde în parte în mod convențional, potrivit principiului *conservării proprietăților formale*, pe care *H a n k e l* l-a enunțat ca un criteriu regulator al progresului gândirii matematice» (*I. N e w t o n, Principii di filosofia naturale*, Roma, 1925, p. 173).

Acad. *S. I. V a v i l o v* (*Isaac Newton*, traducere, Editura de stat, 1947, p. 164) face observația că în formularea legilor mișcării nu intră în mod evident noțiunea de masă. În adevăr, legea a doua spune că variația cantității de mișcare este proporțională cu forța, adică $\frac{d(mv)}{dt} = f$, ceea ce e scris sub forma $d(mv) = f dt$. În aceste expresii, variația cantității de mișcare reprezintă variația unei mărimi independente egale cu impulsul forței. Dacă folosim legea a doua pentru definiția masei, noțiunea de masă se poate generaliza.

În adevăr, experiențele lui *L e b e d e v* au arătat în mod neîndoielnic că lumina exercită o presiune asupra corpurilor pe care cade, deci produce asupra lor un impuls. Presiunea exercitată de lumină pe un cm^2 al unui ecran absolut negru va fi ϵ/c^2 , unde ϵ este energia luminoasă pe această suprafață într-o secundă, iar c viteza luminii. Potrivit legii a doua acest impuls este egal cu variația cantității de mișcare $d(mv)$. În cazul luminii ce cade pe ecran viteza ei inițială este c , iar cea finală este zero, fiindcă lumina este oprită de ecranul care o absoarbe. În consecință, avem relația $d(mv) = mc - m_0 = \frac{\epsilon}{c^2}$, de unde masa luminii este dată de formula

$$m = \frac{\epsilon}{c^2}.$$

În felul acesta sîntem conduși să atribuim luminii masă. Dacă atribuim la fel masă oricărei forme de energie, îndeosebi energiei cinetice, putem arăta că masa m a unui corp ce se mișcă cu viteza v e diferită de masa m_0 a corpului în repaus, relația dintre ele fiind

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

V a v i l o v continuă astfel: «Masa devine o mărime relativă, întrucît noi nu putem în nici un caz să spunem cu certitudine ce înseamnă viteza absolută v . Aceste concluzii deduse din a doua lege a lui *N e w t o n*, înfățișată într-o formă generală, coincid cu concluziile teoriei relativității a lui *E i n s t e i n*. Din acest punct de vedere se poate spune că legea își păstrează valabilitatea și în «noua mecanică» a teoriei relativității. Dacă presupunem însă de la început că m nu depinde de viteză, ceea ce putem afirma pe baza experienței cel puțin pentru mișcările mecanice, care au viteze mici, atunci ecuația se transformă într-o formă obișnuită» (op. cit., p. 166).

În ce privește punerea de acord a forței statice considerată de *N e w t o n* ca primitivă și a celei dinamice introdusă de el, *Enriques* (*I. N e w t o n, Principii di filosofia naturale*, p. 174) face următoarele considerații. Considerînd forța ca o presiune sau tensiune «legea a doua capătă o semnificație numai referitor la mișcarea începătoare, compaiînd forța exercitată asupra unui punct legat cu accelerația pe care o primește cînd această legătură se rupe: în adevăr nu se poate măsura forța în mod static atunci cînd ea acționează asupra unui corp în mișcare. Dar luînd legea astfel în înțeles restrîns, ea nu exprimă însă ceea ce trebuie

postulat în știința generală a mișcării; dar e ușor de văzut că adăugînd principiul inerției și postulînd în mod implicit compunerea mișcărilor, ansamblul celor două legi primește tocmai aceea semnificație largă ce rezultă din întrebuintarea pe care i-o dă *Newton*. În acest scop trebuie să avem în vedere că teoria lui *Newton* e dominată de considerația forțelor de poziție, adică independente de viteză: cu alte cuvinte se folosește noțiunea de cîmp de forțe, în care forța ce acționează asupra unui punct determinat se poate măsura ca o tensiune sau presiune exercitată asupra unității de masă, ce vrea să rămînă imobilă în acel punct. De aceea credem că cele două legi ale lui *Newton* se pot explica astfel: fiind dat un cîmp de forțe, să considerăm un punct material ce se mișcă în el; dacă forțele sînt nule mișcarea este rectilinie și uniformă, altfel la viteza de inerție se adaugă în orice poziție *P* aceea viteză infinitesimală pe care i-ar comunica-o forța ce acționează în *P*, plecînd de la o stare inițială de repaus (și aceasta natural în sens vectorial, potrivit legii de compunere a lui *Galileu*). *Enriques* tinde să descopere în felul cum întrebuintează *Newton* primele două legi ca implicit un principiu de inerție generalizat, care s-ar releva și în gîndirea lui *Galileu*, la baza descoperirii principiului inerției.

Lagrange (*Mécanique analytique*, t.1, p. 245) face legătura între forța măsurată cu ajutorul cantității de mișcare, cînd ea acționează în timp, și între măsura forței dată de legea a doua, prin următorul raționament. Deoarece cantitatea de mișcare mv exprimă forța finită a corpului de masă m în mișcare cu viteza v , la fel produsul masei cu accelerația exprimă forța elementară sau născîndă. Aceasta dîin urmă ca măsură a sforțării pe care corpul poate să o facă datorită vitezei elementare pe care a luat-o sau tinde să o ia, constituie presiunea; pe cînd dacă o considerăm drept o măsură a forței sau putinței capabile să imprime această viteză, ea constituie forța motoare.

p. 37. *Legea III*. Formularea legii a treia, numită și principiul acțiunii și reacțiunii, este aceeași în cele trei ediții:

Lex III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Legea a treia este dedusă din experiență și constituie generalizarea observațiilor și intuițiilor lui *Descartes* și *Huygens* în cazurile particulare ale ciocnirii și forței centrifuge născute prin învîrtirea în jurul unui centru a unui corp greu legat de o sfoară. Principiul a fost formulat pentru întia oară sub forma generală și în mod clar mai întii în *Principii* de către *Newton*.

Referitor la principiul acțiunii și reacțiunii *Newton* dă următoarea lămurire în scrisoarea sa către *Cotes* în legătură cu ediția a doua a *Principiilor*: « Dacă un corp oarecare ar putea atrage un alt corp situat în apropiere, dar el însuși n-ar fi atras cu aceeași forță de către acesta din urmă, atunci corpul care atrage mai puțin ar fi împins de celălalt înaintea lui și amîndouă ar începe să se miște cu accelerație *ad infinitum*, ceea ce contrazice legea întia a mișcării ».

Mach apreciază astfel importanța acestei legi: « Poate contribuția cea mai importantă a lui *Newton* privitoare la principii este egalitatea acțiunii și reacțiunii, a presiunii și contrapresiunii. Problemele privitoare la mișcarea corpurilor care se influențează reciproc nu se pot rezolva numai cu ajutorul principiilor lui *Galileu*. E necesar un nou principiu care determină tocmai acțiunea reciprocă » (loc. cit.).

p. 38. *Corolar I*. Principiul paralelogramului forțelor de asemenea a fost formulat mai întii în mod clar de către *Newton*, ca o consecință a legilor mișcării, în termenii următori:

Corollarium I. Corpus viribus conjunctis diagonales parallelogrami eodem tempore describere, quo latera separatim.

În traducerea noastră am folosit pentru «*viribus conjunctis*» expresia «sub acțiunea a două forțe unite», mai potrivită cu spiritul limbii românești.

Antichitatea cunoștea principiul compunerii vitezelor. Astfel în *Quaestiones mechanicae*, atribuite lui *Aristotel* întâlnim această lege enunțată precis în felul următor: «Dacă un mobil se mișcă în același timp cu două mișcări în așa fel că spațiile parcurse în același timp sînt într-un raport invariabil, mobilul se mișcă în linie dreaptă după diagonala paralelogramului care are drept laturi două linii ale căror lungimi sînt în acest raport». Dar potrivit axiomei dinamice lui *Aristotel* o forță constantă produce o mișcare uniformă și viteza unei astfel de mișcări e proporțională cu forța, prin urmare a cunoaște legea compunerii vitezelor însemna a cunoaște legea compunerii forțelor.

Mai târziu *Leonardo da Vinci*, *Stevinus* și *Roberval* au încercat să demonstreze această lege static, considerînd dinamica peripateticiană ca nesatisfăcătoare. În același timp cu *Newton* au enunțat principiul paralelogramului forțelor *Pierre Varignon* și *Lamy*. Întîiul enunță principiul într-o lucrare intitulată *Nouvelle Mécanique ou Statique*, apărută după moartea autorului, în 1725, sub forma unei teoreme: «se poate enunța astfel: *Momentul rezultantei a două forțe față de un punct oarecare luat în planul lor comun este egal cu suma algebrică a momentelor componentelor*. *P. Lamy* și-a exprimat ideile într-o scrisoare adresată în 1687 «à Monsieur de Dieulamant, Ingénieur du Roy, à Grenoble».

Comparînd raționamentele prin care au ajuns *Newton*, *Lamy* și *Varignon* la formularea legii paralelogramului forțelor, *P. Duhamel* scrie: «*Varignon* obține legea paralelogramului forțelor prin mijlocirea legii compunerii vitezelor și a acestei axiome: o forță este dirijată după viteza mișcării pe care o produce; ea este proporțională cu această viteză. *Newton* și *P. Lamy*, dimpotrivă, se folosesc de regula compunerii accelerațiilor și a postulatului următor: accelerația unui mobil este dirijată după forța care-l solicită și e proporțională cu această forță. Dintre aceste două principii pe întîiul îl considerăm ca o eroare gravă, pe al doilea ca un adevăr esențial» (*Les origines de la Statique*, Paris, 1906, tome II, p. 260).

Principiul paralelogramului forțelor are un caracter experimental atît în forma dată de *Varignon*, cît și în cea a lui *Lamy* și *Newton*. Totuși mai târziu *Daniel Bernoulli* a încercat să-i dea o demonstrație geometrică, considerîndu-l ca un adevăr geometric independent de orice experiență fizică. Demonstrația lui *Bernoulli* a fost studiată și criticată de *Mach* (l.c., p. 39).

p. 42. *Scolie.* La sfîrșitul capitolului care tratează despre axiomele sau legile mișcării *Newton* a pus o scolie, în care se ocupă cu verificarea experimentală a acestor legi. Ca exemplu convingător aduce mai întîi legile căderii corpurilor aflate de *Galileu*, care verifică primele două legi și principiul și corolarele ce se ocupă cu paralelogramul forțelor. Dar în timp ce în ediția întîia a *Principiilor* abia atinge această chestiune într-o singură propoziție, în ediția a treia îi dă o dezvoltare mai largă. Aceleași legi și corolare ne dau și perioada de oscilație a pendulului, verificată zilnic de orologiu.

Legea a treia este verificată de experiențele asupra ciocnirii corpurilor făcute în mod independent unul de altul de *Wallis*, *Wren* și *Huygens*, pe care-i menționează *Newton*.

Studiul sistematic al legilor ciocnirii se datorește îndemnului dat de Societatea Regală care în 1668 a instituit un premiu pentru cele mai bune lucrări privitoare la acest fenomen. Dintre lucrările primite au fost premiate cele ale lui *Wallis*, *Wren* și *Huygens* și au fost publicate în *Philosophical Transactions* din 1669. *Wallis* nu s-a ocupat decît cu ciocnirea corpurilor neelastice pentru care a dat formula

$$(m + m') u = mv + m'v',$$

unde v și v' sînt respectiv vitezele maselor m și m' dinainte de ciocnire, iar u viteza lor comună după ciocnire. Ch r. W r e n se ocupă numai de ciocnirea centrală a corpurilor elastice, enunțînd fără să demonstreze mai multe teoreme. Făcînd experiențe asupra pendulelor de mase diferite ajunse la formula

$$C = \frac{MV + mv - m(V - v)}{M + m},$$

unde C este viteza corpului de masă M după ciocnirea cu cel de masă m . H u y g e n s deduce pentru ciocnirea elastică relațiile

$$u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + n(v_2 - v_1)m_2}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - n(v_2 - v_1)m_1}{m_1 + m_2}.$$

Mai tîrziu H u y g e n s adaugă la lucrarea sa o completare, iar în 1703 scoate un studiu complet al ciocnirii corpurilor cu titlul: *De motu corporum percussione*. El aplică la ciocnirea corpurilor principiul conservării forței vii, pe care-l enunță sub forma următoare: « Suma produselor dintre mărimea fiecărui corp dur, multiplicată prin pătratul vitezei sale este totdeauna aceeași înainte și după întîlnire ».

În cît privește pe M a r i o t t e, N e w t o n face aici aluzie la lucrarea acestuia intitulată *Traité de la percussion ou choc des corps*, în care sînt expuse nu numai cercetările celor trei savanți menționați mai sus, ci și experiențele sale proprii. Această lucrare a lui M a r i o t t e a apărut la Leida în 1717, cînd s-au tipărit operele sale complete.

Fiind vorba de verificarea legii a treia pe care el a descoperit-o și a formulat-o exact, N e w t o n nu s-a mulțumit cu experiențele contemporanilor săi, ci le-a repetat el însuși cu mai multă precizie decît aceștia, corectînd-o în ce privește rezistența aerului. Ca rezultat al acestor experiențe pe care le descrie în scolie, el poate trage concluzia că « în acest fel legea a treia a fost verificată în ce privește ciocnirea și reflexia, prin teorie care e în acord perfect cu experiența ».

După ce arată că legea a treia se verifică și în cazul atracției, în care scop a făcut el însuși experiențe cu doi magneți, trece în revistă materialul experimental bogat pe care-l oferă mașinile mecanice. Scolia se termină cu următoarea observație importantă: « dacă apieciem acțiunea corpului activ prin produsul dintre forța și viteza aceluia, iar reacțiunea rezistenței din vitezele diverselor părți ale aceleia și ale forțelor de rezistență provenite din frecare, coeziune, greutate și accelerație, acțiunea și reacțiunea vor fi egale între ele în întrebuintarea oricărui instrument ».

Acad. K r î l o v are aici următoarea observație: « În ultimele cuvinte ale scoliei se poate descoperi nu numai principiul deplasării virtuale și aplicația lui generală la teoria echilibrului mașinilor, adică a sistemelor de corpuri complet legate sau cu un grad de libertate, ci se relevă în ele și esența principiului lui D'Alembert, dar atît de concis, încît numai geniul lui L a g r a n g e a fost capabil să exprime acest principiu general printr-o singură formulă matematică, care cuprinde în ea întreaga statică și dinamică ».

N e w t o n întrebuintează în această scolie adesea termenul de *forță* în sensul de *impuls*, adică de forță înmulțită cu timpul.

CARTEA I

p. 49. *Lema I, II, III. Metoda primelor și ultimelor rapoarte.*

Deși N e w t o n a aflat calculul fluxiunilor în 1666 și e foarte probabil că s-a folosit de el la demonstrarea teoremelor din *Principii*, totuși a evitat întrebuintarea lor în expunere, utilizînd metoda sintetică a vechilor geometri. Motivul pare a fi fost prudența excesivă de a nu

compromite noua teorie întrebându-se un calcul care, pe atunci, nu putea fi înțeles de majoritatea cititorilor. Astfel se explică pentru ce fluxionile nu intervin în *Principii* decât incidental, de exemplu în Cartea a II-a, lema II și în Cartea a III-a, lema III, unde amintește de două ori de « o cantitate fluentă a cărei fluxiune este... ». În acele demonstrații, în care intervine infinitul, se folosește de metoda primelor și ultimelor rapoarte, care în definitiv nu e altceva decât metoda trecerii la limită pe care o expune pe scurt în aceste leme.

p. 74. *Prop. XVI, Cor. 4. Distanța mijlocie.* Prin distanța mijlocie de la focarul elipsei se înțelege aici semi-axa mare, sau distanța SB de la focar la una din extremitățile axei mici BC . Această distanță coincide cu raza cercului de care e vorba.

p. 107. *Lema XXVIII. Ovale.* Newton încearcă să demonstreze că nici o figură de formă ovală nu admite o cvadratură exactă, adică aria unei astfel de curbe nu poate fi exprimată în numere raționale sau iraționale, rădăcini ale ecuațiilor algebrice cu coeficienți raționali, ci numai prin numere transcendente. Brougham și Routh (*Analytical View of Sir Isaac Newton's Principia*, London, 1855, p. 72) au arătat însă că există unele excepții, aducând ca exemplu curba

$$y^m = x^{(n-1)} (a^n - x^n),$$

unde m și n sînt numere întregi. Această curbă satisface condițiilor puse de Newton, totuși admite o cvadratură exactă. Astfel pentru a întreg și $m = n = 2$, aria curbei în intervalul $0 < x \leq a$ este:

$$A = \int_0^a 2y \, dx = -\frac{1}{3} \left[(a^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^a = \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{3/2}.$$

Scăpîndu-ne de radical obținem o ecuație algebrică de gradul al doilea privitoare la A . Prin urmare aria acestui segment, deși în general e irațională, nu este transcendentă pentru valori algebrice ale lui x . În cazul cînd $x = a$ se obține aria ovalei întregi $\frac{a^3}{3}$, care este rațională.

p. 109 și 110. *Prop. XXXI și Scolia. Problema lui Kepler.* Problema cu care se ocupă Newton aici provine de la Kepler (*Astronomia nova*, 1609) și constă în a determina în ecuația $x - e \sin x = z$, pe x admițînd că e și z sînt date. Astronomul J. C. Adams într-un articol, *On Newton's Solution of Kepler's Problem* în *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (London, vol. 43, 1882, pp. 43–49), publică o metodă rapidă de aproximație menționînd că ea « este exact echivalentă cu cea dată de Newton în *Principii*... dacă transcriem expresiile lui Newton în forma analitică modernă ». El descrie astfel metoda: « Ecuația ce trebuie rezolvată prin aproximații succesive este $x - e \sin x = z$, unde z este anomalia medie cunoscută, e excentricitatea, iar x anomalia excentrică ce trebuie determinată.

Să presupunem că x_0 este o valoare aproximativă a lui x , aflată fie prin estimare, prin construcție grafică, ori printr-un calcul grob preliminar, și fie $x_0 - e \sin x_0 = z_0$.

Atunci dacă $\delta x_0 = \frac{z - z_0}{1 - e \cos x_0}$ și $x' = x_0 + \delta x_0$, x' va fi o valoare cu mult mai

aproximativă a lui x decât x_0 . De asemenea, dacă punem $x' - e \sin x' = z'$ și dacă $\delta x' = \frac{z - z'}{1 - e \cos x'}$ și $x'' = x' + \delta x'$, atunci x'' va fi o valoare cu mult mai aproximativă a lui x decât x' ș.a.m.d. »

Cu problema lui Kepler s-au ocupat, după Newton, o mulțime de astronomi. În *Bulletin Astronomique*, Paris, vol. 17, 1900, pp. 37–47 se găsește o bibliografie a lucrărilor referitoare la această chestiune, cuprinzînd 123 lucrări.

p. 133. *Prop. XLV, Cor. 3. Mișcarea apsidelor pe orbite.* În ediția a II-a și a III-a a *Principiilor*, Newton adaugă fraza: «Apsida Lunii este aproximativ de două ori mai rapidă», adică de două ori unghiul $1^{\circ}31'28''$, ce reprezintă mișcarea progresivă a apsidei într-o revoluție a Lunei pe orbita sa. În ediția I, valoarea unghiului dat este de $1^{\circ}31'14''$. Vedem deci că valoarea calculată de Newton este abia jumătatea celei observate. Întîlnim aici celebra diferență dintre mișcarea observată și cea calculată a Lunii.

Newton a dat o atenție specială mișcărilor Lunii. Ea a jucat un rol important în însăși descoperirea legii gravitației, și asupra ei a încercat Newton să verifice această lege. Problema Lunii l-a preocupat timp de mai mulți ani și de multe ori se plîngea lui Halley că ea îi cauzează dureri de cap. Se știe că dacă luăm în considerare numai Pămîntul și Luna, legea atracției ar face ca Luna să descrie o elipsă invariabilă în jurul centrului comun de greutate al celor două corpuri. Aceasta este *problema celor două corpuri*, ce se poate rezolva complet cu ajutorul calculului. În studiul precis al mișcărilor Lunii însă nu putem lăsa deoparte nici influența considerabilă a Soarelui, nici pe cea a planetelor. Avem astfel *problema celor trei sau a mai multor corpuri*, care se poate formula precis, dar nu s-a putut rezolva cu mijloacele matematice de care dispunem. Din fericire însă de multe ori sînt suficiente soluții aproximative, care se pot împinge cît mai departe posibil.

Primii pași în această privință i-a făcut însuși Newton. El a arătat că din cauza atracției Soarelui linia nodurilor Lunii descrie o mișcare retrogradă, iar cea a apsidelor una progresivă. Rezultatele sale în această privință sînt o manifestare strălucită a geniului său creator. O mare parte din datele observațiilor le-a primit pe la 1694 de la astronomul Flamsteed (1646—1719) din Greenwich.

După părerea lui Cajori, lui Newton probabil i-a reușit să pună de acord teoria cu observația, deși nicăieri în *Principii* nu dă vreo explicație în această privință. În sprijinul observației sale Cajori citează observația lui Newton din Cartea a III-a, prop. XXIII: «Dar mișcarea apsidelor astfel aflată trebuie micșorată în raportul de 5 la 9, sau aproape de 1 la 2, dintr-o cauză pe care nu o pot expune aici». Pemberton, care a editat ediția a treia a *Principiilor*, i-a propus să adauge la propoziția menționată «o scurtă indicație asupra principiului din care se deduce regula cuprinsă în aceste șiruri», dar fără succes. Adams observă că dacă Newton ar fi dat atenția cuvenită cererii lui Pemberton «toate dificultățile împreunate cu mișcarea apogeei Lunii ar fi fost înlăturate». Mișcarea apsidelor Lunii rămase astfel o problemă deschisă.

Primii care au reluat problema au fost Clairaut și D'Alembert, cărora li se datorește explicația evecțiunii. A. C. Clairaut în lucrarea sa *Théorie de la lune*, Petersburg, 1752, aplică cel dintîi analiza modernă la mișcarea Lunii. Rezultatul calculului său a fost că perigeul trebuia să-și efectueze revoluția ca un nod, în 18 ani, pe cînd observația arată că ea se face în 9 ani. Neputînd explica această diferență el admise că legea atracției universale necesită un termen corectiv invers proporțional cu cubul distanței, care pentru distanțe mari ar fi neglijabil, ar deveni însă sensibil pentru distanța mică dintre Pămînt și Lună. Neputînd obține rezultat satisfăcător, Clairaut reveni la primele sale calcule, pe care le completează ajungînd la valori foarte apropiate de datele observației, ceea ce fu considerat ca un triumf al gravitației universale.

Teoria Lunii a fost continuată cu succes de Euler, Laplace, Poisson, Hansen, Delaunay, Adams etc. Laplace se ocupă amănunțit de această problemă în *Mécanique céleste*, 1799—1825, tome III, livre VII, pp. 169—303. Dintre celelalte lucrări merită să amintim îndeosebi *Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen* a lui P. A. Hansen, publicată în *Abhandlungen der mathem. phys. Classe der Sächs. Ges. der Wissenschaften*, Leipzig, vol. VI, 1864, vol. 7, 1865, apoi *Theorie de la lune*, 1860, a lui Delaunay, lucrările lui G. W. Hill, bazate în mare parte pe metode noi

de calcul, completate și perfecționate de Ernest Brown, și în sfârșit pe cele ale lui De Sitter.

Cu toate aceste lucrări excelente, mișcarea Lunii nici azi nu este deplin cunoscută. Se referă aceasta îndeosebi la accelerația seculară a Lunii, descoperită de Halley și confirmată de Dunthorne, Tobias Mayer și Lalande, care au aflat valori cuprinse între 6, 7 și 10.

Teoretic accelerația seculară a fost studiată mai întâi de Lagrange, apoi de Laplace, care a arătat că ea ar putea fi cauzată de micșorarea foarte înceată a excentricității orbitei pămîntești. Laplace află o accelerație seculară de 10, de perfect acord cu observațiile lui Dunthorne și Lalande. Problema părea astfel rezolvată, cînd ea a fost reluată de Baily în 1811, apoi de Airy în 1853 și 1857, în baza discuțiilor eclipselor de Soare cunoscute din antichitate. Pentru a explica aceste eclipse Airy ajunsese la concluzia că trebuie să atribuim accelerației seculare valoarea de 12 sau 13, deci mai mare decît cea aflată de Laplace. Adams, în 1853, dimpotrivă arată că valoarea accelerației ar fi de numai 6,1. Mai tîziu Newcomb admite 8,3, iar Tisserand obține 7.

În acest fel valoarea teoretică și cea observată a accelerației seculare nu sînt de acord, cauza diferenței lor nefiind cunoscută. Se pare că ea ar putea fi atribuită efectelor combinate ale mareelor și răcirii Pămîntului, cauzată probabil de micile schimbări periodice ale formei Pămîntului.

Rezultă din cele de mai sus că mișcarea Lunii nu este explicată exact pînă în prezent prin teoria gravitației.

p. 149. *Prop. LX. Două medii proporționale.* Dacă x și y satisfac proporției $a:x = x:y = y:b$, zicem că x și y sînt medii proporționale între a și b ; x este întîia, iar y a doua medie proporțională.

p. 171. *Prop. LXXV și Cartea III, Prop. VIII. Atracția între sfere.*

Acad. A. N. Krilov expune mai complet demonstrația lui Newton asupra atracției unui punct extern de către o sferă, cu ajutorul analizei moderne în *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, London, vol. 85, 1925, p. 571.

p. 157. *Prop. LXVI, Cor. 7. Aux.* Newton întrebuițează pentru afeliu termenul *aux* rămas din vechea astronomie ptolemaică și care azi nu se mai întrebuițează. El era definit ca punctul de pe orbita unei planete, în care ea e mai îndepărtată de centrul lumii. În astronomia lui Ptolemeu, *aux* avea înțelesul de apogeu. În sistemul heliocentric însă, în centrul sistemului planetei fiind situat Soarele, *aux* are înțelesul de afeliu, după cum l-am tradus aici.

p. 192. *Prop. XCVI. Viteza luminii.* Pe la sfîrșitul veacului al XVII-lea asupra luminii s-au stabilit două ipoteze, cea corpusculară a lui Newton și cea ondulatorie a lui Huygens. Newton admitea că lumina constă din particule foarte fine emise de corpul luminos, care se propagă în linie dreaptă și atingînd ochiul îl impresionează. Huygens dimpotrivă susținea că ea nu e altceva decît o mișcare de oscilație ce se propagă în toate direcțiile sub formă de unde printr-un eter material foarte fin și care pătrunde în toate corpurile. Fiecare din ele explica unele fenomene optice mai simplu, altele în mod mai complicat. Astfel teoria lui Newton explică foarte simplu propagarea luminii în linie dreaptă și reflexia, fenomene care devin mai complicate în teoria ondulatorie. Dimpotrivă, refracția se explică mai ușor cu teoria lui Huygens și mai greu cu cea corpusculară. Pentru a explica refracția luminii, Newton admite că viteza ei într-un mediu mai dens este mai mare decît într-unul mai rar, contrar de cum admitea Huygens. Cele două teorii și-au disputat multă vreme întîietatea, pînă ce în veacul al XVIII-lea, cei mai mulți fizicieni au adoptat teoria lui Newton,

din cauza autorității sale incontestabile. Cu toate acestea vreo câțiva savanți, printre care și Euler, susțineau ipoteza lui Huygens. La începutul veacului al XIX-lea, datorită îndeosebi descoperirilor lui Fresnel, teoria ondulatorie a început să câștige din nou teren. Pentru a tranșa definitiv discuția Jean Leon Foucault, în 1850, măsoară viteza luminii în apă și află că ea este mai mică decât în aer. Experiența lui Foucault a fost considerată ca un «experimentum crucis», prin care teoria lui Newton era înlăturată complet. Mai de curând însă teoria corpusculară s-a reluat sub o altă formă și experiența lui Foucault nu s-a mai considerat ca decisivă. Mecanica ondulatorie tinde să unifice cele două teorii, cea corpusculară și cea ondulatorie a luminii. Ludwig Flamm (*Die Naturwissenschaften*, vol. 15, 1927) explică experiența lui Foucault în baza mecanicii ondulatorii.

CARTEA A II-A

p. 197. *Secțiunea I.* În timp ce Cartea I se ocupă cu mișcarea corpurilor în vid, în Cartea a II-a el studiază influența mediului rezistent asupra acestei mișcări. Această influență se manifestă sub forma de rezistență ce depinde de viteza corpului în mișcare. În Secțiunea I Newton face ipoteza că rezistența mediului e proporțională cu viteza corpului.

p. 197. *Prop. I.* În mod analitic demonstrația lui Newton se reduce la:

$$m \frac{dv}{dt} = -kv = -k \frac{dx}{dt}, \text{ deci } \int_{v_1}^{v_2} m dv = -k \int_{x_1}^{x_2} dx, \text{ de unde } m(v_2 - v_1) = k(x_1 - x_2).$$

p. 195. *Prop. II.* În mod algebric demonstrația are forma următoare: dacă în intervale egale și consecutive de timp vitezele sînt respectiv v_1, v_2, v_3, \dots și rezistențele sînt cv_1, cv_2, cv_3, \dots atunci

$$v_2 = v_1 - cv_1, \quad v_3 = v_2 - cv_2, \quad v_4 = v_3 - cv_3, \dots$$

deci

$$\frac{1}{c} = \frac{v_1}{v_1 - v_2} = \frac{v_2}{v_2 - v_3} = \frac{v_3}{v_3 - v_4} = \dots$$

Dar din lema I, avem

$$v_1 : v_2 = v_2 : v_3 = v_3 : v_4 = 1 : (1 - c),$$

$$v_1 : v_3 = v_1 v_2 : v_2 v_3 = 1 : (1 - c)^2,$$

$$v_1 : v_4 = v_1 v_2 v_3 : v_2 v_3 v_4 = 1 : (1 - c)^3,$$

.....
Prin urmare

$$v_2 = v_1 (1 - c), \quad v_3 = v_1 (1 - c)^2, \dots, \quad v_{n+1} = v_1 (1 - c)^n,$$

ceea ce ne arată că viteza scade în progresie geometrică.

p. 204. *Secțiunea II.* Newton consideră în scolia de la sfîrșitul secțiunii I ipoteza rezistenței proporționale cu viteza mai mult ca o ipoteză matematică decât naturală. De aceea în secțiunea II face ipoteza mai conformă cu experiența că rezistența mediului este proporțională cu pătratul vitezei.

p. 205. *Prop. VII. Rezistența sferelor.* În mod analitic demonstrația lui Newton se poate transcrie astfel. Fie V viteza inițială a unui corp și v viteza următoare, R rezistența inițială și r rezistența următoare, iar t timpul. Pentru un alt corp fie notațiile corespunzătoare V_1, v_1, R_1, r_1 și t_1 . Prin ipoteză

$$V^2 : v^2 = R : r,$$

$$V_1^2 : v_1^2 = R_1 : r_1,$$

$$t : t_1 = \frac{V}{R} : \frac{V_1}{R_1}.$$

Atunci pierderea vitezei, $-dv$, a primului corp în intervalul de timp infinitesimal dt va fi

$$-dv = rdt = \frac{Rv^2}{V^2} dt.$$

Prin împărțire cu v^2 și integrare se obține

$$v^{-1} = \frac{R}{V^2} t + C.$$

Dacă $t = 0$ avem $v = V$, deci $C = V^{-1}$, astfel că înlocuind și răsturnând egalitatea se obține

$$v = \frac{V^2}{Rt + V}.$$

Așadar pierderea de viteză este

$$V - v = \frac{VRt}{Rt + V}.$$

Pentru cel de-al doilea corp

$$V_1 - v_1 = \frac{V_1 R_1 t_1}{R_1 t_1 + V_1} = \frac{V_1 R t}{Rt + V}.$$

Deci pierderile de viteză în timpurile t și t_1 a celor două corpuri sînt între ele ca vitezele lor inițiale V și V_1 .

Pentru a demonstra partea a doua referitoare la spațiul s , vom înlocui expresia de mai sus a lui v în $ds = vdt$, deci

$$ds = \frac{V^2}{Rt + V} dt.$$

Integrînd ajungem la relația

$$s = \frac{V^2}{R} [\log(Rt + V) - \log V].$$

Scriind formula analogă pentru corpul al doilea și simplificînd obținem

$$s:s_1 = Vt:V_1 t_1.$$

p. 206. *Lema II.* În primele sale lucrări și în ediția întâia a *Principiilor*, Newton întrebuințează cantități infinit de mici, adică *infinitesimale fixe*. Menționînd aceasta, De Morgan observă: « Pe la anul 1704 și în ce privea calculul algebric Newton folosea numai cantități infinit de mici și nimic altceva în documentele publicate pînă acum. Primele și ultimele rapoarte apar în *Principii*, dar sînt abandonate în acele locuri în care se face aluzie la fluxiuni... În prima ediție a *Principiilor* descrierea fluxiunilor se bazează pe infinitesimale, dar în a doua ediție această întemeiere e într-o cîtva schimbată. În ediția întâia momentele sînt cantități infinit de mici; în a doua nu e clar ce sînt ele. Ca exemplu dăm următorul extras din ediția întâia comparat cu cel care-l înlocuiește în a doua:

EDIȚIA I. LEMA II.

Cave tamen intellexeris particulas finitas. Momenta, quam primum finitae sunt magnitudinis, desinunt esse momenta. Finiri enim repugnat aliquatenus perpetuo eorum incremento vel decremento. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum.

EDIȚIA a II-a. LEMA II.

Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulae finitae non sunt momenta sed quantitates ipse ex momentis genitae. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum.

De Morgan comentează pasajele citate astfel: « Prin dificultățile frazelor în cele două extrase apare mai distinct că în prima ediție, momentele sau creșterile momentelor sînt cantități infinite de mici: și aceasta este ceea ce eu afirm... Newton a început cu sistemul infinitezimal într-o formă absolută cum a făcut Leibniz întrucît privește cantitățile infinite de mici de ordinul întâi. Mai departe de aceasta nu a mers; și deosebirea între sistemele celor doi este că Newton, ținînd la concepția vitezelor sau fluxiunilor, a întrebuițat creșterea infinite de mică drept un mijloc de a o determina, pe cînd la Leibniz relația creșterilor infinite de mici este ea înseși obiect de determinare » (*On the Early History of Infinitesimala in England*. Philosophical Magazine, ser. IV, vol. 4, 1852, pp. 321—330).

În *Tractatus de quadratura curvarum* apărut în 1704, Newton explică în introducere bazele fluxiunilor, încercînd să înlăture orice utilizare a infinitezimalelor fixe. Privitor la aceasta, De Morgan observă că în această lucrare Newton « a renunțat la cantitățile infinite de mici și le-a renegat; a făcut-o înșă în așa fel încît am putea fi conduși să credem că el nu le-a susținut niciodată » (loc. cit.).

Menționăm că prin fluxiunea unei cantități fluente x Newton înțelegea derivata acesteia față de timp, pe care o nota cu \dot{x} . Creșterea infinite de mică a lui x într-un interval de timp o era $\dot{x}o$ și o numea *momentul fluentei*. În *Principii* Newton neglijează termenii înmulțiți cu puterile superioare ale lui o ; astfel în Cartea I, prop. XXXIX, cor. III; prop. XLV, exemplul 2 și 3; Cartea a II-a, prop. X și XV.

Rouse Ball în *History of Mathematics*, London, 1927, ed. IV, observă că deși se pare că prin intermediul fluxiunilor Newton a introdus în geometrie noțiunea de timp, totuși în realitate el a știut să o evite admițînd că unele fluente variază în mod egal. Fie o astfel de fluentă de exemplu abscisa unui punct al curbei; rezultatul depinde de raportul creșterii ordonatei față de abscisa x considerată ca variabilă independentă. Newton numește fluxiunea lui x « fluxiune principală » și dacă x variază în mod egal, \dot{x} este constantă, deci $\dot{x} = 0$.

În traducerea noastră am păstrat termenul *genita* întrebuițat de Newton. El corespunde noțiunii de *funcție*, iar momentul unei *genita*, adică al unei funcțiuni este identic cu noțiunea de *diferențială*.

p. 208. *Scolie*. Spre deosebire de textul ediției a III-a, în ediția I și a II-a textul acestei scolii este următorul:

« În schimbul de scrisori care a avut loc între mine și excelentul geometru G. W. Leibniz, înainte cu zece ani, cînd i-am făcut cunoscut că am aflat o metodă de determinare a maximelor și minimelor, de a trasa tangente și altele asemenea, aplicîndu-le atît la mărimile raționale, cît și la cele iraționale, și cînd i-am ascuns aceasta într-o anagramă ce cuprindea următoarea propoziție: (Fiind dată o ecuație oarecare conținînd cantități fluente, să aflăm fluxiunile și invers), acest bărbat distins mi-a răspuns că și el a aflat o metodă de același gen și mi-a comunicat metoda sa, care abia se deosebește de a mea în formularea cuvintelor și a simbolurilor. Baza ambelor se cuprinde în lema precedentă ».

În ediția a II-a Newton adause la propoziția penultimă cuvintele: « și în concepția generării cantităților ».

Cu toată afirmația contrară a lui Newton se pare că în privința calculului infinitezimal concepția sa diferea de a lui Leibniz. Într-adevăr pe cînd Leibniz considera ca fundamentali înșiși infinitii mici, concepția lui Newton în această privință a evoluat cu timpul, deoarece, după cum am menționat, în timp ce la început se folosea de cantități infinite de mici pentru a afla fluxiunile, mai tîrziu le-a abandonat. Astfel în *Tractatus de quadratura curvarum* din 1704 scrie: « În acest loc nu consider cantitățile matematice ca alcătuite din părți foarte mici, ci ca descrise de o mișcare continuă ». Se vede de aici că în acea

epocă el nu mai făcea uz de infimezimale fixe, astfel că adaosul din ediția a II-a «și concepția generării cantităților» este potrivit.

Pasajul citat mai sus a jucat un mare rol în controversa ce s-a ivit între Newton și Leibniz referitor la prioritatea asupra calculului infimezimal. Anume în acest pasaj Newton recunoaște că Leibniz a inventat noul calcul în mod independent. Mai târziu însă a negat această interpretare afirmând că el a inventat acest calcul și i-a comunicat acest lucru lui Leibniz. De aceea în ediția a III-a a *Principiilor* pasajul a fost înlocuit cu altul în care nu se mai amintește numele lui Leibniz. În toiul discuției, Leibniz într-o scrisoare din 1716 adresată preotului italian A. S. Conti, pe atunci la Londra, îi reaminte lui Newton de afirmația din scolie. Curînd după aceea, în același an Leibniz muri. Totuși la 14 noiembrie 1716 Newton publică în *Fluxions* a lui Raphson următoarele: «El (Leibniz) pretinde că în cartea mea *Principia* I am afirmat că el a inventat *Calculus differentialis* independent de mine, și că a-mi atribui această invenție mie însumi este în contrazicere cu buna mea știință. Dar în pasajul menționat eu nu am folosit nici un cuvînt în acest sens».

Controversa referitoare la prioritatea asupra calculului infimezimal a continuat multă vreme între newtonieni și leibnizieni, chiar după moartea celor doi protagoniști luînd un caracter destul de vehement, în care au jucat rol nu numai ambiții personale, ci și naționale. Această controversă nu a avut nici un sens, critica modernă arătînd eă ea era fără obiect fiindcă nu se poate vorbi de un inventator al calculului infimezimal. Fără a diminua meritul lui Newton și Leibniz în ce privește fundamentarea acestui calcul, nu se poate nega opera de pregătire a lui Cavalieri, Torricelli, Roberval, Fermat, Barrow, Wallis etc., fiecare din aceștia contribuind în mod efectiv la construcția edificiului acestei mari invenții matematice. Azi se poate afirma că atît Leibniz, cît și Newton au ajuns cam în același timp pe căi diferite la același rezultat, pe care l-a prezentat fiecare după felul său propriu de a vedea. Controversa dintre ei a fost regretabilă și din cauza că a arătat slăbiciunile omeniești de care nu sînt feriți nici oamenii de geniu.

John Collins (1625—1683) pe care-l amintește Newton în scolia din ediția a III-a s-a născut la Oxford și a murit la Londra. Fiind devotat matematicilor a purtat o vastă corespondență cu matematicienii epocii sale, cărora le-a comunicat informații utile, din care cauză a fost numit Mersenne al englezilor, prin comparație cu francezul père Mersenne.

R. Fr. Walther de Sluze sau cu numele latinizat Slusius (1622—1685) a fost canonic la Liège. Ca matematician s-a ocupat cu deosebie de spirale și de puncte de inflexiune și a aflat pentru subtangenta unei curbe de forma $f(x, y) = 0$ o expresie echivalentă cu

$$y = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Johann Hudde (1633—1704) a fost burgmeister al orașului Amsterdam. Sa ocupat cu matematicile în timpul liber și a dat atenție deosebită ecuațiilor ce au rădăcini duble și subtangentelor curbelor.

p. 213. *Prop. X.* Demonstrația lui Newton din ediția I a *Principiilor* referitoare la determinarea rezistenței ce împînă un proiectil în aer este greșită. Eroarea a fost adusă la cunoștința lui Newton de către Nicolas Bernoulli (1687—1759) cu ocazia călătoriei ce făcuse acesta în Anglia în toamna anului 1712, cînd îl vizită și pe Newton. De altfel încă Jean Bernoulli (1667—1748) într-o scrisoare către Leibniz din august 1710 și în *Mémoires de l'Académie des Sciences* din Paris pe anul 1711 arată că

rezultatul lui Newton în cazul când curba descrisă e un cerc este greșit. De aceea la 14 octombrie 1712 Newton îi scrie lui Cotes: «În propoziția X a cărții a II-a, problema III este o eroare care va pretinde o retipărire de aproximativ o coală și jumătate. Am descoperit-o după ce v-am scris și am corectat-o. Voi plăti costul retipăririi și am să v-o trimit imediat ce o voi da gata».

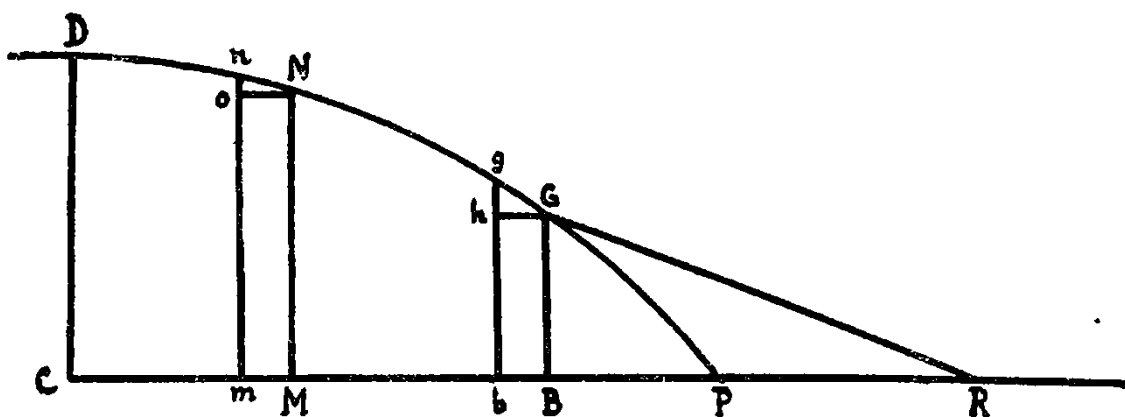
p. 267. *Scolie*. Propozițiile XXXIII—XLI diferă mult în cele trei ediții ale *Principiilor*. Astfel propoziția XXXIII în prima ediție are nouă corolare, pe când în a doua și a treia numai șase, cel din urmă fiind refăcut. Propozițiile următoare sînt redactate din nou și completate cu experiențe noi. Chiar numerotarea propozițiilor e schimbată, căci propoziția XXXIV din ediția a II-a și a III-a este identică cu propoziția XXXV din ediția I. De asemenea scolia ce urmează după propoziția XXXIV din ultimele două ediții este aproape aceeași cu cea care urmează după propoziția XXXV din ediția I.

Această scolie se ocupă cu suprafața de rezistență minimă, cea mai veche problemă de acest gen; Newton enunță aici, fără să demonstreze, condițiile la care trebuie să satisfacă o suprafață de revoluție pentru ca mișcîndu-se în direcția axei sale într-un mediu rezistent să întîmpine o rezistență minimă.

Portsmouth Collection of Books and Papers Written by or Belonging to Sir Isaac Newton, Cambridge, 1888, cuprinde o scrisoare din 1694 a lui Newton către un corespondent din Oxford, probabil David Gregory, în care dă acestei probleme următoarea demonstrație:

«Domnule, vă mulțumesc din inimă atît pentru vizita ce mi-ați făcut-o, cît și pentru greșelile semnalate în cartea mea... Forma care prezintă rezistența minimă în scolia propoziției XXXIV, cartea a II-a se poate demonstra astfel.

1. Dacă pe BM ridicăm paralelogramele infinit de mici $BGhb$ și $MNom$ și e dată distanța lor Mb și înălțimile MN , BG , și e dată semisuma bazelor lor $\frac{Mm + Bb}{2}$ și o numim S , și semidiferența $\frac{Mm - Bb}{2}$ o numim x , și dacă liniile BG , bh , MN , mo întîlnesc curba $nNgG$ în punctele n , N , g și G , și liniile infinit de mici on și hg sînt egale între ele și se numesc C , și rotim figura $mnNgGB$ în jurul axei sale BM pentru a genera un solid, și acest solid se mișcă în mod uniform în apă de la M la B după direcția axei sale BM : suma rezistențelor celor două suprafețe generate de liniile infinit de mici Gg , Nn va fi minimă dacă $(gG)^4$ este către $(nN)^4$ precum $BG \times Bb$ către $MN \times Mm$



Într-adevăr rezistențele suprafețelor generate prin învîrtirea lui Gg și Nn sînt precum $\frac{BG}{(Gg)^2}$ și $\frac{MN}{(Nn)^2}$, adică dacă pe $(Gg)^2$ și $(Nn)^2$ le notăm cu p și q , precum $\frac{BG}{p}$ și $\frac{MN}{q}$, și suma lor $\frac{BG}{p} + \frac{MN}{q}$ este minimă dacă fluxiunea ei

$$-\frac{BG}{p^2} p - \frac{MN}{q^2} q \text{ este zero, sau } -\frac{BG}{p^2} p = \frac{MN}{q^2} q.$$

Dar

$$p = (Gg)^2 = (Bb)^2 + (gh)^2 = r^2 - 2sx + x^2 + c^2$$

și deci

$$\dot{p} = -2s\dot{x} + 2x\dot{x}$$

și din aceeași cauză

$$\dot{q} = 2s\dot{x} + 2x\dot{x}$$

și prin urmare

$$\frac{BG \times (2s\dot{x} - 2x\dot{x})}{p^2} = \frac{MN(2s\dot{x} + 2x\dot{x})}{q^2}$$

sau

$$\frac{BG(s-x)}{p^2} = \frac{MN(s+x)}{q^2}$$

și astfel p^2 este către q^2 precum $BG(s-x)$ către $MN(s+x)$, adică $(gG)^4$ către $(nN)^4$ precum $BG \times Bb$ către $MN \times Mm$.

2. Dacă linia curbă $DnNgG$ este de așa fel că suprafața solidului generat prin rotația ei suferă rezistența minimă a unui solid de același vîrf și bază BG și CD , atunci rezistența suprafețelor înguste inelare generate de învîrtirea (liniilor infinit de mici nN) Gg este mai mică decît dacă se mișcă solidul intermediar $bgNM$ (de-a lungul lui CB fără alterarea lui Mb , pînă ce bg ajunge) la BG (presupunînd ca mai înainte că om este egal cu hg și în consecință e cea mai mică posibilă), și, deci $(gG)^4$ este către $(nN)^4$ precum $BG \times Bb$ către $MN \times Mm$.

(Deci dacă gh e egală cu hG , astfel că unghiul (gGh) este de 45° , atunci $4(Bb)^4$ va fi (către $(nN)^4$ precum $BG \times Bb$ este către $MN \times Mm$, și în consecință $4(BG)^4$ este către $(GR)^4$ precum $(BG)^2$ către $MN \times BR$, sau $4(BG)^2 \times BR$ este către $(GR)^3$ (precum GR către MN).

Dacă înălțimea trunchiului de con menționat în paragraful precedent este infinit de mică, semiunghiul conului devine egal cu 45° . Prin urmare dacă rezistența totală este minimă, curba întîlnește ordonata extremă GB sub un unghi de 45° .

De aici rezultă ușor propoziția ce trebuie demonstrată.

Cuvintele din paranteză sînt intercalate în textul din *Portsmouth Collection* de către editori pentru a ușura înțelegerea demonstrației.

Cu soluția lui Newton și cu studiul suprafeței de rezistență minimă s-au ocupat mai cu seamă Oscar Bolza în *Bibliotheca Mathematica*, seria 3, vol. 13, pp. 140—149, și A. R. Forsyth în volumul comemorativ *Isaac Newton, 1642—1727*, editat de W. I. Greenstreet, London, 1927, pp. 45—86.

p. 270. *Prop. XXXVI*. Referitor la această problemă, Brougham și Routh fac observația: «Soluția acestei chestiuni, după cum a dat-o Newton în prima sa ediție este complet greșită. El a neglijat cu totul contracția vînei după ce fluidul a trecut prin orificiu, de aceea el a dedus că viteza efluxului era aceea datorită jumătății înălțimii apei din vas. Mai tîrziu a corectat această eroare, dar cercetarea rămîne totuși susceptibilă de obiecțiuni foarte serioase».

p. 284. *Prop. XL. Scolie, Exp. 13*. În măsurarea timpului 1 secundă=60 de terțe, 1 terță = 60 de cvarte. În măsurarea unghiului avem $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$, $1'' = 60'''$. Newton folosește aceleași notații pentru fracțiunile de oră ca și pentru cele de grad, deci la el 1 oră = 60^m , $1^m = 60^s$ etc.

p. 299. *Prop. XLVIII—L. Viteza sunetului*. Newton admite că sunetul se propagă sub forma de unde longitudinale, în linie dreaptă, în mod uniform în toate direcțiile cu o viteză v proporțională cu rădăcina pătrată din «forța elastică» E împărțită cu «densitatea mediului», adică $v = \sqrt{\frac{E}{d}}$. Aceasta este cunoscuta formulă a lui Newton din acustică. Înlocuind în această formulă valorile lui E și d determinate în mod experimental pentru aer se obține pentru viteza sunetului la temperatura obișnuită valoarea de 979 picioare, diferită de cea obținută prin măsurări directe de 1142 picioare. Toate încercările lui Newton de a explica cu ajutorul

diverselor ipoteze diferența dintre valoarea teoretică și cea experimentală, au rămas infructuoase.

Problema vitezei de propagare a sunetului a fost rezolvată la un secol după Newton de către Laplace, care a înlocuit formula de mai sus cu următoarea: $v = \sqrt{\frac{E}{d\gamma}}$, unde γ este raportul dintre căldura specifică a mediului la volum constant c_p și căldura lui specifică la presiunea constantă c_v , adică $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. În cazul aerului și al gazelor diatomice valoarea lui γ

este aproximativ 1,41. În felul acesta discordanța dintre formula teoretică și rezultatele experienței au dispărut. Corecția lui Laplace se datorește faptului că aerul și în general gazele fiind rele conducătoare de căldură, iar vibrațiile sunetului fiind foarte rapide, propagarea sunetului are loc în mod adiabatic și nu în mod izoterm, cum admisesse Newton.

Laplace și-a publicat formula în *Annales de Physique et de Chimie*, vol. 3, 1816, pp. 238–241, dar fără a-i da vreo demonstrație. În ce privește demonstrația lui Newton, el are următoarea apreciere: « Felul în care el ajunge la ea este una din trăsăturile cele mai remarcabile ale geniului său », iar în cartea sa *Mécanique céleste*, Livre XII, p. 95 se exprimă astfel: « Teoria sa, deși imperfectă, este un monument al geniului său ».

p. 301. *Prop. I.* Joseph Sauveur (1653–1716) născut în La Flèche, a fost profesor la College Royal din Paris. Are realizări importante în acustică, unde independent de Noble și Pigot, a descoperit tonurile armonice la coarde. De asemenea a dat o explicație corectă bătăilor acustice.

CARTEA A III-A

p. 313. *Cartea a III-a* prezintă caractere diferite de primele două cărți ale *Principiilor*. Scopul pe care și-l propusese Newton de a pune bazele dinamicii, de a prezenta legea gravitației și de a distruge filozofia lui Descartes a fost ajuns prin Cartea I și a II-a, de aceea el voia să încheie cu acestea marea sa operă. Dar la îndemnul lui Halley și dîndu-și seama că în acest fel lucrarea ar fi rămas neînțeleasă de cea mai mare parte a cititorilor, care nu erau familiarizați cu demonstrațiile matematice riguroase, Newton se hotărî să publice și Cartea a III-a despre sistemul lumii, în care dinamica sa apare ca o știință cosmică. În ce privește forma de expunere a noului sistem, Newton s-a gândit mult care ar fi calea cea mai potrivită. La început a scris Cartea a III-a « în mod popular, ca să fie citită de cît mai mulți », dar apoi ca să evite discuțiile a expus esențialul cărții « sub formă de propoziții, după obiceiul matematicii », ca să fie citit numai de aceia care au înțeles principiile anterioare ». Dar și acestora le dă sfatul să nu citească întreaga carte, ci e de ajuns să pătrundă sensul propozițiilor, legilor mișcării și primele trei secțiuni ale Cărții I, trecînd direct la Cartea a III-a. Se vede de aici că el a ales calea mijlocie între o largă popularizare și o prezentare strict matematică. Prudența lui Newton se manifestă și în faptul că înaintea Cărții a III-a a pus regulile de filozofare, anticipînd în acest fel concluziile acestei cărți.

p. 314. *Regule de filozofare*. În ediția I a *Principiilor* Newton nu folosește expresia de *reguli de filozofare*, ci termenul de *ipoteze*, care sînt în număr de nouă. Acestea sînt (împreună cu explicațiile lui Newton):

« *Ipoteza I. Nu trebuie să admitem mai multe cauze pentru lucrurile naturale, decît acele care sînt adevărate și suficiente pentru explicarea fenomenelor lor.*

Căci natura este simplă și nu face lux cu cauzele de prisos ale corpurilor,

Ipoteza II. Și de aceea efectele naturale de același gen au aceleași cauze.

Ca respirația la om și la animal; căderea pietrelor în *Europa* și în *America*; lumina focului din sobă și din soare; reflexia luminii pe pământ și pe planete.

Ipoteza III. Orice corp se poate transforma în alt corp de orice gen, și poate lua succesiv toate gradele intermediare ale calităților.

Ipoteza IV. Centrul sistemului lumii este în repaus.

Aceasta este admisă de toți, în timp ce unii afirmă că în centru este așezat pământul, alții că e soarele.

Ipoteza V. Planetele din iurul lui Jupiter descriu, cu razele duse la centrul lui Jupiter, arii proporționale cu timpurile, și timpurile lor periodice sînt în raportul de $3/2$ al distanțelor de la centrul acestora.

Ipoteza VI. Cele cinci planete primare: Mercur, Venus, Marte, Jupiter și Saturn înconjură cu orbitele lor Soarele.

Ipoteza VII. Timpurile periodice ale celor cinci planete primare, și (fie a Soarelui în jurul pământului, fie a Pământului în jurul Soarelui) sînt în raportul de $3/2$ a distanțelor mijlocii de la Soare.

Ipoteza VIII. Planetele primare, cu razele duse la Pământ, nu descriu arii proporționale cu timpurile; dar cu razele duse la Soare parcurg arii proporționale cu timpurile.

Ipoteza IX. Luna descrie cu raza dusă la centrul Pământului o arie proporțională cu timpul».

În ediția a II-a *Newton* și *Cotes* nu au menținut ca ipoteză decît pe a patra care se referă la centrul lumii. Nu e greu de ghicit din ce motiv a continuat *Newton* să considere sistemul lui *Copernic* ca o ipoteză pe care o susțin «unii», în timp ce «alții» aderă la sistemul lui *Ptolemeu*. Primele trei ipoteze capătă numirea de reguli de filozofare și în același timp în locul celei de-a treia apare următoarea regulă:

«Regula III. Calitățile corpurilor care nu pot fi nici intensificate și nici slăbite, și care se află în toate corpurile în care se pot face experiențe, trebuie considerate drept calități ale tuturor corpurilor».

Ipotezele V—IX au primit numele de fenomene, căroia li s-a adăugat încă unul referitor la sateliții lui Saturn.

În ediția a III-a a *Principiilor* schimbările de mai sus s-au păstrat adăugîndu-se însă și regula IV.

p. 314. *Regula III.* În ediția a II-a și a III-a a *Principiilor*, această regulă înlocuiește ipoteza III din ediția I, care era formulată astfel: «Orice corp se poate transforma în alt corp de orice gen, și poate lua succesiv toate gradele intermediare ale calităților».

Ipoteza III exprimă concepția lui *Newton* despre unitatea materiei. O astfel de concepție era naturală la *Newton* care s-a ocupat mult cu chimia și a studiat transformările reciproce ale corpurilor. Încă într-un memoriu din 1675 își exprimă părerea că «este probabil că toate substanțele s-au născut din eter». El merge chiar mai departe și în Întrebarea 30 din *Optica* sa se întreabă: «Oare corpurile dense și lumina nu se transformă reciproc unul în celălalt, și corpurile nu primesc o mare parte din activitatea lor prin particulele luminoase ce intră în compoziția lor?... Transformarea corpurilor materiale în lumină și invers este de acord cu rațiunea și cu natura, care pare că de asemenea se delectează în transformări de acest fel».

Această concepție carteziană despre unitatea materiei, potrivit căreia toate transformările din natură au loc după legi simple, era însă în contradicție cu ideile lui *Bentley* și *Cotes*,

care susțineau că fenomenele naturii au loc numai din voința lui Dumnezeu. Bentley, într-o scrisoare către Newton din 18 februarie 1692, caută să combată teoria lui Descartes, care afirma că materia trebuie în mod necesar să se transforme din haos în lume, pe care o guvernează legi simple.

Cauza înlocuirii ipotezei III cu regula III nu poate fi deci decât antagonismul celor două concepții. Și aici ca și în alte chestiuni ideologice Newton a avut slăbiciunea de a ceda insistențelor lui Bentley-Cotes.

În regula III Newton se ocupă cu calitățile tuturor corpurilor, adică cu proprietățile generale ale materiei. Ca atari consideră el extinderea, duritatea, impenetrabilitatea, mobilitatea și forța de inerție; nu introduce în această listă nici divizibilitatea și nici gravitația.

Cu dezvoltarea științei, concepția lui Newton asupra proprietăților generale ale materiei a fost depășită. Potrivit concepției materialist-dialectice știința nu poate stabili proprietățile și manifestările materiei fiindcă materia este inepuizabilă, ca și procesul cunoașterii ei. Prin urmare deodată cu evoluția științei progresează și cunoștințele asupra proprietăților materiei. Astfel, dezvoltarea cunoștințelor despre structura materiei, mai ales despre moleculă și atom, au infirmat felul de a vedea al lui Newton privitor la impenetrabilitatea materiei. După ce s-a descoperit structura complexă a atomului nu se mai poate vorbi de impenetrabilitatea materiei. Fizica modernă a arătat că nucleul atomic este separat de electroni printr-un spațiu care întrece de mii de ori dimensiunile acestuia. Particulele de iuteală mare pot pătrunde în interiorul atomului, având posibilitatea să atingă nucleul și, dacă au iuteală suficientă, îl pot dezagrega. Prin urmare o impenetrabilitate absolută, în sensul lui Newton a materiei nu există.

În privința gravitației, Newton nu este de acord cu Cotes. În timp ce Cotes în prefața ediției a II-a «din faptul că toate corpurile asupra cărora posedăm experiențe sînt grele» deduce că «chiar și acelea asupra cărora nu posedăm experiențe sînt grele», prin urmare gravitatea este o proprietate tot atît de generală ca și extinderea, mobilitatea și impenetrabilitatea, Newton este cu mult mai rezervat; scriind: «dacă prin experiențe și observații astronomice în mod universal se constată că toate corpurile din jurul Pămîntului sînt grele... trebuie să zicem potrivit acesteia că toate corpurile gravitează unul spre celălalt», el ajunge la altă concluzie în privința gravitației. Într-adevăr el spune: «Totuși nu afirm că gravitatea este esențială corpurilor», cum este extinderea, impenetrabilitatea etc. Apoi continuă: «Prin forță inerentă eu înțeleg numai forța de inerție. Aceasta e invariabilă. Îndepărtîndu-ne de pămînt gravitatea se micșorează». De ce a permis totuși lui Cotes să pună în prefață afirmații pe care el nu le aproba? Atitudinea lui se vede clar din următoarele rînduri scrise lui Cotes cu privire la prefață: «Dacă veți scrie o nouă prefață, eu nu trebuie să o văd, pentru a nu fi răspunzător de ea». Se vede de aici atitudinea de compromis ce caracteriza epoca ce a condus la «revoluția glorioasă» din 1688.

O altă problemă importantă pe care o menționează Newton în explicările date regulii III este aceea a forței de inerție, singura pe care o consideră ca forță inerentă a materiei. Forța de inerție este o proprietate pasivă care face ca corpurile să-și păstreze starea de mișcare opunîndu-se atît mării, cît și micșorării vitezei, dar datorită căreia ele nu pot să se pună singure în mișcare. Cu acest singur principiu de inerție nu se poate explica mișcarea corpurilor, prin urmare este necesar un alt principiu activ care să producă mișcarea. În concepția lui Newton acesta ar fi «primul impuls» de origine divină. Bentley, care în această privință e de acord cu Newton, merge mai departe și admite ca principiu activ, imaterial, care pune în mișcare materia, gravitația. Newton însă nu-l urmează pe Bentley pe acest drum afirmînd că problema forțelor active necesită cercetări serioase.

p. 316. *Fenomenul I*. În ediția I a *Principiilor*, în primul alineat al explicărilor date acestui fenomen, în propoziția: «Iar astronomii sînt de acord că timpurile periodice sînt în raportul puterii $3/2$ a semidiametrelor orbitelor», Newton scrie: «și Flamsteed, care toate le-a măsurat mai precis cu micrometrul și din eclipsele sateliților, prin scrisorile trimise mie, ca și prin datele sale numerice pe care mi le-a comunicat, a confirmat că raportul de $3/2$ se obține atît de precis, cît e posibil să-l cuprindem cu simțurile. Ceea ce este evident din următorul tablou».

În edițiile ulterioare ale *Principiilor* numele lui Flamsteed nu mai e amintit, propoziția de mai sus fiind pur și simplu ștearsă. Motivul acestei ignorări a contribuției lui Flamsteed este cearta ce s-a iscat între acesta și Newton. Cei doi oameni de știință s-au cunoscut în 1670, iar în 1680 a început între ei o corespondență științifică referitor la comete, urmată de comunicarea observațiilor pe care le făcea Flamsteed la Greenwich și de care Newton avea mare trebuință. Colaborarea lui Flamsteed a fost atît de prețioasă, încît Newton a menționat-o în ediția întâi a *Principiilor*. Ea a devenit și mai valoroasă după apariția cărții lui Newton, în momentul cînd acesta a elaborat o teorie a lunii, pentru verificarea căreia erau necesare observații precise. Flamsteed i-a furnizat date prețioase lui Newton pînă în 1692. Trimițîndu-i materialul de observație necesar, Flamsteed se plîngea de atitudinea disprețuitoare a lui Newton. Într-una din scrisori se plînge direct de lipsa de apreciere de către Newton: «Sînt de acord că sîrma este mai scumpă decît aurul din care e făcută. Dar eu am strîns acest aur, l-am curățat, l-am spălat și nu îndrăznesc să cred că dv. apreciați prea puțin ajutorul meu, numai fiindcă l-ați obținut cu atîta ușurință».

Relațiile dintre Newton și Flamsteed s-au înăsprit și mai mult cu ocazia tipăririi de către Societatea regală a catalogului de stele întocmit de Flamsteed. Propunerea pentru tipărire fiind făcută de Newton, prințul George care a finanțat tipărirea a propus o comisiune pentru supravegherea editării catalogului, sub prezidenția lui Newton. Comisiunea a procedat însă în așa fel încît Flamsteed s-a simțit jignit, plîngîndu-se de modul arbitrar în care aceasta tratează problema tipăririi. Tensiunea s-a mărit și mai mult cînd regina Angliei a numit o comisiune a Societății Regale pentru supravegherea observatorului din Greenwich. Președintele acestei comisii a fost iarăși Newton. În 1711 Flamsteed a fost invitat în fața comisiei pentru a prezenta un raport despre starea instrumentelor observatorului. Felul în care l-a tratat Newton a fost umilitor pentru Flamsteed, care trebuia să dea seama de starea instrumentelor care, în mare parte, erau proprietatea sa. Cearta a continuat în jurul tipăririi catalogului și cei doi adversari nu s-au împăcat, Flamsteed murind în 1720. Acad. S. I. Vavilov (*Isaac Newton*, p. 239) caracterizează antagonismul celor doi savanți astfel: «Certurile cu Flamsteed sînt o ciocnire tipică între Faust și Wagner, unde geniul este opus răbdării».

p. 316. Newton menționează aici o «lunetă de 123 de picioare» folosită de James Poun d în 1719. Obiectivul i-a fost împrumutat de Societatea Regală și l-a montat în Naustead Park, Essex, pe vîrfurile unui stîlp înalt, pe care i l-a procurat însuși Newton. Astfel de lunete se întrebuintau curent pe timpul lui Newton și concureau cu telescopul inventat de el.

Primele lunete construite de Zacharias Jansen, Lippershey, Galileu etc. aveau dezavantajul că posedau o putere măritoare mică și nu dădeau o imagine clară, atît din cauza aberației de sfericitate, cît și a celei cromatice. Pentru a înlătura aceste inconveniente Christian Huygens a calculat, în 1655, o mulțime de lunete avînd o distanță focală mare și deci o lungime considerabilă. Ele au fost construite cu ajutorul fratelui său Constantin, care avea o abilitate deosebită de a construi aparate. Newton scrie în *Optica* sa din 1704: «o lunetă de 64 picioare lungime cu o apertură de $2/3$ degete mărește de aproape 120 de ori cu aproape aceeași claritate ca una avînd lungimea de un picior, apertura

de $1\frac{1}{3}$ degete, care mărește de 15 ori». Societatea Regală primi de la H u y g e n s trei lentile cu distanțe focale respectiv de 123, 170 și 210 picioare. Obiectivul de 123 de picioare mprumutat lui P o u n d era tocmai una din cele trei lentile împrumutate de H u y g e n s.

Lui N e w t o n i-a reușit să înlăture aberația de sfericitate a lentilelor, dar nu și pe cea cromatică, de aceea a imaginat șt'a construit telescopul cu reflexie. Construcția lunetelor foarte lungi era cît se poate de nepriactică, mai ales că s-a ajuns la lunete de 300 de picioare lungime. H u y g e n s a încercat să simplifice construcția lunetelor, adoptînd pentru observațiile nocturne luneta «aeriană», fără tub, al cărei obiectiv era montat pe un stîlp înalt, fiind adus în direcția ocularului cu ajutorul unei frînghii. Luneta folosită de P o u n d era o astfel de lunetă «aeriană».

Pe la mijlocul veacului al XVIII-lea, lunetele «aeriene» au fost scoase din uz în urma invenției de către opticianul londonez J o h n D o l l o n d a lunetei acromatice. El și-a prezentat luneta Societății Regale în 1758. În curînd lentilele acromatice au fost întrebuințate și la construcția microscopelor.

p. 321. *Prop. IV. Verificarea legii gravitației.* În toate trei edițiile *Principiilor* această propoziție este identic formulată, cu excepția astronomilor citați. În timp ce în ediția I menționează pe V e n d e l i n, C o p e r n i c, A. K i r c h e r și pe T y c h o B r a h e, în ediția a III-a amintește pe P t o l e m e u, V e n d e l i n, H u y g e n s, C o p e r n i c, S t r e e t și T y c h o. În ediția a III-a după propoziție este adăugată o scolie.

Luna a jucat un rol fundamental în descoperirea și în verificarea legii atracției universale. N e w t o n însuși povestește că, în 1666, «am început să mă gîndesc că gravitatea se extinde pînă la orbita Lunii... și deci am comparat forța necesară să mențină Luna pe orbita sa cu forța gravitației la suprafața Pămîntului» (*Portsmouth Collection*, Sect. III, Div. XI, No. 41). Cu toate că această comparație, adică înția verificare a fost făcută în 1666, el nu a publicat nimic despre ea pînă la apariția *Principiilor*.

Asupra cauzei amînării publicării legii gravitației universale timp de 20 de ani există două păreri. Cea dintîi e a lui H. P e m b e r t o n, editorul ediției a III-a a *Principiilor*. El susține că în 1666 N e w t o n nu dispunea de o valoare exactă a razei pămîntești, necesară verificării legii, deoarece ea se baza pe valoarea meridianului cunoscută de marinarii englezi, anume de 60 de mile pentru un grad de latitudine, valoarea adevărată fiind de 69,5 mile. De aici P e m b e r t o n trage concluzia că N e w t o n nefiind satisfăcut de precizia verificării, «a renunțat deocamdată să se mai cugete asupra acestui lucru». Abia în 1684, luînd cunoștință la o ședință a Societății Regale de măsurările lui J e a n P i c a i d care, din însărcinarea Academiei de Științe de la Paris, a măsurat un grad de latitudine obținînd valoarea de $69\frac{1}{3}$ mile, N e w t o n își verifică din nou legea și văzînd că ea e confirmată se hotărî să o publice. R o b i s o n publică în *Mechanical Philosophy* din 1804, p. 288 pentru înția dată anecdota care circula pe atunci că N e w t o n, refăcîndu-și calculele cu noile date, a fost cuprins de o emoție atît de intensă încît nu a putut să-și continue operațiile și a rugat pe un prieten al său să le ducă la bun sfîrșit.

În 1887, cu ocazia aniversării celui de-al doilea centenar al apariției *Principiilor*, astronomul J. C. A d a m s și matematicianul L. G l a i s h e r, cercetînd manuscrisele lui N e w t o n publicate în *Portsmouth Collection* au ajuns la altă concluzie. Într-unul din manuscrise au găsit că N e w t o n comparînd în 1666 valoarea teoretică dată de legea gravitației cu accelerația gravitațională, a găsit că «ele corespund aproape exact». Această mărturisire scrisă de însuși N e w t o n nu se poate explica — spun A d a m s și G l a i s h e r — decît admițînd că el s-a folosit de date exacte. Atari date existau mai multe, începînd cu măsurările lui S n e l l i u s din 1617 care dau pentru un grad de latitudine valoarea de $66\frac{1}{3}$ mile, și ale lui N o r w o o d din 1636, care au dat 68 $\frac{1}{2}$ mile. C a j o r i, care se alătură

la părerile lui Adams și Glaisher, în nota la această propoziție scrie următoarele:

«Newton nu cunoștea în 1666 valorile lui Snellius și Norwood asupra mărimii Pământului? Este curios că Newton nicăieri în scrierile sau scrisorile sale nu menționează nici o valoare numerică înainte de apariția *Principiilor* (1687) în care adoptă determinarea lui Picard. Totuși acum s-a stabilit definitiv că Newton era familiar cu valoarea lui Snellius, cel puțin începând cu 1672 și foarte probabil de la 1666. Aceasta se știe din ediția sa a *Geografiei* lui Varen publicată în acel an. Varen dă în această carte o mică tabelă a distanțelor la care se poate vedea un vîrf de munte de înălțime cunoscută de pe mare, abstracție făcînd de refracție. Calculul lui Varen e greșit și e corectat de Newton. Această corecție a fost făcută folosînd valoarea lui Snellius. Astfel un munte înalt de o milă germană se putea vedea la o distanță de $291/4$ de mile germane după Varen și la $411/2$ mile germane după Newton (*Mathematical Gazette*, vol. 14, 1929, p. 415)».

Cauza care l-a determinat pe Newton să amîne publicarea legii gravitației a fost alta. Adams, studiînd cu atenție corespondența lui din perioada dinaintea apariției *Principiilor* a arătat că dificultatea verificării legii atracției universale era de altă natură. Anume Newton nu putuse calcula atracția unei sfere asupra unui punct exterior. Abia în 1685 fu în stare să arate că o sferă, a cărei densitate variază numai în funcție de distanța de la centru, atrage un punct exterior ca și cînd întreaga sa masă ar fi concentrată în centrul ei, după cum expune în *Principii*. Cartea I, propr. LXXV și LXXVI și în corolare. Prin această demonstrație legea gravitației universale căpătă și baza teoretică necesară.

În prop. IV, Newton ia ca distanță mijlocie a Lunii de la Pămînt, considerat ca nemișcat, 60 de raze pămîntești. La sfîrșitul propoziției însă menționează că, dacă admitem că Pămîntul și Luna se mișcă în jurul Soarelui, această distanță trebuie luată de $601/2$ raze terestre. Ipoteza este adevărată căci se știe că raza cercului descris de Lună în jurul Pămîntului considerat ca imobil este mai mică decît distanța ei de la centrul Pămîntului, ce se mișcă în jurul centrului comun de greutate, după cum rezultă din cartea I, prop. LX. Newton s-a convins de exactitatea ipotezei sale prin aceea că mărinđ valoarea de 60 de raze terestre în raportul cerut de legea gravitației universale presupusă neschimbată pentru cazul cînd Pămîntul se mișcă, obținu pentru distanța Lunii de la Pămînt $60\ 1/2$ raze terestre, de acord cu valoarea dată de astronomi.

p. 329. *Ipoteza I*. Dintre toate cele nouă ipoteze ale ediției întîii a *Principiilor*, în edițiile următoare n-a rămas ca ipoteză decît cea referitoare la sistemul lui Copernic. Cu toate că potrivit legii gravitației universale nici Soarele, nici Pămîntul nu pot fi în repaus, ele mișcîndu-se în jurul centrului lor comun de greutate, Newton nu are curajul să considere sistemul lui Copernic decît ca o ipoteză, în ediția întîii. Cu atît mai puțin nu avea să se pronunțe în ediția a II-a editată de Cotes. El afirmă numai că centrul lumii e în repaus, de unde deduce imediat că și centrul sistemului solar trebuie să fie în repaus. Dar acest centru al sistemului solar este în același timp și centrul lumii și fiind foarte aproape de Soare, centrul lumii, adică al universului este foarte aproape de Soare. Indirect se ajunge deci tot la sistemul lui Copernic.

p. 329. *Prop. XI–XII*. Maclaurin, unul din urmașii lui Newton, pornind de la ipoteza că centrul universului este în repaus, își imaginează astfel formarea universului: «Putem presupune că întreaga materie din care e compus universul a fost creată într-o singură masă, unde se găsește acum centrul de greutate al sistemului; că din această masă s-au format diferite corpuri și s-au separat unele de altele la distanțe convenabile, unde își primiră mișcările de proiecție; și că forțele care le separară și le puseră în mișcare observă legea naturii care pretinde o egalitate a acțiunii și reacțiunii și care actual are loc în acțiunile tuturor forțelor:

în acest fel au început aceste mișcări și vor continua în etern, fără a produce vreo schimbare în centrul de greutate al sistemului general» (*An account of Sir Isaac Newton's philosophical discoveries*, London, 1748).

p. 330. *Prop. XIII. Perturbații.* Această propoziție ne relevă unul din aspectele *metodei* de cercetare a lui *Newton*, diferită de aceea a predecesorilor săi. În timp ce *Bacon de Verulam* preconiza ca mijloc de cercetare științifică inducția, adică metoda analitică, *Descartes* afirma prioritatea aproape exclusivă a deducției, adică a metodei sintetice. În metoda lui *Newton* inducția și deducția sînt strîns legate una de cealaltă, ambele contribuind la aflarea adevărului științific. El mînuiește cu aceeași dibăcie cînd analiza, cînd sinteza, combinîndu-le în mod potrivit.

Metoda pe care o folosește *Newton* la stabilirea legilor mișcării este cea inductivă. Axiomele mișcării nu sînt nici definiții, cum crede *Mach*, și nici adevăruri evidente prin sine însuși, cum erau considerate axiomele geometriei, ci concluzii provizorii bazate pe cea mai largă generalizare a fenomenelor observate direct sau studiate prin experiențe. Potrivit regulei IV aceste concluzii deduse din fenomene trebuie considerate ca absolut sau aproximativ adevărate, pînă ce alte fenomene le vor confirma sau infirma. Dar prin aceasta *Newton* nu consideră încheiat procesul cunoașterii, ci aplică metoda sintetică, arătînd că dacă admitem legile mișcării ca adevărate consecințele lor sînt de acord cu experiența. Acest lucru îl face în capitolul despre «axiomele și legile mișcării» din *Principii* unde, după ce expune legile mișcării și consecințele lor, arată cu o bogăție de exemple mai ales din funcționarea mașinilor că toate legile și îndeosebi legea acțiunii și reacțiunii, care era o lege nouă și greu de înțeles, se verifică în toate cazurile cunoscute.

În cazul gravitației universale *Newton* procedează invers. El consideră ca date legile lui *Kepler*, din care deduce că planetele se mișcă pe elipse din cauza unei forțe îndreptată spre Soare și care variază invers proporțional cu pătratul distanței planetei de la focarul ocupat de Soare. Generalizînd apoi legea atracției la planete, admițînd deci că între planete și sateliții lor, sau între oricare planete se exercită aceeași forță de atracție, ajunge la concluzia că elipsele lui *Kepler* sînt numai o primă aproximație a unei mișcări mai complicate, în care trebuie să ținem seama de perturbațiile datorite acțiunii mutuale a planetelor. În acest fel *Newton* folosește ca mijloc de generalizare nu inducția, ca în cazul legilor mișcării, ci deducția, care servește la corectarea legilor lui *Kepler*.

Newton menționează în *prop. XIII* efectele calitative ale perturbațiilor; studiul lor precis avea să absoarbă munca celor mai mari fizicieni ai veacului al XVIII-lea și al XIX-lea, dintre care amintim pe *Clairaut*, *D'Alembert*, *Lagrange*, și *Laplace*. Încă *Halley* prevăzuse că potrivit legii lui *Newton* cometa ce s-a văzut în anii 1531, 1607 și 1682 se va reîntoarce prin 1759. *Clairaut* făcînd calcule precise determină întoarcerea acesteia cu o eroare de o lună. În realitate cometa *Halley* apărură în ziua de Crăciun a anului 1758 cu o lună și o zi înainte de data calculată de *Clairaut*.

Rezultate splendide pentru legea atracției universale s-au obținut în cazul *problemei celor trei corpuri*. Această problemă are două aspecte. Dacă considerăm că unul din corpuri este foarte îndepărtat ea conduce la cazul particular al teoriei Lunii, pe cînd dacă masa perturbatoare este foarte mică ajungem la teoria planetelor.

Pentru a explica perturbațiile planetei *Uran* descoperită de *Herschel* în 1789, *Le Verrier* calculă poziția planetei care putea cauza aceste iregularități. Astronomul *Galle* de la observatorul din Berlin descoperă în ziua de 23 septembrie 1846 planeta *Neptun* la o distanță mai mică de un grad de la poziția calculată de astronomul francez.

Inegalitățile Lunii sînt calculate de astronomi cu o precizie atît de mare că abaterea maximă a satelitului nostru de la pozițiile calculate în tabele astronomice nu trece de 15"

în două secole și jumătate, ceea ce înseamnă un avans sau întârziere de cel mult o secundă de timp de apariție în fața reticulului lunetei a marginii Lunii față de previziunea tabelelor astronomice.

Legea gravitației universale a fost stabilită de *Newton* pentru sistemul nostru solar; ea se verifică însă pentru regiunile cele mai îndepărtate ale stelelor fixe. Astfel mișcările de revoluție ale stelelor duble puse în evidență de *W. Herschel* au loc după legile lui *Kepler*, după cum a arătat mai întâi *F. Savary* în 1827 pentru ξ din constelația Ursa Mare.

p. 333. *Prop. XVIII. Nicolaus Mercator* (1620—1687) cu numele adevărat *Kauffman* n, născut la Holstein, a trăit mult în Anglia, de unde a trecut în Franța. A făcut planul și a construit fântinele săritoare de la Versailles. Refuzându-i-se plata lucrării pînă nu va trece la catolicism, a murit de necaz, în mizerie. Opera sa principală este *Logaritmotehnis* apărută în 1668, datorită căreia a ajuns membru al Societății Regale. În această lucrare el propune o nouă metodă de a calcula logaritmii, bazată pe teoria seriilor.

p. 333. *Prop. XVIII și XIX. Turtirea Pămîntului*. Teoria gravitației universale¹ permite determinarea formei planetelor și în particular a Pămîntului admițînd că aceste corpuri au evoluat de la starea fluidă spre cea solidă. Un corp fluid în rotație va lua o figură de echilibru sub acțiunea forței centrifuge și a celei gravitaționale, *Newton* a ajuns la concluzia că în această ipoteză forma planetelor și a Pămîntului nu este sferică, ci ele sînt turtite la poli. Acest lucru a fost cunoscut de *Newton* pentru Jupiter din observațiile astronomului *Domenico Cassini* de la Paris și ale lui *Flamsteed*, pe care îi citează în ediția I a *Principiilor*, Cartea a III-a, prop. XIII. În ediția a III-a nu mai amintește pe nici unul, în prop. XVIII spunînd numai că «observațiile astronomilor fiind de acord», iar în prop. XIX citîndu-l numai pe *Cassini* împreună cu alți astronomi.

Newton află că diametrul ecuatorului pămîntesc față de lungimea axei sale de rotație este de aproximativ 230 către 229, în ipoteză că densitatea pămîntului este aceeași. Turtirea Pămîntului dedusă de aici ar fi deci de 1/230. Acest fapt nou trebuia verificat prin măsurări precise. Ele au durat mult timp și au dat naștere la discuții aprinse în lumea științifică. Măsurările au fost făcute îndeosebi de francezi din inițiativa Academiei de Științe de la Paris. Ele au început prin 1680 sub conducerea lui *D. Cassini* și au continuat sub aceea a fiului său *J. Cassini*. Terminate la 1718 aceste măsurări au dus la concluzia că nu este turtit la poli, ci lungit în direcția axei.

Discuțiile au urmat timp de două decenii între englezii care susțineau pe *Newton* și francezii care negau turtirea pămîntului și au avut drept rezultat trimiterea a două expediții științifice în vederea măsurării meridianului terestru, una la ecuator, cealaltă în apropierea polului nord. Cea dintîi a plecat în 1735 sub conducerea lui *La Condamine* și *Bouguer* în Peru. Rezultatele acestei expediții s-au publicat în lucrarea: *La figure de la terre déterminée par les observations de MM. Bouguer et de la Condamine*, Paris, 1749.

A doua expediție a plecat în 1736 în Laponia, sub conducerea lui *Maupertuis* și a publicat rezultatele cu mult mai curînd într-o broșură intitulată: *Sur la figure de la terre déterminée par les observations de Mr. Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier et Outhier*, Amsterdam, 1738.

Rezultatele celor două expediții au confirmat în mod neîndoielnic teoria lui *Newton*. Controveisele au mai durat cîțva timp, dar în urmă au dispărut. Ținta atacurilor a fost mai ales *Maupertuis*, pe care *Voltaire* îl numi «applatisseur de la terre et du Cassini», iar în *Discours sur la moderation* îi adresă versurile:

«Vous avez confirmé dans des lieux pleins d'ennui
Ce que Newton connu sans sortir de chez lui»

Potrivit măsurărilor geodezice recente turtirea Pământului este de $1/297,4$. Această turtire se poate determina și printr-o perturbație specială a mișcării Lunii, care depinde de ea.

p. 336. *Prop. XX. Variația greutății cu latitudinea.* Newton stabilește că greutatea corpurilor la suprafața Pământului variază de la ecuator spre poli proporțional cu pătratul sinusului latitudinii. Helmer t a ajuns, în baza a numeroase măsurări geodezice precise la formula empirică

$$g_{\varphi} = 978,00(1 + 0,00531 \sin^2 \varphi)$$

unde g_{φ} este accelerația gravitațională la latitudinea de φ grade.

Toise este o unitate de măsură veche franceză egală cu 1949 metri.

Piciorul francez este egal cu 32,4 cm, iar *piciorul englez* era de 30,4 cm.

p. 341. *Prop. XXIII. Sateliții lui Jupiter.* Pe timpul lui Newton se cunoșteau numai cei patru sateliți ai lui Jupiter pe care-i descoperise Galileu. «Satelitul cel mai din afară» menționat aici de Newton este Callisto. Azi se cunosc 11 sateliți ai lui Jupiter, dintre care unul este în interiorul, ceilalți în afara sferei lui Callisto.

p. 341. *Prop. XXIV. Flux și reflux.* Încă în antichitate s-a încercat să se explice fenomenul mareelor, cunoscut atât de bine de marinari. Cea mai răspândită idee era că el depinde de mersul Lunii și s-au încercat diferite teorii care să explice relația dintre aceste fenomene. Astfel Strabon menționează teoriile lui Eratostene, Seleucos și Posidonius asupra mareelor. Idei analoge despre acțiunea Lunii asupra mareelor au fost susținute de Ptolemeu, sf. Augustin, R. Bacon, Albertus Magnus, Gilbert, Leonardo da Vinci etc.

În afara acestei păreri aproape generale alții au încercat să explice marea punându-le în legătură cu alte fenomene, respingând acțiunea ocultă a Lunii. Atari păreri se întâlnesc deja la vechii saxoni și danezi, după cum relatează Paulus Diaconus (720—787), care o acceptă ca și Ateneodorus din Tars (80 î.e.n.- 2). Cea mai importantă dintre aceste teorii este a lui Galileu care atribuie marea mișcării neregulate ce rezultă din compunerea rotație diurne și anuale a pământului.

Newton a supus unei critici severe teoria lui Galileu, ajungând cel dintâi la o explicație calitativă satisfăcătoare a mareelor cu ajutorul teoriei gravitației universale. El reușește să stabilească un acord aproximativ între teorie și observații. În afară de aceasta încearcă să determine acțiunea separată a Lunii și a Soarelui asupra apei mării. Astfel el arată că forța cu care Luna singură ridică apa mării este proporțională cu masa Lunii și invers proporțională cu cubul distanței dintre Lună și Pământ. Fenomenul e analog pentru cazul Soarelui singur și al Pământului. Calculând raportul acestor forțe cu ajutorul observațiilor mareelor de la Bristol, efectuate de Sturmy, și cunoscând masa Soarelui, Newton găsește că masa Lunii este de $1/39$ din masa Pământului, deci o valoare aproape de două ori mai mare decât cea reală, care este aproximativ de $1/91$ din masa Pământului.

Teoria aproximativă a lui Newton bazată pe ipoteze simplificatoare nu putea prevedea mersul mareelor. Problema fiind și de ordin practic, fiindcă interesa în mare măsură navigația, Academia de Științe de la Pais puse un premiu pentru cea mai bună lucrare referitor la acest subiect. Premiul s-a împărțit în 1740 între Euler, Macclaurin și Daniel Bernoulli. Îndeosebi este important memoriul lui Bernoulli, care între alte ipoteze interesante admise că densitatea pământului crește către centru. De aici deduse că acțiunea Soarelui și a Lunii sînt cu mult mai mari decât crezuse Newton. El mai află că masa Lunii este de aproape a 60-a parte a masei Pământului, valoare cu mult mai apropiată de cea adevărată decât cea dată de Newton.

Un progres important în teoria mareelor a fost realizat de Laplace care, în 1775, stabili ecuațiile diferențiale ale unui fluid ce acopere suprafața Pământului și este atras atât de Soare cât și de Lună. Dar nici ipoteza lui Laplace nu era cu totul de acord cu faptele, fiindcă la fel cu Newton și el făcu ipoteza că Pământul este complet acoperit cu apă. Teoria lui Laplace ducând la calcule prea complicate, către sfîșitul veacului al XVIII-lea G. G. L u b b o c k și G. W h e w e l l au încercat să ajungă la cunoașterea fluxului și refluxului cu ajutorul a numeroase observații. Concluzia lor este că pentru ca fenomenele mareelor să aibă loc conform teoriei, ar trebui să avem o suprafață mare de apă neîntreruptă, condiție realizată numai în Oceanul de sud. Prin urmare în acest ocean se nasc mareele care se propagă în toate direcțiile, deci și în Oceanul Atlantic, unde maximul fluxului unei sizigii a echinocțiului ajunge după un anumit timp. În adevăr observația arată că fluxul maxim care la orele 12 se află în strîmtoarea Magellan, la miezul nopții se găsește la Capul Corrientes (Rio de La Plata), ziua următoare la amiazi este la insulele Canare, iar la orele 24 următoare ajunge la Brest, adică parcurge distanța Magellan-Brest în 36 de ore. Cu toate că observațiile ulterioare au arătat că afirmațiile lui L u b b o c k și W h e w e l l nu sînt de acord perfect cu realitatea, ele constituie totuși un punct de plecare de importanță fundamentală.

Cu lordul K e l v i n, G. D a r w i n, R e b e u r - P a s c h w i t z etc. studiul mareelor intră într-o fază nouă permițînd stabilirea și cunoașterea mareelor solide. Îndeosebi sînt importante studiile lui G. D a r w i n (*Scientific Papers*, vol. II) asupra fenomenului frecării produs de maree, studii care l-au condus la o interesantă teorie cosmogonică.

p. 348. *Prop. XXVIII.* « Razele » din text sînt la fel ca *Ad* din Cartea I, lema XI, unghiul curbiliniu dAB fiind unghiul de contact. Dacă gA și gB se iau drept raze de curbura, avem aproximativ $(gb+bd)^2 = gA + Ad^2$, sau curbura $\frac{1}{gA} = \frac{2bd}{Ad^2}$. Dacă luăm pe bd ca tangentă evanescentă a unghiului de contact, curbura a două curbe, pentru valori infinitezimale egale ale lui Ad sînt între ele precum tangentele acestor unghiuri.

p. 378. *Lema III.* Prin « mișcare » se înțelege *momentul* sau cantitatea de mișcare mv . Admițînd, pentru simplificarea problemei, că atât viteza unghiulară, cât și densitatea au valori unitare, prima afirmație a lui N e w t o n că sfera și cilindrul circumscris au momente în raportul de $3\pi:16$ se poate demonstra astfel.

Momentul unei arii circulare de rază R , ce se rotește în jurul unei axe perpendiculare pe ea și care trece prin centru (luînd r drept rază variabilă a unui inel plat, circumferința $2\pi r$, și lățimea dr) este

$$2\pi \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Prin urmare momentul cilindrului în chestiune este $\frac{4}{3} \pi R^4$.

În ce privește sfera rotitoare, să luăm fiecare secțiune a ei perpendicular pe axa de rotație, momentul căreia este de $\frac{2}{3} \pi R^3 \sin^3 \alpha$ ori grosimea infinitezimală $R \sin \alpha d\alpha$, sau $\frac{2}{3} \pi R^4 \sin^4 \alpha d\alpha$, α fiind unghiul dintre R și abscisă. Momentul întregii sfere este deci

$$\frac{4}{3} \pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \alpha d\alpha = \frac{1}{4} R^4 \pi^2$$

Avem deci momentul sferei: momentul cilindrului $= \frac{1}{4} \pi^2 R^4 : \frac{4}{3} \pi R^4 = 3\pi:16$ (1)

A doua afirmație a lui Newton, că momentul cilindrului și al unui inel îngust, ambele luate în jurul axei cilindrului, sînt precum dublul materiei din cilindru către triplul materiei din inel, este evidentă din proporția

$$\frac{4}{3} \pi R^4 : 2\pi R^2 \cdot dR = 2 (2\pi R^3) : 3 (2\pi R \cdot dR). \quad (2)$$

Pentru a obține momentul acestui inel în jurul propriului său diametru să înmulțim arcul său infinitesimal $Rd\alpha$ cu distanța $R\cos\alpha$ a acestui arc de la diametrul vertical. Momentul inelului va fi atunci

$$4R^2 dR \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha = 4R^2 dR.$$

Deci a treia afirmație a lui Newton în demonstrație este evidentă din proporția

$$2\pi R^2 dR : 4R^2 dR = 2\pi R : 4R. \quad (3)$$

Înmulțind între ei termenii corespunzători din proporțiile (1), (2), (3) și simplificînd obținem:

$$\begin{aligned} \text{momentul sferei} : \text{momentul inelului în jurul diametrului său} &= \pi^2 R^2 : 32dR = 3\pi^2 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) : \\ 32 (2\pi R dR) &= 925\,275 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) : 1\,000\,000 (2\pi R dR). \end{aligned}$$

p. 384. *Prop. XL—XLII. Comete.* Aceste propoziții nu sînt identice în cele trei ediții ale *Principiilor*, fiindcă în ediția a II-a și a III-a textul e schimbat și sînt introduse unele adaesuri. Atari adaesuri sînt corolarul IV din prop. XL și corolarul și scolia ce urmează după lema VIII. De asemenea sînt adaese datele asupra cometei din 1681, ce urmează după «20 noiembrie» în prop. XLI, și în sfîrșit cele ce urmează după Q.E.I. în prop. XLII.

p. 385. *Lema V. Formule de interpolare.* Newton se mai ocupă de formule de interpolare:

1. În *Methodus differentialis*, 1711;
2. în scrisoarea din 8 mai 1675 către John Smith;
3. într-un manuscris publicat abia în 1927;
4. într-o scrisoare din 13 iunie 1676 și alta din 24 octombrie 1676 publicate mai întîi de John Collins în *Commercium Epistolicum*, 1712.

p. 388. *Lema X.* Acad. A. N. Krîlov, în *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, London, vol. 84, 1924, p. 392 atrage atenția că teorema numită în tratatele moderne «teorema lui Euler», «teorema lui Lambert», sau «teorema lui Euler-Lambert» referitoare la relația dintre timpul de descriere al arcului unei orbite parabolice a cometelor, razele vectoare ce cuprind extremitățile arcului, și coardă, nu e altceva decît expresia analitică a lemei X a lui Newton. Acest lucru a fost relevat încă de Lagrange în *Mécanique analytique*, part. II, § VII, p. 26. În articolul său Krîlov arată că transformările algebrice sînt ușor de efectuat.

p. 389. *Prop. XLI. Exemplu.* Newton se referă aici la observațiile astronomice făcute de el însuși în 1671 cu ajutorul unui «telescop de șapte picioare», probabil un reflector.

p. 408. *Prop. XLII.* În ediția I-a *Principiile* se termină cu prop. XLII a cărții a III-a, operația 3, cu formula consacrată «Q.E.I.». În edițiile următoare, Newton adaugă material de observație bogat asupra cometelor datorit lui Hevelius, Halley etc.

p. 416. *Scolie generală.* La sfîrșitul *Principiilor*, în ediția a II-a și a III-a, probabil la îndemnul lui Bentley și Cotes, Newton a pus o scolie generală, o concluzie a

marei sale opere. Dată fiind importanța filozofică a acesteia menționăm mai întâi adaosurile și schimbările din ediția a III-a față de textul primitiv al ediției a II-a.

În ediția a III-a este adăusă propoziția: « Și pentru ca sistemul stelelor fixe să nu cadă din, cauza gravitației, unul către altul, a așezat aceste sisteme la distanțe imense unul de celălalt », apoi după « Dumnezeu lui Israel » cuvintele « Dumnezeu Dumnezeilor și Stăpînul Stăpînilor ». Propoziția « să nu zicem Perfecțiunea mea, Perfecțiunea voastră, Perfecțiunea lui Israel » din ediția a II-a a înlocuit-o cu « Dumnezeu etern; nu trebuie să zicem Infinitul meu sau Perfecțiunea mea ». În locul cuvintelor « El nu e eternitate sau infinitate » din ediția a II-a a pus « El nu e eternitate și infinitate ».

A adăos propoziția « Orice suflet care are percepție este . . . Dumnezeu este același Dumnezeu, totdeauna și pretutindenea », precum și fraza: « Căci noi îl adorăm pe el și servitorii săi . . . printr-o anumită asemănare, care deși nu este perfecta, totuși are ceva asemenea ».

Termenul de « cauză finală » e întrebuințat de Newton în sensul lui Aristotel, care deosebește patru feluri de cauze: materială, formală, eficientă și finală. Prin cea finală înțelege scopul pentru care e făcut un lucru. Filozofia marxistă a eliminat complet cauzele finale.

În scolia generală Newton trage concluzia definitivă că teoria vîrtejurilor nu poate explica mișcarea planetelor. Sistemul solar nu-și poate găsi explicarea numai în mecanică cu ajutorul gravitației universale. Admițînd atracția universală ne putem da seama de mișcarea planetelor și cometelor pe orbite, dar nu și de « poziția primitivă regulată a orbitelor ». « Acest sistem foarte elegant al soarelui, planetelor și cometelor nu a putut să se nască decît din mintea și puterea unei ființe inteligente și puternice » — adică a lui Dumnezeu, spune Newton.

Combinarea materialismului mecanic cu teismul este una din caracteristicile principale ale filozofiei lui Newton. Engels scrie în această privință următoarele: « Dar ceea ce caracterizează îndeosebi această perioadă este elaborarea unei concepții de ansamblu originale, al cărei miez îl constituie ideea *invariabilității absolute a naturii*. Oricum ar fi luat naștere natura însăși, o dată ce există, ea rămîne neschimbată atîta timp cît dăinuiește. Planetele și sateliții lor, o dată puși în mișcare de misteriosul « impuls inițial », continuă să se învîrtească în vecii vecilor pe elipsele trasate, sau în orice caz, pînă la sfîrșitul tuturor lucrurilor. Stelele rămîn pentru totdeauna fixe și nemișcate pe locurile lor, menținîndu-se reciproc în această poziție datorită « gravitației universale ». (*Dialectica naturii*, Editura de stat, 1954, p. 8).

Vorbind de teismul lui Newton, Voltairre scrie: « Întreaga filozofie a lui Newton conduce în mod necesar la cunoașterea unei ființe supreme, care a creat totul, a aranjat totul în mod liber. Căci, dacă după Newton, și după rațiune, lumea este finită, dacă există vid, materia nu există în mod necesar, deci ea și-a căpătat existența dintr-o cauză liberă. Dacă materia gravitează, după cum s-a demonstrat, ea nu gravitează din natura sa, după cum ea este extinsă din natură; ea a primit deci gravitația de la Dumnezeu. Dacă planetele se învîrtesc într-un sens și nu în altul, într-un spațiu fără rezistență, mîna creatorului lor este aceea care le-a dirijat cursul în acest sens cu o libertate absolută » (*Elements de philosophie de Newton*, première partie, chap. I).

Argumentul principal al existenței lui Dumnezeu se reduce în *Principii* la așa-numitele « condiții inițiale ». În adevăr principiile mecanicii și legea atracției universale ne permit calculul traiectoriei unui corp dacă cunoaștem anumite condiții inițiale ca poziția, viteza, masa, care pot fi arbitrare. Aceste condiții inițiale în univers nu le-a putut stabili decît Dumnezeu.

În afară de aceste argumente scoase din dinamică, Newton mai aduce și altele: armonia naturii și cauzele finale. În întrebarea 28 din *Optica* sa se întreabă: « Cum au fost

născocite corpurile animalelor atât de artistic și la ce scop servesc diferitele părți ale acestuia ? S-a construit ochiul fără îndemînare în optică și urechea fără cunoașterea acusticii ? . . . » La întrebări de acest gen răspunde : « Și fiindcă toate acestea sînt atât de bine aranjate, din fenomenele naturii nu devine evident că trebuie să existe o ființă imaterială, vie, inteligentă și pretutindenea de față, care în spațiul infinit, ca și în *sensorium*-ul său, vede toate lucrurile în interiorul lor cel mai profund și le înțelege perfect în toată intimitatea lor ? ».

Cum își închipue New t o n pe acest Dumnezeu ? Răspunsul e cuprins atât în citatul de mai sus din Optică, cît și în Scolia generală, unde spune în legătură cu universul : « toate acestea fiind construite de o minte asemănătoare vor fi supuse stăpînirii *Umia* ». Va să zică nu dumnezeirea în trei persoane, ci unul singur.

Această concepție a unui Dumnezeu unic se reoglindește și în lucrarea lui New t o n « *An historical account of two notable corruptions of scripture. In a letter to a friend* », unde ia atitudine negativă față de dogma trinității. M o h r, care a găsit mai multe manuscrise de ale lui New t o n, necunoscute înainte ajunge la convingerea că New t o n era arian *). Acad. S. I. V a v i l o v atrage atenția că « pentru o justă apreciere a opiniilor religioase ale lui New t o n, nu trebuie uitată legătura strînsă între curențele politice și religioase din Anglia acelei epoci. Protestantismul și arianismul lui New t o n au fost una din formele de luptă împotriva catolicismului Stuartilor, împotriva partidului « tory ». Aceleași rădăcini politice pot fi ușor identificate aproape în toate lucrările istorico-teologice ale lui New t o n » (*Isaac Newton*, p. 246).

Argumentele de natură religioasă ale lui New t o n au avut influență asupra contemporanilor și urmașilor săi. *Principiile* au devenit nu numai un izvor de idei științifice, ci o carte consultată și de teologi. Una din caracteristicile newtonianismului a fost și combinarea materialismului mecanic cu teismul. Materialismul dialectic a înlăturat atât materialismul metafizic, cît și ideea « primului impuls » newtonian.

p. 418. *Cauza gravitației*. În partea din urmă a scoliei generale, New t o n amintește problema delicată a cauzei gravitației, declarînd că « pînă acum nu am putut afla cauza acestor proprietăți ale gravitației » și mulțumindu-se să constate că « e deajuns ca gravitația să existe în realitate ». El se pune prin urmare pe punctul de vedere pozitiv al existenței gravitației, renunțînd să caute cauza adevărată. A luat această atitudine rezervată pentru a evita discuțiile și certurile cu « acea femeie arțăgoasă care e filozofia », dar aceasta nu înseamnă că el nu a încercat diferite ipoteze asupra gravitației.

O astfel de ipoteză i-a comunicat lui B o y l e într-o scrisoare din 1678 sau 1679 în care spune : « Voi face o conjectură mai mult . . . ea privește cauza gravitației. În acest scop voi presupune că eterul constă din părți ce diferă una de cealaltă prin subtilitate și prin grade infinite ; că în porii corpurilor se găsește mai puțin eter mai grosolan în raport cu cel mai fin decît în spațiile libere și că din partea de sus a atmosferei către suprafața Pămîntului și iarăși de la suprafața Pămîntului spre centrul acestuia aerul este din ce în ce mai fin. Să ne imaginăm acum un corp oarecare susținut în aer sau zăcînd pe Pămînt : și eterul fiind prin ipoteză mai grosolan în porii care sînt în părțile de sus ale corpului decît în aceia care se află în părțile de jos, și că eterul mai grosolan fiind mai puțin potrivit să se plaseze în acești pori, decît eterul mai fin de jos, el va încerca să iese și să cedeze locul eterului mai fin de jos, ceea ce nu se poate întîmpla fără ca corpurile coborînd să facă loc în sus ca el să poată ieși » (*Isaaci Newtoni Opera quae extant omnia*. Londini, 1779—85, vol. IV, pp. 385—394).

*) Arie (sec. IV) din Libia a fost preot în Alexandria, unde a întemeiat o sectă care nega dumnezeirea lui Hristos. Arianismul susține deci că Hristos nu e de aceeași natură cu Tatăl. Arianismul a fost condamnat și declarat eretic de conciliul ecumenic de la Nicea din anul 325.

La sfârșitul aceleiași scrisori către Boyle însă Newton scrie: «În ce mă privește însă mă simt atît de puțin atras spre astfel de lucruri (ipoteze) încît fără încurajarea dv. în nici un caz nu aş fi luat pana în mînă».

În Întrebarea 21 din *Optica* sa, Newton de asemenea menționează că eterul ar putea fi o cauză a gravitației, dar în Întrebarea 31 din aceeași carte vorbind de atracția particulelor între ele se exprimă astfel: «Felul cum are loc această atracție nici nu vreau să-l cercetez aci».

Pasajul ultim din scolia generală, în care Newton vorbește despre «spiritul (eterul) foarte fin» ce pătrunde corpurile compacte, a fost adesea interpretat ca o aluzie la posibilitatea explicării gravitației cu ajutorul eterului. Acad. S. I. Vavilov atrage însă atenția că «despre gravitație, despre eter în spațiul universal nu e nici un cuvînt în pasajul citat» (l.c. p. 176). El a omis intenționat să vorbească aici despre gravitație și eterul din spațiul universal, astfel că ipoteza eterului o folosește numai pentru explicarea forțelor ce acționează între particule la distanțe mici, cum sînt forțele electrice, capilare etc.

În legătură cu problema cauzei gravitației, Engels caracterizează astfel gravitația universală a lui Newton: «Ceea ce se poate spune despre ea mai bun este că ea nu explică, ci reprezintă concret starea actuală a mișcării planetelor».

p. 418. *Hypotheses non fingo*. După ce recunoaște că nu a putut afla cauza gravitației Newton spune: «și nu imaginez ipoteze» (*hypotheses non fingo*). Această frază devenită celebră arată atitudinea negativă a lui Newton față de ipoteze. La fel se exprimă în Întrebarea 28 din *Optică*, cînd scrie: «problema fundamentală a filozofiei naturale este ca din fenomene să tragă concluzii fără ipoteze și să deducă cauzele din efectele lor», cum și în Întrebarea 31. unde scrie: «ipotezele nu trebuie considerate în filozofia experimentală».

Mai clar arată atitudinea lui Newton față de ipoteze următorul pasaj dintr-o replică la unele obiecțiuni ale lui Pardies: «Căci cea mai bună și mai sigură metodă de filozofare mi se pare a fi, mai întîi să cercetăm cu rîvnă proprietățile lucrurilor și să le stabilim prin experiență, și apoi să căutăm ipoteze care să le explice. În adevăr, ipotezele trebuie stabilite numai ca să explice proprietățile lucrurilor și nu să încerce să le predetermine decît întrucît ele pot fi de folos experiențelor. Dacă cineva face conjuncturi asupra adevărului lucrurilor numai din posibilitatea pură a ipotezelor, nu văd cum poate fi vreun lucru determinat în mod sigur în vreo știință; fiindcă totdeauna e posibil să imaginăm ipoteze, una după alta, care să fie abundente în noi tribulații. De aceea eu consider că ar trebui să ne abținem de a ne folosi de ipoteze ca de un argument înșelător, și că forța opoziției lor trebuie înlăturată ca să putem ajunge la o explicație mai matură și mai generală» (*Opera quae extant omnia*, Londini, 1779—85, vol. IV, pp. 314—315).

Scepticismul pe care-l manifestă Newton față de ipoteze este o consecință a metodei sale inductive. El căuta pe baza materialului experimental ce-l avea la dispoziție sau pe care-l aduna el însuși să stabilească principii generale. Dar nu totdeauna i-a reușit acest lucru. Astfel n optică aceste principii s-au dovedit atît de numeroase încît realizarea opticei sintetice a fost imposibilă. Pentru explicarea fenomenelor luminoase era necesară o ipoteză și Newton însuși a imaginat pentru explicarea propagării luminii ipoteza corpusculară, în același timp în care Huygens făcea ipoteza că lumina e de natură ondulatorie.

Fizica lui Newton, lipsită de ipoteze, bazată numai pe principii se poate numi *fizica principiilor*, în contrast cu fizica lui Descartes, care e *fizica ipotezelor*. O mare parte din fizicienii ce au urmat după Newton, așa-numiții *newtonieni*, s-au mulțumit a aplica schema lui Newton cu rigurozitate, a descrie fenomenele fizice în mod matematic, fără a recurge la ipoteze, a considera *Principiile* drept forul suprem, infailibil în problemele de fizică. În acest fel s-a născut fizica newtoniană, fizica clasică, în care principiile mecanice dominau toate ramurile fizicii.

Această supremație neconstatată a fizicii principiilor a început a fi subminată la începutul veacului al XIX-lea atît prin ridicarea la suprafață a teoriei ondulatorii a luminii, cît și prin teoria cîmpului electric și magnetic al lui F a r a d a y, arătînd că teoria newtoniană nu este infailibilă. Mai tîrziu studiul proceselor din interiorul atomului a arătat caracterul limitat al fizicii lui N e w t o n, ca și necesitatea reviziei însăși a bazelor ei. E i n s t e i n a supus unei critici profunde noțiunile fundamentale ale fizicii clasice, a spațiului, timpului, masei etc. Dar nici teoria relativității, nici mecanica cuantică sau cea ondulatorie nu a înlăturat fizica lui N e w t o n. Noua fizică nu contrazice fizica lui N e w t o n, ci numai o completează. Pentru fenomenele macroscopice, fenomenele obișnuite din natură, cu care ne întîlnim la fiecare pas, fizica lui N e w t o n își păstrează întreaga valoare. În acest sens — scrie acad. S. I. V a v i l o v — opera lui N e w t o n este eternă și nu-și va pierde niciodată marea ei însemnătate » (op. cit., p. 152).

CUPRINSUL

	Păg.
<i>Prefața traducătorului ..</i>	5
<i>Oda lui Edm. Halley ..</i>	9
<i>Prefața autorului către cititor ..</i>	11
<i>Prefața autorului la ediția a doua ..</i>	13
<i>Prefața editorului la ediția a doua ..</i>	14
<i>Prefața autorului la ediția a treia ..</i>	24
Definiții ..	27
Axiomele sau legile mișcării ..	37

CARTEA I. DESPRE MIȘCAREA CORPURIILOR

SECTIUNEA

I. Despre metoda primelor și ultimelor rapoarte.....	49
II. Despre determinarea forțelor centripete.....	57
III. Despre mișcarea corpurilor în secțiuni conice excentrice	69
IV. Despre aflarea orbitelor eliptice, parabolice și hiperbolice dintr-un focar dat	78
V. Despre aflarea orbitelor cînd nici unul din focare nu este dat	84
VI. Despre aflarea mișcărilor pe orbite date	107
VII. Despre urcarea și coborîrea rectilinie a corpurilor	113
VIII. Despre aflarea orbitelor în care se rotesc corpuri acționate de forțe centripete oarecare	121
IX. Despre mișcarea corpurilor pe orbite mobile, și despre mișcarea apsidelor	126
X. Despre mișcarea corpurilor pe suprafețe date, și despre mișcarea oscilatoare a pendulelor	135
XI. Despre mișcarea corpurilor ce tind unul spre altul cu forțe centripete ..	147
XII. Despre forțele atractive ale corpurilor sferice	168
XIII. Despre forțele atractive ale corpurilor nesferice	182
XIV. Despre mișcarea corpurilor foarte mici care sînt agitate de forțe centripete tinzînd spre diversele părți ale unui corp oarecare mare	191

CARTEA A II-a. DESPRE MIȘCAREA CORPURILOR

SECȚIUNEA

I. Despre mișcarea corpurilor cărora li se opune o rezistență în raport cu viteza	197
II. Despre mișcarea corpurilor cărora li se opune o rezistență proporțională cu pătratul vitezei	204
III. Despre mișcarea corpurilor cărora li se opune o rezistență, parte în raport cu viteza, parte în raport cu pătratul ei	223
IV. Despre mișcarea circulară a corpurilor în medii rezistente	230
V. Despre densitatea și compresiunea fluidelor și despre hidrostatică	236
VI. Despre mișcarea și rezistența corpurilor pendulare	245
VII. Despre mișcarea fluidelor și rezistența proiectilelor	263
VIII. Despre mișcarea propagată prin fluide	291
IX. Despre mișcarea circulară a fluidelor.....	304

CARTEA A III-a. DESPRE SISTEMUL LUMII

Reguli de filozofare.....	314
Fenomene	316
Propoziții	320
Despre mișcarea nodurilor lunii	361
Scolie generală	416

★

<i>Isaac Newton (biografie)</i>	421
<i>Bibliografia operelor lui Newton</i>	437
<i>Adnotări</i>	443

